Известия вузов. Математика
2019, №10, с. 21–27

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

СУММАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ ВНЕ ДВУХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. Предложен метод регуляризации шестиэлементного линейного суммарного уравнения в классе нечетных функций, голоморфных вне двух правильных треугольников и имеющих в бесконечно удаленной точке нуль кратности не менее трех. Указаны приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: краевая задача Карлемана, метод регуляризации, моменты целых функций экспоненциального типа.

УДК: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-21-27

Введение. Пусть вначале D — квадрат, построенный по примитивным периодам 1 и i, а $\sigma_m(z) = z + i^m, m = \overline{1,4}$, — порождающие преобразования двоякопериодической группы и преобразования, обратные к ним. В работе [1] было полностью исследовано линейное разностное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{4} f[\sigma_m(z)] = g(z), \quad z \in D,$$

при следующих предположениях.

1) Решение $f(z)$ голоморфно вне $\overline{D}$, причем $f(\infty) = 0$.

2) Его граничные значения $f^-(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любом компакте, не содержащем вершин. В вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности.

3) Свободный член $g(z)$ голоморфен в D и $g^+(t) \in H(\partial D)$.

Такой класс решений обозначим через B. Более подробно по поводу выбора этого класса изложено во введении к [2] или [3].

К подобным уравнениям неприменимы мощные методы исследования операторов свертки, изложенные в [4]. Это обусловлено несвязностью множества $\mathbb{C} \setminus H$, где $H = \cup\sigma_m(D)$. С другой стороны, такие уравнения имеют многочисленные приложения в смежных областях анализа. Укажем на два из них. Во-первых, они тесно связаны с классическими интерполяционными задачами для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) (например, [5]). Во-вторых, они удобны для построения биортогонально сопряженных систем аналитических функций и представления некоторых классов аналитических функций соответствующими биортогональными рядами в невыпуклых областях [6]. Подчеркнем, что метод регуляризации, предложенный в [1], применим и в случае произвольного параллелограмма.

Поступила в редакцию 23.09.2018, после доработки 09.12.2018. Принята к публикации 27.03.2019.

Квадрат выбран только потому, что удается сократить вспомогательные вычисления из-за его симметрии.

Пусть теперь $D = \bigcup\limits_{j=1}^{n} D_j$, — совокупность таких квадратов. Здесь $g(z) = g_j(z), z \in D_j$, — кусочно-голоморфная функция. Свяжем с каждым из них множество $H_j = \bigcup\limits_{m=1}^{4} \sigma_m(D_j)$. Если $H_j \cap D_k \neq \emptyset$, то задача теряет смысл. В статье [3] разностное уравнение было исследовано в предположении, что квадраты "очень далеко"друг от друга. При этом, в частности, $H_j \cap H_k = \emptyset$ $(k \neq j)$. За счет этого оказались потерянными интересные эффекты, к которым пришлось вернуться позже в статье [7].

Пусть D — четырехугольник, отличный от параллелограмма, или треугольник, т. е. это не фундаментальное множество некоторой двоякопериодической группы. Тогда вместо подобных разностных уравнений возникают суммарные. Однако они по-прежнему тесно связаны с интерполяционными задачами для ц.ф.э.т. (цикл статей [2],[8]–[11]). Основная цель данной работы — получить аналог результатов статьи [7] для суммарного уравнения. Перейдем к непосредственной постановке задачи.

Пусть $\gamma \in (4^{-1}\sqrt{3}, 2^{-1}\sqrt{3})$. Рассмотрим правильный треугольник D_1 с вершинами $t_1 = \gamma + 2^{-1}\sqrt{3}, t_2 = \gamma + 2^{-1}i, t_3 = \gamma - 2^{-1}i$ и сторонами $l_j, j = \overline{1,3}$, перечисленными в порядке положительного обхода границы $\Gamma_1 = \partial D_1$ $(t \in l_1 => \mathrm{Im} t > 0)$. Преобразования $\sigma_{2j-1}(z) = t_j + t_{j+1} - z,\ j = \overline{1,3}\ \ (t_4 \equiv t_1)$, переводят D_1 в треугольники, имеющие с ним общую сторону, а преобразования $\sigma_{2j}(z) = 2t_j - z$ — в треугольники, имеющие с ним общую вершину, т. е. они выбрасывают точку z из внутренности треугольника в его внешность. Положим $D_2 = -D_1, \Gamma_2 = \partial D_2, D = D_1 \cup D_2, \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Введем функции $h_m(z) = \{\sigma_m(z), z \in \overline{D_1}; -\sigma_m(-z), z \in \overline{D_2}\}, m = \overline{1,6}$.

Исследуем суммарное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{6} f(h_m(z)) = g(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

в классе B при дополнительном предположении, что функция $f(z)$ нечетна и в точке $z = \infty$ у нее нуль кратности не менее трех. Такой подкласс решений обозначим через B_1. Здесь свободный член $g(z) = \{g_1(z), z \in D_1; -g_1(-z), z \in D_2\}$, где функция $g_1(z)$ голоморфна в D_1 и $g_1^+(t) \in H(\Gamma_1)$.

Замечание 1. В работе [8] была рассмотрена задача (1) в случае одного правильного треугольника D_1 в классе решений B. Нетривиальность этой задачи обусловлена несвязностью множества $\mathbb{C} \setminus H_1$, где $H_k = \bigcup\limits_{m=1}^{6} h_m(D_k), k = 1, 2$. В работе [9] исследовалась похожая шестиэлементная задача, но с другим набором коэффициентов. Подчеркнем, что рассмотренные в работах [8] и [9] задачи имеют разную картину разрешимости.

Теперь поясним постановку задачи в данной статье. Если $\gamma \in (0, 4^{-1}\sqrt{3})$, то она теряет смысл. Тогда $\exists z \in D_1 : \sigma_3(z) \in D_2$, но функция $f(z)$ определена, вообще говоря, только вне D. Если же $\gamma > 2^{-1}\sqrt{3}$, то $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Этот случай также можно исследовать указанным ниже методом, но он представляет меньший интерес по сравнению с рассмотренным в данной статье. Здесь множество $H_1 \cap H_2$ распадается на три ромба $\Delta_0 (0 \in \Delta_0), \Delta_0 \pm i$ с острым углом $\pi/3$, причем у Δ_0 вершины $\pm(\gamma - 2^{-1}\sqrt{3}), \pm(2^{-1} - 3^{-1/2}\gamma)i$.

В п. 1 данной статьи указан метод регуляризации задачи (1) и выяснено условие равносильности этой регуляризации. При этом широко используется аппарат теории краевой

задачи Карлемана [12], [13]. В п. 2 показано, что при $\gamma \in [0.85; \sqrt{3}/2)$ задача (1) разрешима и имеет единственное решение. Поясним выбор числа 0.85. Оно выбрано для определенности, поскольку доказательство теоремы 2 требует численных расчетов. Такой выбор γ позволяет удовлетворить трем требованиям. Задача имеет смысл, когда множество $H_1 \cap H_2$ непусто и соответствующие оценки позволяют доказать теорему 2. В п. 3 рассмотрены приложения задачи (1) к некоторой проблеме моментов для ц.ф.э.т. Это обобщение классической проблемы моментов Стилтьеса на случай двух лучей с кусочно-квазиполиномиальным весом.

1. Регуляризация задачи. Будем искать решение задачи (1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \phi(t) d\tau, \quad z \notin \overline{D}, \tag{2}$$

с неизвестной нечетной плоностью, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{\Gamma} \phi(t) d\tau = 0 <=> \int\limits_{\Gamma_k} \phi(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, 2. \tag{3}$$

В силу (3) можно считать, не ограничивая общности, что

$$\phi(\tau) = -\phi[\alpha(\tau)]. \tag{4}$$

Здесь $\alpha(t) = \{\sigma_{2j-1}(t), t \in l_j; j = \overline{1,3}\}$ — сдвиг Карлемана, который каждую сторону переводит в себя с изменением ориентации, причем середины сторон — неподвижные точки сдвига. При $t \in \Gamma_2$ имеем $\alpha(t) = -\alpha(-t)$. Действительно, плотность интеграла типа Коши при $t \in \Gamma_1$ определена с точностью до слагаемого $a^+(\tau)$, и функция $a(z)$ голоморфна в D_1. Подберем его так, чтобы $a^+(t) + \phi(t) = -a^+ p\alpha(t) - \phi[\alpha(t)]$. Это краевая задача Карлемана относительно функции $a(z)$ и в силу (3) она разрешима [13]. Тогда

$$(1) <=> (E\phi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} A(z, \tau) \phi(\tau) d\tau = g(z), \quad z \in D, \tag{5}$$

где

$$A(z, \tau) = \sum_{m=1}^{6} (\tau - h_m(z))^{-1}. \tag{6}$$

Перейдем к пределу $z \to t \in \Gamma$ в (5). По формуле Сохоцкого имеем

$$(E^+\phi)(t) \equiv -2^{-1}\phi[\alpha(t)] + (E\phi)(t) = g^+(t), \tag{7}$$

где особый интеграл в (7) понимается в смысле главного значения по Коши. Заменим в (7) переменную t на $\alpha(t)$ и вычтем полученное соотношеие из исходного, используя (4). Тогда

$$(T\phi)(t) \equiv \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} K(t, \tau) \phi(\tau) d\tau = g^+(t) - g^+[\alpha(t)], \tag{8}$$

где

$$K(t, \tau) = A(t, \tau) + A[\alpha(t), \alpha(\tau)]. \tag{9}$$

Лемма. *Ядро* (9) *ограничено.*

Доказательство сводится к непосредственной проверке при различных вариантах взаимного расположения точек τ и t на сторонах треугольников.

Следствие 1. Уравнение (8) — это интегральное уравнение Фредгольма второго рода, т. е. оно имеет конечное число N условий разрешимости.

Теорема 1. *Задача* (1) *имеет* $N+1$ *условий разрешимости. Из них* N *— это условия разрешимости интегрального уравнения* (8), *а еще одно* $(E\phi)(z_0) = g_1(z_0), z_0 \in D_1$, *обеспечивает равносильность регуляризации.*

Допустим, что уравнение (8) разрешимо. Тогда оно имеет решение $\phi(t)$, удовлетворяющее условию (4). Доказательство идентично приведенному в [14]. Покажем, что его можно считать нечетным. Действительно, функция $\phi_0(t) = \phi(t) + \phi(-t)$ есть решение однородного уравнения Фредгольма

$$T\phi = 0. \tag{10}$$

Для этого достаточно в соотношении (8) заменить переменные τ и t на $-\tau$ и $-t$ соответственно, а затем сложить полученное равенство с исходным. Итак, функция $\phi_0(t)$ есть четное решение однородного уравнения (10), а искомым решением будет функция $\phi(t) - 2^{-1}\phi_0(t)$.

Теперь осуществим обратный переход от уравнения (8) к задаче (1). Имеем (8) => $(E^+\phi)(t) - (E^+\phi)[\alpha(t)] = g^+(t) - g^+[\alpha(t)]$, т. е. $(E\phi)(z) = g_1(z) + c, z \in D_1$, что завершает доказательство.

Пусть эти $N+1$ условий выполнены и $z \in \Delta_0$. Тогда сумму $b(z) = f(z) + f(z+i) + f(z-i)$ можно записать двумя способами. С одной стороны, $b(z) = g_1(2\gamma - z) - f(z+\sqrt{3}) - f(z + 2^{-1}(\sqrt{3}+i)) - f(z+2^{-1}(\sqrt{3}-i))$. С другой стороны, $b(z) = -g_1(-2\gamma - z) - f(z-\sqrt{3}) - f(z + 2^{-1}(i-\sqrt{3})) - f(z - 2^{-1}(\sqrt{3}+i))$. Приравнивая эти два соотношения, имеем

$$f(z+\sqrt{3}) - f(z-\sqrt{3}) + f(z+2^{-1}(\sqrt{3}+i)) - f(z-2^{-1}(\sqrt{3}+i)) + \\ + f(z+2^{-1}(\sqrt{3}-i)) - f(z-2^{-1}(\sqrt{3}-i)) = g_1(2\gamma - z) + g_1(2\gamma + z), z \in \Delta_0. \tag{11}$$

2. Исследование интегрального уравнения. Покажем, что при $\gamma \geq 0.85$ уравнение (8) разрешимо. Для этого рассмотрим соответствующее однородное уравнение (10). Его фундаментальную систему решений (ф.с.р.) можно выбрать так, что каждая входящая туда функция удовлетворяет либо условию (4), либо условию $\phi(t) = \phi[\alpha(t)]$ (например, [14]).

Теорема 2. *При* $\gamma = 0.85$ *уравнение* (8) *разрешимо* ($N = 0$). *Задача* (1) *имеет единственное условие разрешимости.*

Доказательство. Поскольку $K(t,\tau) = K(\tau,t)$, то достаточно показать, что ф.с.р. не содержит функций со свойством (4), поскольку функции с противоположным свойством ортогональны правой части уравнения (8). Для этого вместо ядра (9) возьмем новое ядро $K_1(t,\tau) = 2^{-1}[K(t,\tau) - K(t,\alpha(\tau))]$ и оценим его модуль. Достаточно рассмотреть всего два случая. Пусть

$$M = \max|\phi(t)|, t \in \Gamma. \tag{12}$$

Случай 1. $t \in -l_1$. Возможны следующие подслучаи.

1.1. $\tau \in -l_1 => K(t,\tau) = u^{-1} + (u-i)^{-1} + (u + 2^{-1}(\sqrt{3}-i))^{-1} - (u+\sqrt{3}+i)^{-1} - (u + \sqrt{3}+2i)^{-1} - (u + 2^{-1}(\sqrt{3}i))$, где $u = \tau + t + 2\gamma$. Имеем $|K_1| \leq 0.73$.

1.2. $\tau \in -l_2 => K(t,\tau) = (u-i)^{-1} + (u+\sqrt{3})^{-1} - (u+2^{-1}(3i+\sqrt{3}))^{-1} - (u+2^{-1}(i-\sqrt{3}))^{-1}$. Имеем $|K_1| \leq 0.73$.

1.3. $\tau \in -l_3$. В силу симметрии справедлива предыдущая оценка.

Если $\tau \in \Gamma_1$, то ядро $A(t,\tau)$ не содержит слагаемых, интеграл от которых понимается в смысле главного значения по Коши. Ядро (9) состоит из двенадцати слагаемых. Справедливы оценки

1.4. $\tau \in l_1 => |K_1| < 0.32$,

1.5. $\tau \in l_2 => |K_1| < 0.44$,

1.6. $\tau \in l_3 => |K_1| < 0.31$.

Поскольку $3 \cdot 0.73 + 0.32 + 0.44 + 0.31 < 2\pi$, то условие (12) не реализуется при $t \in -l_1$. В противном случае $\phi \equiv 0$.

Случай 2. $t \in l_2$. Возможны следующие подслучаи. При $\tau \in \Gamma_2$ остаются справедливы соответствующие оценки из случая 1, поскольку треугольник правильный (подслучаи 2.1, 2.2, 2.3).

2.4. $\tau \in l_1 => |K_1| \leq 0.54$,

2.5. $\tau \in l_2 => |K_1| \leq 1.2$,

2.6. $\tau \in l_3 => |K_1| \leq 0.54$.

Поскольку $3 \cdot 0.73 + 2 \cdot 0.54 + 1.2 < 2\pi$, то $\phi \equiv 0$. □

Замечание 2. При $\gamma > 0.85$ полученные оценки не изменяются или улучшаются, поскольку расстояние между треугольниками увеличивается. Итак, теорема 2 справедлива и при $\gamma > 0.85$.

Замечание 3. Из оценок, гарантирующих справедливость теоремы 2, вытекает, что число γ можно взять несколько меньшим, чем 0.85. Вопрос о том, насколько меньшим, в даной работе не рассматривается.

Следствие 2. Ф.с.р. однородного уравнения (8) может содержать только функции со свойством $\phi(t) = \phi[\alpha(t)]$.

3. Приложение к проблеме моментов. Задача (1) равносильна некоторой проблеме моментов для ц.ф.э.т. Функция $f(z) \in B_1$ является нижней функцией, ассоциированной по Борелю с четной ц.ф.э.т. $F(z)$ (верхней функцией) ([15], гл.1, п.1). Ее сопряженной индикаторной диаграммой является, вообще говоря, шестиугольник D_0 с вершинами $\pm t_1, \pm t_2, \pm t_3$.

Замечание 4. Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой является "меньшее"выпуклое множество $D' \subset D_0$, возможен, но малоинтересен. Дело в том, что тогда задача (1) переопределена. Соотношение (1) выполняется не только при $z \in D$, но и в окрестности бесконечно удаленной точки. Для этого необходимо (но не достаточно), чтобы свободный член $g_1(z)$ был аналитически продолжим из D_1 в окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g_1(\infty) = 0$ (замечание 2 в [7]).

Перепишем соотношение (11) в терминах ц.ф.э.т., используя нечетность нижней функции. Разложим правую часть соотношения (11) в ряд Маклорена, т. е.

$$g_1(2\gamma - z) + g_1(2\gamma + z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m z^{2m}}{(2m)!}.$$

С другой стороны, $g_1(2\gamma - z) + g_1(2\gamma + z) = 2\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\theta_k} F(\tau)\mu_k(\tau)\mathrm{ch}(z\tau)d\tau$, где θ_k — луч $\arg\tau = (-1)^k\pi/3, k = 1, 2$, и $\mu_1(\tau) = \exp(-\sqrt{3}\tau) + \exp[-2^{-1}\tau(\sqrt{3}+i)], \mu_2(\tau) = \exp[-2^{-1}\tau(\sqrt{3}-i)]$. Фиксируем c_0 так, чтобы выполнялось условие разрешимости в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть $\gamma \in [0.85; \sqrt{3}/2)$. Тогда в классе четных ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированных по Борелю с нижними функциями $f(z) \in B_1$, степенная проблема моментов*

$$2\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\theta_k} F(\tau)\mu_k(\tau)\tau^{2m}d\tau = c_m, \ m = 1, 2, 3, \ldots,$$

разрешима и имеет единственное решение.

Для доказательства достаточно приравнять коэффициенты Маклорена левой и правой частей соотношения (11).

Замечание 5. Теорема 2 остается справедливой и при $\gamma \geq \sqrt{3}/2$. Но тогда с задачей (1) связаны уже не классические проблемы моментов, а интерполяционные задачи других типов. Это обусловлено тем, что некоторые из точек $h_j(z)$ при $z \in D$ лежат внутри D_0. Такие задачи были исследованы в работах [16], [17]. В [16] была рассмотрена задача о восстановлении ц.ф.э.т. по соотношениям, связывающим коэффициенты Маклорена нижней функции и моменты Стилтьеса верхней функции относительно некоторого экспоненциального веса.

В заключение сравним результаты статьи [8], где рассматривалась задача (1) для одного правильного треугольника в классе решений B, и данной работы. В обоих случаях эта задача имеет одно условие разрешимости, но речь идет об условиях разрешимости разной природы. Если в [8] единственное условие является условием разрешимости соответствующего неоднородного уравнения Фредгольма (там равносильная регуляризация), то в данной работе при $\gamma \geq 0.85$ интегральное уравнение (8) разрешимо, хотя оно не равносильно задаче (1). Такое возникает за счет дополнительных ограничений на решение (его нечетность и поведение на бесконечности).

Литература

[1] Гарифьянов Ф.Н. *Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата*, Изв. вузов. Матем. (7), 7–16 (1993).

[2] Гарифьянов Ф.Н., Модина С.А. *Четырехэлементное уравнение для функций, аналитических вне трапеции, и его приложения*, Сиб. матем. журн. **52** (2), 243–249 (2011).

[3] Гарифьянов Ф.Н. *Разностные уравнения для функций, аналитических вне нескольких квадратов*, Сиб. матем. журн. **44** (3), 550–559 (2003).

[4] Напалков В.В. *Уравнение свертки в многомерных пространствах* (Наука, М., 1982).

[5] Гарифьянов Ф.Н. *Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа*, Матем. заметки **67** (5), 674–679 (2000).

[6] Гарифьянов Ф.Н. *Трансформация биортогональных систем и некоторые их приложения, II*, Изв. вузов. Матем. (8), 13–24 (1996).

[7] Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В. *Разностное уравнение для функций, аналитических вне двух квадратов*, Изв. вузов. Матем. (6), 3–8 (2018).

[8] Гарифьянов Ф.Н. *Суммарное уравнение для функций, голоморфных вне треугольника*, Изв. вузов. Матем. (9), 19–26 (2008).

[9] Garifyanov F.N., Strezhneva E.V. *About functional equation, generated by equilateral triangle*, Lobachevskii J. Math. **39** (2), 204–208 (2018).

[10] Гарифьянов Ф.Н. *Суммарное уравнение для функций, аналитических вне четырехугольника*, Изв. вузов. Матем. (10), 3–7 (2016).

[11] Гарифьянов Ф.Н. *О суммарном уравнении, порожденном четырехугольником*, Изв. вузов. Матем. (1), 27–33 (2018).

[12] Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом* (Наука, М., 1977).

[13] Зверович Э.И. *Метод локально-конформного склеивания*, ДАН СССР **205** (4), 767–770 (1972).

[14] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана*, Изв. вузов. Матем. (4), 43–51 (1983).

[15] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение* (Наука, М., 1967).

[16] Гарифьянов Ф.Н., Кац Д.Б. *Об уравнении с ядром Карлемана и его приложении к проблеме моментов*, Учен. зап. Казанск. ун-та, сер. физ.-матем. науки **154** (3), 112–120 (2012).

[17] Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В. *Интерполяционные задачи для целых функций, индуцированные правильным шестиугольником*, Сиб. матем. журн. **59** (1), 78–85 (2018).

Фархат Нургаязович Гарифьянов

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

F.N. Garif'yanov

Summary equation for functions, which are holomorphic outside two triangles, and its applications

Abstract. A method is proposed for regularizing a six-element linear total equation in the class of odd functions that are holomorphic outside two regular triangles and having zero at least three multiplicities at infinity. The applications to the problem of moments for entire functions of exponential type are indicated.

Keywords: Carleman boundary value problem, regularization method, moments of entire functions of exponential type.

Farkhat Nurgayazovich Garif'yanov

Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru