Условие задачи

- Задана последовательность целых чисел b
- Требуется найти последовательность целых чисел a
  - выполнялось $a_i = a_{i-1} + a_{i+1}$ для всех $1 < i < n$
  - $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$ было минимально

Решение

- Пусть $x = a_1$, $y = a_2$
- Тогда последовательность имеет вид:
  x, y, $(y - x)$, $-x$, $-y$, $(x - y)$, x, $\ldots$
  - Зациклена с периодом длины шесть
- Требуется подобрать целые x и y и минимизировать:
  $|x - b_1| + |y - b_2| + |(y - x) - b_3| + |-x - b_4| +$
  $+ |-y - b_5| + |(x - y) - b_6| + \ldots$
- Преобразовав:
  $|x - b_1| + |y - b_2| + |(y - x) - b_3| + |x - (-b_4)| +$
  $+ |y - (-b_5)| + |(y - x) - (-b_6)| + \ldots$
- Получим последовательность:
  $b_1, b_2, b_3, -b_4, -b_5, -b_6, b_7, \ldots$
- Все слагаемые можно разбить на три группы: $|x - a|$, $|y - b|$, $|(y - x) - c|$

Решение

- Замечание: существует пара (x, y) такая, что хотя бы в двух группах значение хотя бы одного слагаемого равно нулю
  - Доказательство: упражнение
- Если зафиксировать эти слагаемые, то можно однозначно восстановить x и y
- Получим решение за $O(n^3)$:
  - Выберем две из трех групп
  - Выберем по слагаемому в этих двух группах
  - Получим x и y
  - Вычислим сумму разностей
  - Обновим ответ, если улучшилось

Решение

- Еще одно замечание: пусть числа в b не превосходят по модулю A. Тогда x и y не превосходят $2A$
  - Так как хотя бы два слагаемых равны нулю, то два из x, y и $(x - y)$ по модулю не превосходит A
  - Либо оба слагаемых в первых двух группах, тогда и x, и y не превосходит A
  - Либо одно из x и y не превосходит A
    - Тогда $(x - y)$ не превосходит по модулю A
    - И оставшееся из x и y не превосходит $2A$

Подзадача 1

- Ограничение: $n = 3$ и $|b_i| \leq 10$
- Можно перебрать значения a_1, a_2 и a_3 от -20 до 20
- Проверить условие гармоничности
- Вычислить сумму разностей
- Обновить ответ

Подзадача 2

- Ограничение: $n \leq 500$ и $|b_i| \leq 100$
- Переберем значения x и y от -200 до 200
- Восстановим последовательность
- Вычислим сумму разностей
- Обновим ответ

Подзадача 3

- Ограничение: $n \le 10^5$ и $|b_i| \le 100$
- Переберем значение x от -200 до 200
- Подставим значение в сумму, получим: $|y_1 - y| + |y_2 - y| + \dots$
- Далее, либо переберем слагаемое, которое равно нулю
    - Используя префиксные и суффиксные суммы посчитаем значение
- Либо найдем медиану $y_1, y_2, \dots$
    - Оно и будет оптимальным
    - Посчитаем сумму за линейное время
- Обновим ответ

Подзадача 4

- Ограничение: $n \leq 1000$ и $|b_i| \leq 10^9$
- Переберем какие два слагаемых равны нулю
- Получим значения x и y
- С помощью префиксных и суффиксных сумм посчитаем значение
- Обновим ответ
- Время: $O(n^2)$

Подзадача 5

- Ограничение: $n \leq 3 \cdot 10^5$ и $|b_i| \leq 10^9$
- Утверждение: если для некоторого x уже найдено минимальное оптимальное y, то для большего x значение y будет не меньше
- Разобьем слагаемые на три группы
- Отсортируем каждую группу по неубыванию константы внутри модуля
- Переберем две группы, в которых слагаемые равны нулю

Подзадача 5

- Рассмотрим случай, когда это группы $|x - x_i|$ и $|y - y_i|$, остальные аналогично
- Переберем в порядке возрастания, какое слагаемое из первой группы равно нулю
- Будем поддерживать указатель на слагаемое из второй группы, которое дает оптимальный результат
  - Будем увеличивать его, пока ответ становится лучше
- С помощью двоичного поиска найдем, какие модули из третьей группы раскроются в положительную, а какие в отрицательную сторону
- С помощью префиксных и суффиксных сумм во всех трех группах посчитаем значения и сложим
- Обновим ответ
- Время: $O(n \log n)$ — сортировка, линейный пробег с двоичным поиском