

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ С ЦЕНТРАМИ НА ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

А.И. Давлетшин

*Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН,
г. Казань, 420111, Россия*

Аннотация

Изучено гидродинамическое взаимодействие слабонесферических газовых пузырьков, расположенных в жидкости на одной плоскости, под действием акустического возбуждения. Предположено, что один из пузырьков находится в центре концентрических окружностей, на которых равномерно распределены другие пузырьки. Число окружностей варьируется от одного до трех, а количество пузырьков на окружностях – от двух до семи. Динамика пузырьков описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиусов пузырьков, радиус-векторов их центров, векторов, характеризующих малую несферичность пузырьков, и температур внутри пузырьков. Учтены эффекты вязкости и сжимаемости жидкости, поверхностного натяжения и теплообмена между пузырьками и жидкостью. Проведено исследование зависимости совместной динамики пузырьков от их количества в рассматриваемых конфигурациях и числа кольцевых слоев, на которых они расположены, частоты и амплитуды акустического воздействия. Выявлен ряд закономерностей влияния гидродинамического взаимодействия на радиальную динамику пузырьков, их пространственные перемещения и малые деформации их поверхностей.

Ключевые слова: газовые пузырьки в жидкости, акустическое поле, гидродинамическое взаимодействие, деформации пузырьков

Введение

Динамика парогазовых пузырьков в жидкости в их разнообразных скоплениях может существенно зависеть от их гидродинамического взаимодействия [1, 2], которое усиливается с уменьшением расстояния между пузырьками. Взаимовлияние пузырьков особенно сильно проявляется в акустических полях [3–6], где давление жидкости является переменным, вследствие чего пузырьки испытывают сильные радиальные расширения и сжатия. В результате гидродинамического взаимодействия радиальные колебания пузырьков могут ослабляться или усиливаться [7], пузырьки могут перемещаться в жидкости [8], а их поверхности деформироваться [9, 10] и т. д. Известно, что на центральные пузырьки в скоплении может действовать существенно большее сжимающее давление, чем на периферийные, за счет более раннего схлопывания (коллапса) последних [11, 12]. С другой стороны, взаимодействие между пузырьками может приводить к большим деформациям их поверхностей, в результате чего пузырьки могут разрушиться [9]. Эти и другие особенности взаимовлияния пузырьков могут быть использованы в различных приложениях, например при ультразвуковой очистке поверхностей тел от различных загрязнений во многих сферах деятельности [13, 14], при интенсификации

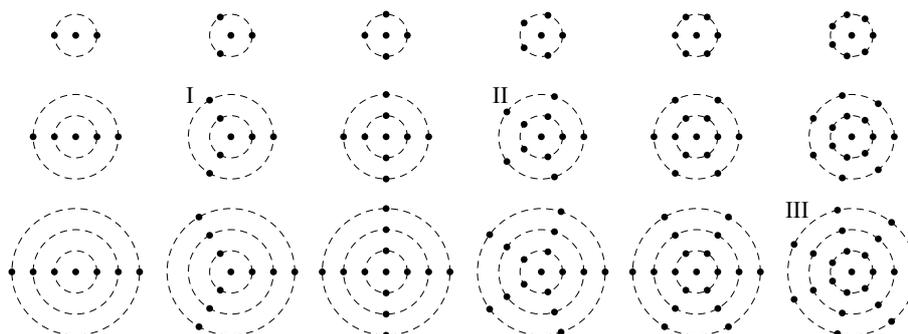


Рис. 1. Рассматриваемые конфигурации пузырьков с центрами на одной плоскости. Римскими цифрами I–III отмечены конфигурации, изучаемые в настоящей работе более подробно

физико-химических процессов в химии [15], при диагностике, доставке лекарств в медицине [16, 17].

Настоящая работа посвящена изучению динамики взаимодействующих слабо-несферических газовых пузырьков в акустическом поле в плоских конфигурациях их взаимного расположения (центры пузырьков находятся на одной плоскости). Следует отметить, что из-за наличия несферических деформаций поверхностей пузырьков даже в случае плоской конфигурации рассматриваемая задача является трехмерной. Поэтому для описания совместной динамики пузырьков используется трехмерная математическая модель. Она представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка относительно радиусов пузырьков, радиус-векторов их центров и векторов, характеризующих малые по амплитуде, но произвольные по форме отклонения поверхности пузырьков от сферической [18]. Принимается во внимание влияние поверхностного натяжения, эффекты вязкости и сжимаемости жидкости предполагаются малыми и не зависящими от взаимодействия между пузырьками [19]. Теплообмен между пузырьками и жидкостью учитывается с применением подхода работы [20], согласно которому показатель адиабаты газа в пузырьках считается зависящим от их радиуса и скорости его изменения. В этом случае указанные ОДУ второго порядка [18] дополняются ОДУ первого порядка [20] относительно температур внутри пузырьков. Установлен ряд закономерностей влияния гидродинамического взаимодействия между пузырьками в рассматриваемых конфигурациях на их динамику в акустическом поле в зависимости от их числа, взаимного расположения, частоты и амплитуды акустического воздействия.

1. Постановка задачи

Изучается совместная динамика слабо-несферических пузырьков, расположенных в жидкости в пучности интенсивной ультразвуковой стоячей волны с давлением p_∞ , изменяющимся по гармоническому закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \sin(\omega t),$$

где p_0 – статическое давление, p_a , ω – амплитуда и частота колебаний, t – время.

Рассматриваются плоские конфигурации взаимного расположения пузырьков (рис. 1), в которых один из них находится в центре, а другие расположены равномерно на концентрических окружностях в точках пересечения с лучами, исходящими из центра конфигураций. Число окружностей изменяется от 1 до 3,

а число пузырьков на каждой окружности – от 2 до 7, так что общее количество пузырьков K изменяется от 3 до 22. Основное внимание уделяется динамике центрального пузырька.

Изначально (в момент времени $t = 0$) все пузырьки неподвижны, сферические, с одинаковыми радиусами $R_{0k} = 3$ мкм ($k = 1, 2, \dots, K$). Начальное расстояние между окружностями, на которых расположены центры пузырьков, и радиус внутренней окружности равны $d_0 = 300$ мкм. Пузырьки воздушные, а жидкостью является вода при комнатных условиях. Входные параметры задачи следующие: температура жидкости $T_0 = 293.15$ К, скорость звука в жидкости $c_0 = 1500$ м/с, плотность жидкости $\rho_0 = 998$ кг/м³, статическое давление жидкости $p_0 = 1$ бар, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0.0725$ Н/м, динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu = 10^{-3}$ кг/(м·с), показатель адиабаты газа $\kappa = 1.4$, начальное значение коэффициента теплопроводности газа $\varkappa_0 = 0.0258$ Вт/(м·К), удельная теплоемкость газа при постоянном объеме $c_v = 720$ Дж/(кг·К). Амплитуда колебаний давления в волне p_a варьируется от 1.1 до 1.14 бар, а частота $\omega/2\pi$ – от 15 до 30 кГц.

2. Математическая модель

Применяется математическая модель, в которой уравнение поверхности k -го пузырька представляется в виде ряда

$$F_k(r_k, \theta_k, \varphi_k, t) = r_k - R_k(t) - \sum_{n=2}^N \mathbf{a}_{nk}(t) \cdot \mathbf{Y}_n(\theta_k, \varphi_k) = 0,$$

где r_k, θ_k, φ_k – сферическая система координат с началом отсчета в центре этого пузырька, $\mathbf{Y}_n(\theta_k, \varphi_k) = (Y_{nk}^{-n}, Y_{nk}^{-n+1}, \dots, Y_{nk}^{n-1}, Y_{nk}^n)$, $\mathbf{a}_{nk} = ((a_{nk}^{-n} + ia_{nk}^n)/2, \dots, a_{nk}^0, \dots, (a_{nk}^{-n} - ia_{nk}^n)/2)$ – векторы, $Y_{nk}^m = P_n^{|m|}(\cos \theta_k) \times e^{im\varphi_k}$ – сферическая функция, $P_n^{|m|}$ – присоединенный полином Лежандра степени n порядка $|m|$, i – мнимая единица, R_k – радиус k -го пузырька, a_{nk}^m – амплитуда отклонения поверхности k -го пузырька от сферической в виде поверхностной гармоники с номером n и порядком m , N – максимальное значение номера сферических гармоник в представлении поверхности пузырьков. Отклонения от сферической формы пузырьков характеризуются величиной $\tilde{\varepsilon}_{nk} = s \cdot \max_{\theta_k, \varphi_k} |\varepsilon_{nk}|$, где $\varepsilon_{nk} = \sum_{m=-n}^n \varepsilon_{nk}^m Y_n^m(\theta_k, \varphi_k)$, $\varepsilon_{nk}^m = a_{nk}^m/R_k$, $s = +1$ при $|\max_{\theta_k, \varphi_k} \varepsilon_{nk}| > |\min_{\theta_k, \varphi_k} \varepsilon_{nk}|$, $s = -1$ при $|\max_{\theta_k, \varphi_k} \varepsilon_{nk}| < |\min_{\theta_k, \varphi_k} \varepsilon_{nk}|$. Предполагается, что $\tilde{\varepsilon}_{nk}^2 \ll 1$.

Совместная динамика пузырьков описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков R_k , радиус-векторов их центров \mathbf{p}_k и векторов \mathbf{a}_{nk} , определяющих несферичность пузырьков. Эти уравнения имеют следующий вид [18]:

$$\begin{aligned} R_k \ddot{R}_k + \frac{3\dot{R}_k^2}{2} - \frac{3\dot{\mathbf{p}}_k(\dot{\mathbf{p}}_k \beta_{110})}{8} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_k} - \frac{p_k - p_\infty}{\rho_0} + \psi_{0k} + \Delta_k = \\ = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{\dot{B}_{0j}}{d_{kj}} - \frac{B_{0j} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^2} - \frac{(R_j^3 \dot{\mathbf{p}}_j \mathbf{C}_{10kj})'}{2d_{kj}^2} - \frac{9B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{C}_{01kj} \beta_{110})}{4d_{kj}^2} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1, s \neq j}^K \frac{(R_j^3 B_{0s} \mathbf{C}_{01js} \mathbf{C}_{10kj})'}{2d_{kj}^2 d_{js}^2} + \sum_{s=1, s \neq k}^K \frac{9B_{0j} B_{0s} \mathbf{C}_{01kj} (\mathbf{C}_{01ks} \beta_{110})}{8d_{kj}^2 d_{ks}^2} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_k \ddot{\mathbf{p}}_k + 3\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k - 2\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k (\boldsymbol{\varepsilon}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211}) - \frac{7\dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{a}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211})}{6} - \frac{3\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{a}}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211})}{2} + \\
 + \psi_{1k} = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{3(R_k B_{0j} \mathbf{C}_{01kj})'}{d_{kj}^2} - \frac{3(R_k R_j^3 \dot{\mathbf{p}}_j \mathbf{C}_{11kj})'}{2d_{kj}^3} - \right. \\
 \left. - \frac{6R_k B_{0j} \mathbf{C}_{01kj} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^3} - \frac{5R_k B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{C}_{02kj} \boldsymbol{\beta}_{211})}{d_{kj}^3} + \right. \\
 \left. + \frac{3(B_{0j} \mathbf{C}_{01kj} (\mathbf{a}_{2k} \boldsymbol{\Upsilon}_{211}^2))'}{2d_{kj}^2} - \frac{B_{0j} (\dot{\mathbf{a}}_{2k} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{2k}) (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\beta}_{121})}{d_{kj}^2} \right], \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_k \ddot{\mathbf{a}}_{mk} + 3\dot{R}_k \dot{\mathbf{a}}_{mk} - (m-1)\ddot{R}_k \mathbf{a}_{mk} - \delta_{2m} \frac{27\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\beta}_{112})}{8} + \\
 + \frac{3}{2} \sum_{n=m-1}^{m+1} \left(\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{a}}_{nk} \boldsymbol{\Upsilon}_{n1m}^2) - \frac{(m+1)(\dot{\mathbf{a}}_{nk} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{nk}) (\dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\beta}_{1nm})}{(n+1)} + \right. \\
 \left. + \ddot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{a}_{nk} \boldsymbol{\Upsilon}_{n1m}^{2(2-m)/3}) \right) + \frac{(m^2-1)(m+2)\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{mk}}{\rho_0 R_k} + \psi_{mk} = \\
 = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[-\frac{3(2m-1)(m+1)R_k^{m-2} B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{C}_{0m-1kj} \boldsymbol{\beta}_{m-11m})}{2m d_{kj}^m} + \right. \\
 \left. + \frac{(2m+1)(R_k^m B_{0j} \mathbf{C}_{0mkj})'}{d_{kj}^{m+1}} + \sum_{n=m-1}^{m+1} \left(\frac{3(B_{0j} \mathbf{a}_{nk} (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\Upsilon}_{1nm}^2))'}{2d_{kj}^2} - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{3(m+1)B_{0j} (\dot{\mathbf{a}}_{nk} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{nk}) (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\beta}_{1nm})}{2(n+1)d_{kj}^2} \right) \right]. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Здесь штрихи и точки сверху означают дифференцирование по времени, $k = 1, 2, \dots, K$, $m = 2, 3, \dots, N$, $\mathbf{p}_k = (p_k^{-1}, p_k^0, p_k^1)$, $p_k^{-1} = (x_k + iy_k)/2$, $p_k^0 = z_k$, $p_k^1 = (x_k - iy_k)/2$, x_k, y_k, z_k – координаты центра k -го пузырька, $\boldsymbol{\varepsilon}_{nk} = \mathbf{a}_{nk}/R_k$, d_{kj} – расстояние между центрами k -го и j -го пузырьков, p_k – давление газа в k -м пузырьке, δ_{nm} – символ Кронекера, $B_{0k} = -R_k^2 \dot{R}_k$; $\mathbf{C}_{\gamma\varsigma kj} = (C_{\gamma\varsigma kj}^{\zeta\xi})$, $\boldsymbol{\beta}_{\gamma\varsigma\varrho} = (\beta_{\gamma\varsigma\varrho}^{\zeta\xi\vartheta})$ – матрицы, в которых $\zeta = -\gamma, -\gamma+1, \dots, \gamma$, $\xi = -\varsigma, -\varsigma+1, \dots, \varsigma$, $\vartheta = \varrho, \varrho-1, \dots, -\varrho$,

$$C_{\gamma\varsigma kj}^{\zeta\xi} = (-1)^{\gamma+(|\zeta|+|\xi|-|\zeta-\xi|)/2} \frac{(\gamma+\varsigma-|\zeta-\xi|)!}{(\gamma-|\zeta|)!(\varsigma+|\xi|)!} Y_{\gamma+\varsigma}^{\zeta-\xi}(\theta_{kj}, \varphi_{kj}),$$

$$\beta_{\gamma\varsigma\varrho}^{\zeta\xi\vartheta} = \frac{\gamma(\gamma+1) + \varsigma(\varsigma+1) - \varrho(\varrho+1)}{2} \alpha_{\gamma\varsigma\varrho}^{\zeta\xi\vartheta},$$

$$\alpha_{\gamma\varsigma\varrho}^{\zeta\xi\vartheta} = \frac{2\varrho+1}{4\pi} \frac{(\varrho-|\vartheta|)!}{(\varrho+|\vartheta|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta Y_\gamma^\zeta(\theta, \varphi) Y_\varsigma^\xi(\theta, \varphi) Y_\varrho^\vartheta(\theta, \varphi) d\theta d\varphi,$$

$\theta_{kj}, \varphi_{kj}$ – угловые координаты центра j -го пузырька в сферической системе с началом отчета в центре k -го, $\boldsymbol{\Upsilon}_{\gamma\varsigma\varrho}^p = p\boldsymbol{\alpha}_{\gamma\varsigma\varrho} - \boldsymbol{\beta}_{\gamma\varsigma\varrho}$.

Эффекты вязкости и сжимаемости жидкости описываются без учета взаимодействия между пузырьками, поэтому поправки ψ_{0k} , ψ_{1k} , ψ_{mk} и Δ_k определяются следующим образом:

$$\psi_{0k} = \frac{4\nu \dot{R}_k}{R_k}, \quad \psi_{1k} = \frac{12\nu \dot{\mathbf{p}}_k}{R_k}, \quad \psi_{mk} = \frac{2(m+1)\nu}{R_k} \left((m+2)\dot{\mathbf{a}}_{mk} + 2(m-1)\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{mk} \right),$$

$$\Delta_k = -\frac{\dot{R}_k}{c_0} \left(R_k \ddot{R}_k + \frac{\dot{R}_k^2}{2} + \frac{p_k - p_\infty}{\rho_0} \right) - \frac{R_k}{c_0} \left(\frac{\dot{p}_k - \dot{p}_\infty}{\rho_0} - \frac{4\nu \ddot{R}_k}{R_k} \right),$$

где $\nu = \mu/\rho_0$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Теплообмен между пузырьками и жидкостью учитывается с применением подхода работы [20], согласно которому выражение для давления газа в пузырьках p_k записывается в следующем виде:

$$p_k = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0k}} \right) \left(\frac{R_{0k}}{R_k} \right)^3 \frac{T_k}{T_0}, \quad (4)$$

где температура газа T_k находится из дифференциального уравнения

$$\dot{T}_k = \frac{3(1 - \Gamma_k) \dot{R}_k T_k}{R_k} + \frac{3\chi_k (T_0 - T_k)}{R_k^2}. \quad (5)$$

Здесь $\Gamma_k(\text{Pe}_k) = 1 + (\kappa - 1) \exp[-5.8(\text{Pe}_k)^{-0.6}]$, $\text{Pe}_k = (R_k U_k)/\chi_k$ – число Пекле, U_k – характерная скорость свободных колебаний адиабатического пузырька

$$U_k = \sqrt{\dot{R}_k^2 + \frac{2p_0}{3\rho_0} \left\{ 1 + \frac{1}{\kappa - 1} \left(\frac{R_{0k}}{R_k} \right)^3 \left[\left(\frac{R_{0k}}{R_k} \right)^{3\kappa - 3} - \kappa \right] \right\}},$$

$\chi_k = \varkappa_k/(\rho_k c_v)$, \varkappa_k – коэффициент теплопроводности, ρ_k – плотность газа. Полагается, что $\varkappa_k = \varkappa_0 (T_k/T_0)^{0.5}$, $\rho_k = \rho_{0k} (R_{0k}/R_k)^3$, где $\rho_{0k} = p_{0k}/(R_g T_0)$ – начальная плотность газа, $p_{0k} = p_0 + 2\sigma/R_{0k}$ – начальное давление газа, R_g – газовая постоянная.

При использовании выражения (4) для определения давления в пузырьках в правых частях уравнений для радиусов пузырьков (1) возникает зависимость от температуры T_k , а к системе уравнений (1)–(3) добавляется еще K уравнений вида (5). Решение системы (1)–(3), (5) находится численно при заданных начальных значениях R_k , \dot{R}_k , p_k , \dot{p}_k , a_{mk} , \dot{a}_{mk} и T_k .

3. Результаты

Основные закономерности взаимодействия пузырьков в рассматриваемых конфигурациях и режимах акустического воздействия иллюстрирует рис. 2. На этом рисунке представлены временные зависимости ряда характеристик для двух конфигураций (рис. 1) при внешнем возбуждении с амплитудой $p_a = 1.13$ бар и частотой $\omega/2\pi = 20$ кГц.

В настоящей работе рассматриваются режимы, в которых амплитуда колебаний давления жидкости p_a значительно превышает статическое давление p_0 . В результате этого на начальной стадии взаимодействия пузырьки сначала сильно расширяются, а затем в фазе положительного давления жидкости стремительно сжимаются, после чего наступает стадия их радиальных пульсаций, затухающих к концу периода (рис. 2, *a*). Давление внутри пузырьков изменяется синхронно с их радиусами (рис. 2, *b*): при расширении пузырьков давление в их полости падает, а при сжатии – возрастает. Так, при первом расширении давление внутри центрального пузырька уменьшается на 2 порядка, а при последующем коллапсе возрастает на 4 порядка.

В результате гидродинамического взаимодействия периферийные пузырьки перемещаются в сторону центрального, при этом в силу симметрии конфигурации центральные пузырьки остаются неподвижными. Наибольшее за период смещение

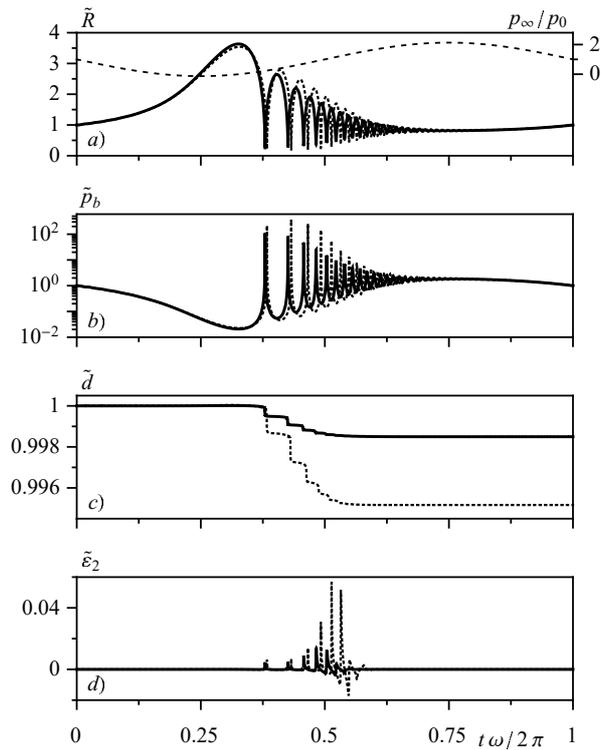


Рис. 2. Изменение безразмерных радиуса центрального пузырька $\tilde{R} = R/R_0$ (а, сплошная и пунктирная кривые), давления в его полости $\tilde{p}_b = p_b/p_{b0}$ (b), расстояния между центрами центрального и ближайших к нему (расположенных на первой окружности от центра) пузырьков $\tilde{d} = d/d_0$ (c) и амплитуды деформаций центрального пузырька по второй сферической гармонике $\tilde{\varepsilon}_2$ (d) в ходе одного периода колебаний давления жидкости p_∞ (а, штриховая кривая) с амплитудой $p_a = 1.13$ бар и частотой $\omega/2\pi = 20$ кГц. Сплошные кривые соответствуют конфигурации, отмеченной на рис. 1 цифрой I, а пунктирные – конфигурации, отмеченной цифрой III

периферийных пузырьков наблюдается при первых сжатиях (рис. 2, c). Последующие пространственные перемещения в ходе затухающих радиальных колебаний концу периода практически исчезают.

Взаимодействие пузырьков приводит к деформированию как центрального, так и боковых пузырьков. Во всех конфигурациях деформации неподвижного центрального пузырька оказываются меньше, чем у смещающихся к нему боковых. Для центрального пузырька максимальными оказываются деформации по второй гармонике (рис. 2, d), что соответствует эллипсоидальным отклонениям его поверхности от сферической вдоль прямой, перпендикулярной плоскости центров пузырьков. Всплески деформаций возникают в окрестности интенсивных радиальных пульсаций, а в начале и в конце периода пузырьки оказываются практически сферическими.

Из рис. 2 следует, что динамика центральных пузырьков в рассматриваемых конфигурациях оказывается качественно подобной, при этом имеются некоторые количественные различия. Так, на стадии понижения давления жидкости центральный пузырек по мере увеличения числа соседних расширяется немного меньше и коллапсирует позже (рис. 2, a). В результате этого и дальнейшего довольно сложного гидродинамического взаимодействия на стадии затухающих пульсаций

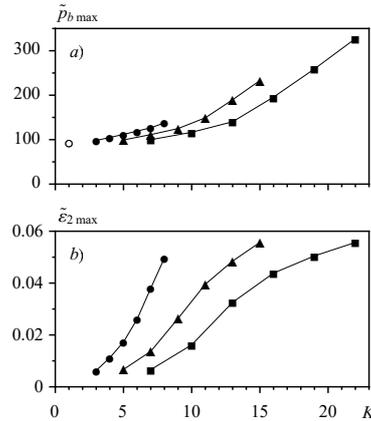


Рис. 3. Зависимости от количества пузырьков K максимального безразмерного давления в центральном пузырьке $\tilde{p}_{b \max}$ (a) и максимальных деформаций его поверхности $\tilde{\epsilon}_2 \max$ (b) за один период колебаний давления жидкости с амплитудой $p_a = 1.13$ бар и частотой $\omega/2\pi = 20$ кГц. Закрашенные кружки соответствуют конфигурациям с одной окружностью (рис. 1, первая строка), треугольники – с двумя (рис. 1, вторая строка), квадратики – с тремя (рис. 1, третья строка). Полым кружком указано максимальное за период давление в случае одиночного пузырька

пузырьков наблюдается некоторое увеличение амплитуды и смещение фазы колебаний их радиусов. Такие изменения в радиальной динамике, обусловленные влиянием большего количества соседних пузырьков, приводят, в свою очередь, к более сильному сжатию центрального пузырька (рис. 2, b) и к большим деформациям его поверхности (рис. 2, d), а также к росту скорости пространственных смещений периферийных пузырьков (рис. 2, c).

Рис. 3 иллюстрирует зависимости максимального за период давления в центральном пузырьке и амплитуды его эллипсоидальных деформаций от количества и расположения соседних пузырьков. Видно, что с увеличением числа пузырьков на окружностях при фиксированном их количестве степень сжатия центрального пузырька и его несферические деформации монотонно возрастают, а с увеличением количества окружностей при фиксированном числе пузырьков, наоборот, убывают. Так, максимальное давление в центральном пузырьке при наличии 21 соседних пузырьков, расположенных на трех концентрических окружностях, уже в более чем в три раза превышает его значение в случае одиночного пузырька. Отметим также наличие перегиба у кривых деформаций (рис. 3, a). Его появление обусловлено тем, что максимальные за период значения амплитуды несферичности пузырьков могут достигаться в ходе периода не только при первом коллапсе центрального пузырька, но и при следующих за ним коллапсах (рис. 2).

На рис. 4 представлены зависимости максимальных за период значений давления в центральном пузырьке и величины его эллипсоидальных деформаций от амплитуды (при фиксированной частоте) и частоты (при фиксированной амплитуде) акустического воздействия для конфигурации пузырьков, отмеченной на рис. 1 цифрой II. Видно, что при увеличении амплитуды воздействия на всем рассматриваемом интервале максимальное давление монотонно возрастает, а при увеличении частоты, наоборот, убывает. В отличие от этого величина максимальных деформаций изменяется немонотонно. При повышении амплитуды от 1.1 до 1.13 бар и частоты от 15 до 25 кГц она возрастает, а затем при увеличении амплитуды от 1.13 до 1.14 бар и частоты от 25 до 30 кГц она убывает.

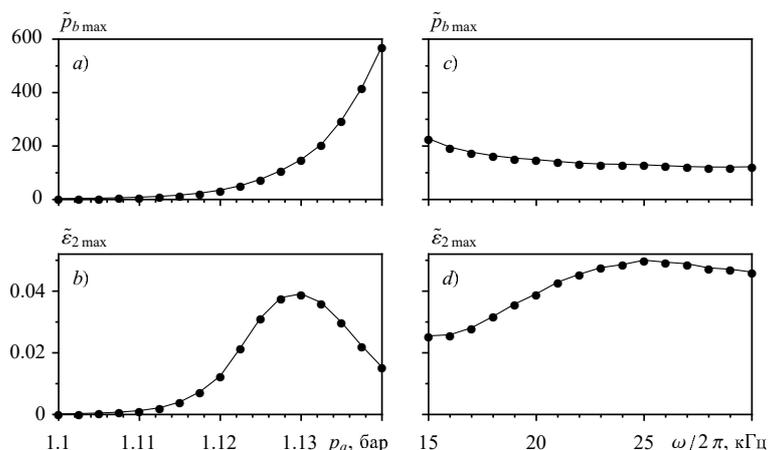


Рис. 4. Зависимость от амплитуды (*a*, *b* – при частоте $\omega/2\pi = 20$ кГц) и частоты (*c*, *d* – при амплитуде $p_a = 1.13$ бар) акустического возбуждения максимального безразмерного давления в центральном пузырьке $\tilde{p}_{b \max}$ (*a*, *c*) и максимальных деформаций его поверхности $\tilde{\epsilon}_{2 \max}$ (*b*, *d*) за один период акустического воздействия в случае конфигурации, отмеченной на рис. 1 цифрой II

Заключение

Исследована динамика взаимодействующих газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле. Рассмотрены плоские конфигурации взаимного расположения пузырьков, в которых один из них находится в центре, а другие расположены на лежащих в одной плоскости концентрических окружностях. Количество окружностей варьируется от одного до трех, а число пузырьков на них – от двух до семи. Основное внимание было уделено на изучение динамики центрального пузырька.

Использовалась математическая модель, в которой совместная динамика пузырьков описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков, радиус-векторов их центров, характеризующих малое отклонение их поверхностей от сферической, и температур в их полостях. Учитывались поверхностное натяжение, эффекты вязкости и сжимаемости жидкости, теплообмена между пузырьками и жидкостью. Газ в пузырьках предполагался идеальным с однородным распределением давления.

Установлен ряд закономерностей влияния гидродинамического взаимодействия пузырьков на их динамику в зависимости от частоты и амплитуды акустического воздействия, числа пузырьков, их взаимного расположения. Выявлены особенности такого влияния на радиальные пульсации пузырьков, их пространственные смещения и малые деформации поверхностей пузырьков. В частности, показано, что степень сжатия центрального пузырька и его несферические деформации возрастают как с увеличением количества окружающих пузырьков, так и с уменьшением числа окружностей, на которых расположены эти пузырьки. Выявлено, что максимальное за период внешнего возбуждения давление в центральном пузырьке монотонно зависит от амплитуды и частоты колебаний акустического воздействия, а аналогичные зависимости величины максимальных за период деформаций поверхности центрального пузырька являются немонотонными.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00214).

Литература

1. *Bjerknes V.F.K.* Field of Force. – N. Y.: Columbia Univ. Press., 1906. – 106 p.
2. *Mettin R., Akhatov I., Parlitz U., Ohl C.D., Lauterborn W.* Bjerknes force between small cavitation bubbles in a strong acoustic field // *Phys. Rev. E.* – 1997. – V. 56, No 3. – P. 2924–2931. – doi: 10.1103/PhysRevE.56.2924.
3. *Кузнецов Г.Н., Щёкин И.Е.* Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // *Акуст. журн.* – 1972. – Т. 18, Вып. 4. – С. 565–570.
4. *Doimikov A.A.* Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2004. – V. 116, No 2. – P. 821–827. – doi: 10.1121/1.1768255.
5. *Konovalova S., Akhatov I.* Structure formation in acoustic cavitation // *Multiphase Sci. Technol.* – 2005. – V. 17, No 3. – P. 343–371. – doi: 10.1615/MultScienTechn.v17.i4.30.
6. *Аганин И.А., Давлетшин А.И.* Динамика газовых пузырьков при акустическом возбуждении // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 448–461.
7. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Уточненная модель пространственного взаимодействия сферических газовых пузырьков // *Изв. УНЦ РАН.* – 2016. – № 4. – С. 9–13.
8. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Взаимодействие сферических пузырьков с центрами на одной прямой // *Матем. моделирование.* – 2013. – Т. 25, № 12. – С. 3–18.
9. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учётом их малой несферичности // *Матем. моделирование.* – 2009. – Т. 21, № 6. – С. 89–102.
10. *Аганин А.А., Давлетшин А.И., Топорков Д.Ю.* Деформация расположенных в линию кавитационных пузырьков при их сильном расширении-сжатии // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 67–78.
11. *Губайдуллин А.А., Губкин А.С.* Исследование динамики пузырькового кластера // *Вестн. Тюмен. гос. ун-та.* – 2013. – № 7. – P. 91–97.
12. *Губайдуллин А.А., Губкин А.С.* Особенности динамического поведения пузырьков в кластере, вызванные их гидродинамическим взаимодействием // *Теплофизика и аэромеханика.* – 2015. – Т. 22, № 4. – С. 471–480.
13. *Kieser B., Phillion R., Smith S., McCartney T.* The application of industrial scale ultrasonic cleaning to heat exchangers // *Proc. Int. Conf. on Heat Exchanger Fouling and Cleaning.* – 2011. – P. 336–338.
14. *Mason T.J.* Ultrasonic cleaning: An historical perspective // *Ultrason. Sonochem.* – 2016. – V. 29. – P. 519–523. – doi: 10.1016/j.ultsonch.2015.05.004.
15. *Suslick K.S.* Sonochemistry // *Science.* – 1990. – . 247, No 4949. – P. 1439–1445. – doi: 10.1126/science.247.4949.1439.
16. *Miller D.L., Quddus J.* Diagnostic ultrasound activation of contrast agent gas bodies induces capillary rupture in mice // *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* – 2000. – V. 97, No 18. – P. 10179–10184. – doi: 10.1073/pnas.180294397.
17. *Seemann S., Hauff P., Schultze-Mosgau M., Lehmann C., Reszka R.* Pharmaceutical evaluation of gas-filled microparticles as gene delivery system // *Pharm. Res.* – 2002. – V. 19, No 3. – P. 250–257. – doi: 10.1023/A:1014430631844.
18. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Equations of interaction of weakly non-spherical gas bubbles in liquid // *Lobachevskii J. Math.* – 2018. – V. 39, No 8. – P. 1047–1052. – doi: 10.1134/S1995080218080024.

19. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Деформации взаимодействующих газовых пузырьков в жидкости при акустическом воздействии // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 657–669.
20. *Hilgenfeldt S., Grossmann S., Lohse D.* Sonoluminescence light emission // Phys. Fluids. – 1999. – V. 11, No 6. – P. 1318–1330. – doi: 10.1063/1.869997.

Поступила в редакцию
20.02.2020

Давлетшин Анас Ильгизович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: anas.davletshin@gmail.com

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 2, pp. 148–159

doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.148-159

Acoustically Excited Interaction of Gas Bubbles in a Liquid with Centers Located on a Plane

A.I. Davletshin

*Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia
E-mail: anas.davletshin@gmail.com*

Received February 20, 2020

Abstract

The hydrodynamic interaction of weakly non-spherical gas bubbles in a liquid was made in the case of the bubbles located in the antinode of an intense ultrasonic standing wave, where the pressure varies harmonically. The influence of the interaction on the radial pulsations of the bubbles, their spatial displacements, and the deformations of their surfaces were investigated. Various mutual arrangements of bubbles, in which one of the bubbles is in their center and the others are evenly distributed on a series of concentric circles in a plane, were under consideration.

A system of ordinary second-order differential equations in the radii of the bubbles, the position-vectors of their centers, the vectors characterizing small arbitrary deviation of the shape of the bubbles from a spherical one, and the temperatures in the bubbles was applied. The effects of the surface tension, the liquid viscosity and compressibility, the heat transfer between the bubbles, and the liquid were taken into account. The gas in the bubbles was assumed ideal with a uniform pressure.

A number of features of influence of the interaction between the bubbles on their dynamics were found, depending on the number of the bubbles, their relative position, as well as the frequency and the amplitude of the acoustic excitation. In particular, it was shown that

the rate of compression of the central bubble and its nonspherical deformations increase both with an increase in the number of the surrounding bubbles and with a decrease in the number of the circles, on which the surrounding bubbles are located. It was revealed that in the central bubble, the maximum pressures over one period of the acoustic excitation monotonously depend on the amplitude and the frequency of the acoustic excitation, whereas similar dependences of the maximum values of the deformation of the central bubble are nonmonotonic.

Keywords: gas bubbles in liquid, acoustic field, hydrodynamic interaction, bubble deformation

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-31-00214).

Figure Captions

Fig. 1. Considered configurations of bubbles with centers on a plane. Roman numerals I–III indicate the configurations studied in this work in more detail.

Fig. 2. Time-variation of the dimensionless radius of the central bubble $\tilde{R} = R/\tilde{R}_0$ (a , solid and dotted curves), the pressure in its cavity $\tilde{p}_b = p_b/p_{b0}$ (b), the distance $\tilde{d} = d/d_0$ between the centers of the central bubble and the nearest one (located on the first circle from the center) (c), and the amplitude of deformations the central bubble in the form of the second spherical harmonic $\tilde{\varepsilon}_2$ (d) during one period of the liquid pressure oscillations p_∞ (a , dashed curve) with the amplitude $p_a = 1.13$ bar and the frequency $\omega/2\pi = 20$ kHz. The solid and dotted curves correspond to the configurations marked in Fig. 1 with numbers I and III, respectively.

Fig. 3. The dependences, on the number of bubbles K , of the maximum dimensionless pressure in the central bubble $\tilde{p}_{b\max}$ (a) and the maximum deformations of its surface $\tilde{\varepsilon}_{2\max}$ (b) over one period of the liquid pressure oscillations with the amplitude $p_a = 1.13$ bar and the frequency $\omega/2\pi = 20$ kHz. The dots, triangles, and squares correspond to the configurations with one (Fig. 1, the first line), two (Fig. 1, the second line), three (Fig. 1, the third line) circles, respectively. The open circle indicates the maximum pressure over a period in the case of a single bubble.

Fig. 4. The maximum dimensionless pressure in the central bubble $\tilde{p}_{b\max}$ (a , c) and the maximum deformations of its surface $\tilde{\varepsilon}_{2\max}$ (b , d) over one period of the acoustic excitation in the case of the configuration marked in Fig. 1 with number II as functions of the amplitude p_a (a , b , $\omega/2\pi = 20$ kHz) and the frequency $\omega/2\pi$ (c , d , $p_a = 1.13$ bar) of the acoustic excitation.

References

1. Bjerknes V.F.K. *Field of Force*. New York, Columbia Univ. Press., 1906. 106 p.
2. Mettin R., Akhatov I., Parlitz U., Ohl C.D., Lauterborn W. Bjerknes force between small cavitation bubbles in a strong acoustic field. *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 56, no. 3, pp. 2924–2931. doi: 10.1103/PhysRevE.56.2924.
3. Kuznetsov G.N., Shchekin I.E. Interaction of pulsating bubbles in a viscous fluid. *Akust. Zh.*, 1972, vol. 18, no. 4, pp. 565–570. (In Russian)
4. Doinikov A.A. Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2004, vol. 116, no. 2, pp. 821–827. doi: 10.1121/1.1768255.
5. Konovalova S., Akhatov I. Structure formation in acoustic cavitation. *Multiphase Sci. Technol.*, 2005, vol. 17, no. 3, pp. 343–371. doi: 10.1615/MultScienTechn.v17.i4.30.
6. Aganin I.A., Davletshin A.I. Dynamics of gas bubbles under acoustic excitation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 448–461. (In Russian)

7. Aganin A.A., Davletshin A.I. A refined model of spatial interaction of spherical gas bubbles. *Izv. Ufim. Nauchn. Tsentra Ross. Akad. Nauk.*, 2016, no. 4, pp. 9–13. (In Russian)
8. Aganin A.A., Davletshin A.I. Interaction of spherical bubbles with centers located on the same line. *Mat. Model.*, 2013, vol. 25, no. 12, pp. 3–18. (In Russian)
9. Aganin A.A., Davletshin A.I. Simulation of interaction of gas bubbles in a liquid with allowing for their small asphericity. *Mat. Model.*, 2009, vol. 21, no. 6, pp. 89–102. (In Russian)
10. Aganin A.A., Davletshin A.I., Toporkov D.Yu. Deformation of cavitation bubbles arranged in a line during their strong expansion-compression. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 67–78. (In Russian)
11. Gubaidullin A.A., Gubkin A.S. Investigation of bubbles in a cluster dynamics. *Vestn. Tyumen. Gos. Univ.*, 2013, no. 7, pp. 91–97. (In Russian)
12. Gubaidullin A.A., Gubkin A.S. Peculiarities of the dynamic behavior of bubbles in a cluster caused by their hydrodynamic interaction. *Thermophys. Aeromech.*, 2015, vol. 22, no. 4, pp. 453–462. doi: 10.1134/S086986431504006X.
13. Kieser B., Phillion R., Smith S., McCartney T. The application of industrial scale ultrasonic cleaning to heat exchangers. *Proc. Int. Conf. on Heat Exchanger Fouling and Cleaning*, 2011, pp. 336–338.
14. Mason T.J. Ultrasonic cleaning: An historical perspective. *Ultrason. Sonochem.*, 2016, vol. 29, pp. 519–523. doi: 10.1016/j.ultsonch.2015.05.004.
15. Suslick K.S. Sonochemistry. *Science*, 1990, vol. 247, no. 4949, pp. 1439–1445. doi: 10.1126/science.247.4949.1439.
16. Miller D.L., Quddus J. Diagnostic ultrasound activation of contrast agent gas bodies induces capillary rupture in mice. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2000, vol. 97, no. 18, pp. 10179–10184. doi: 10.1073/pnas.180294397.
17. Seemann S., Hauff P., Schultze-Mosgau M., Lehmann C., Reszka R. Pharmaceutical evaluation of gas-filled microparticles as gene delivery system. *Pharm. Res.*, 2002, vol. 19, no. 3, pp. 250–257. doi: 10.1023/A:1014430631844.
18. Aganin A.A., Davletshin A.I. Equations of interaction of weakly non-spherical gas bubbles in liquid. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 8, pp. 1047–1052. doi: 10.1134/S1995080218080024.
19. Aganin A.A., Davletshin A.I. Deformation of interacting gas bubbles in liquid under acoustic excitation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 657–669. (In Russian)
20. Hilgenfeldt S., Grossmann S., Lohse D. Sonoluminescence light emission. *Phys. Fluids*, 1999, vol. 11, no. 6, pp. 1318–1330. doi: 10.1063/1.869997.

Для цитирования: Давлетшин А.И. Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле с центрами на одной плоскости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 2. – С. 148–159. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.148-159.

For citation: Davletshin A.I. Acoustically excited interaction of gas bubbles in a liquid with centers located on a plane. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 148–159. doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.148-159. (In Russian)