УДК 519.63+517.958:532

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

И.Б. Бадриев, И.Н. Исмагилов,
Л.Н. Исмагилов, Г.И. Мухамадуллина

Аннотация

Работа посвящена методам численного решения стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации с предельным градиентом. Задача фильтрации сформулирована в виде вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу выпуклых собственных функционалов. Для решения вариационного неравенства предлагается использовать итерационный метод расщепления, позволяющий находить приближенные значения как давления жидкости, так и скорости фильтрации. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: теория подземной фильтрации, анизотропный закон фильтрации, вариационное неравенство, обратно сильно монотонный оператор, итерационный процесс.

Введение

Рассматривается стационарная задача фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации с предельным градиентом. Требуется определить поля давления и скорости фильтрации, удовлетворяющие уравнению неразрывности и смешанным однородным граничным условиям. Обобщенная постановка формулируется в виде вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором (см. [1, с. 243]) относительно поля давлений. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу выпуклых собственных функционалов, каждый из которых является суперпозицией выпуклого липшиц-непрерывного функционала и линейного непрерывного оператора.

В работах [2, 3] доказана теорема существования решения этого вариационного неравенства. Кроме того, доказано существование поля скоростей фильтрации, построенного согласно многозначному закону по решению вариационного неравенства, удовлетворяющего уравнению неразрывности. При этом остается открытым вопрос о построении указанного поля скоростей фильтрации на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации.

Для решения вариационного неравенства использован предложенный в [4] итерационный метод расщепления, каждый шаг которого сводится фактически к решению краевой задачи для уравнения с линейным сильно эллиптическим оператором. В настоящей работе установлено, что данный метод позволяет определять приближенные значения не только давления, но и скорости фильтрации. Метод расщепления реализован численно. Результаты численных экспериментов для модельных задач фильтрации свидетельствуют об эффективности итерационного метода.

1. Постановка задачи

Изучается установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. Фильтрация происходит в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$, с липщиц-непрерывной границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes} \Gamma_2 > 0$. Рассматривается краевая задача

$$\operatorname{div} v(x) = \widetilde{f}\,(x) \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$(v(x), \mathbf{n}) = 0,\ x \in \Gamma_1, \quad u(x) = 0,\ x \in \Gamma_2 \tag{2}$$

($\widetilde{f}$ – заданная функция, характеризующая плотность внешних источников, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к Γ_1) в предположении, что фильтрующаяся жидкость удовлетворяет многозначному закону фильтрации

$$v_l(x) \in -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{kl}^{(i)} g_i \left(D_i^2(u(x)) \right) \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где $D_i^2(u) = (\Upsilon_i \nabla u, \nabla u)$, $\Upsilon_i = \left\{\alpha_{k\,l}^{(i)}\right\}_{k,\,l=1}^n$, $\xi \to g_i(\xi^2)\,\xi$ – функции, определяющие закон фильтрации.

Предполагаем, что $g_i(\xi^2)\xi = g_{i\,0}(\xi^2)\,\xi + \vartheta_i\, H(\xi - \gamma_i)$, где $\xi \to g_{i\,0}(\xi^2)\xi$ – однозначные функции, удовлетворяющие условиям ($i = 1, 2, \ldots, n$)

$$g_{i\,0}(\xi^2)\,\xi = 0 \ \text{ при } \ \xi \leq \beta_i, \quad \beta_i \geq 0 - \text{предельные градиенты}, \tag{4}$$

$$c_{1\,i}\,(\xi - \beta_i) \leq g_{i\,0}(\xi^2)\,\xi \leq c_{2\,i}\,\xi, \ \ \xi \geq \beta_i, \ \ c_{1\,i}, c_{2\,i} > 0, \tag{5}$$

$$\xi \to g_{i\,0}(\xi^2)\,\xi \text{ возрастают при } \xi > \beta_i\,, \tag{6}$$

$$|\, g_{i\,0}(\xi^2)\,\xi - g_{i\,0}(\zeta^2)\,\zeta\,| \leq c_{3\,i}\,|\,\xi - \zeta\,| \qquad \forall \xi, \zeta \geq 0, \tag{7}$$

H – многозначная функция Хевисайда:

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ [\,0, 1\,]\,, & \xi = 0, \\ 1, & \xi > 0, \end{cases}$$

$\vartheta_i \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$ – заданные постоянные.

Легко видеть, что $H(\xi)$ – субдифференциал функции μ,

$$\mu(t) = t^+ = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \geq 0, \end{cases}$$

в точке ξ:

$$\mu(\zeta) - \mu(\xi) \geq \xi^*\,(\,\zeta - \xi\,) \qquad \forall\, \zeta \in R^1,\ \forall\, \xi^* \in H(\xi).$$

Относительно коэффициентов $\alpha_{k\,l}^{(i)}$ считаем, что для всех $i, k, l = 1, 2, \ldots, n$

$$\alpha_{kl}^{(i)} = \alpha_{lk}^{(i)}, \quad \sum_{k,\,l=1}^{n} \alpha_{kl}^{(i)}\,\xi_k\,\xi_l \geq c_{4i} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2, \quad c_{4\,i} > 0,\ \alpha_{k\,l}^{(i)} \leq c_{5\,i}. \tag{8}$$

Обозначим

$$(\xi, \zeta)_i = (\Upsilon_i\,\xi, \zeta) = \sum_{k,\,l=1}^{m} \alpha_{kl}^{(i)}\,\xi_k\,\zeta_l, \tag{9}$$

В силу условий (8) соотношение (9) порождает скалярное произведение в R^n. Поэтому для любых функций $u,\,\eta$ имеют место неравенства

$$(\Upsilon_i \nabla u, \nabla\eta) \le D_i(u)\, D_i(\eta), \quad D_i^2(u) \le c_{6\,i}\, |\nabla u|^2,\; c_{6\,i} > 0,\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

В работе [2] установлено, что если u и v – решение этой (1)–(3), то функция u удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int\limits_\Omega \widetilde{f}\,(x)\, \eta(x)\, dx \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega g_{i\,0}\left(D_i^2(u(x))\right)\left(\nabla u(x),\, \nabla\eta(x)\right)_i dx +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \vartheta_i \int\limits_\Omega \Big[\, \mu\left(D_i(u(x)+\eta(x)) - \gamma_i\right) - \mu\left(D_i(u(x)) - \gamma_i\right)\Big]\, dx \quad \forall\, \eta \in C^\infty_{\Gamma_2}(\Omega), \tag{10}$$

где $C^\infty_{\Gamma_2}(\Omega)$ – множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, равных нулю в окрестности Γ_2.

Пусть $V = \left\{\eta \in W_2^1(\Omega) : \eta = 0, x \in \Gamma_2\right\}$ – пространство Соболева со скалярным произведением

$$(u, \eta)_V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \left(\Upsilon_i \nabla u, \nabla\eta\right) dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \left(\nabla u, \nabla\eta\right)_i dx.$$

Обозначим

$$a_i(u, \eta) = \int\limits_\Omega g_{i\,0}\,\left(D_i^2(u(x))\right)\left(\nabla u(x),\, \nabla\eta(x)\right)_i dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из (4), (5) следует, что формы $a_i(\cdot,\cdot)$ ограничены по второму аргументу, а значит, порождают операторы $A_i : V \to V$ по формулам

$$(A_i u, \eta)_V = a_i(u, \eta) = \int\limits_\Omega g_{i\,0}\left(D_i^2(u)\right)\left(\Upsilon_i \nabla u, \nabla\eta\right) dx \quad u,\, \eta \in V.$$

Определим теперь оператор $A_0 : V \to V$ следующим образом:

$$(A_0 u, \eta)_V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (A_i u, \eta)_V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega g_{i\,0}\left(D_i^2(u)\right)\left(\Upsilon_i \nabla u, \nabla\eta\right) dx. \tag{11}$$

Далее, обозначив $\Omega_{iu} = \{x \in \Omega : D_i(u(x)) > \gamma_i\}$, имеем

$$\Big|\int\limits_\Omega \mu\left(D_i(u(x)) - \gamma_i\right)\, dx\Big| = \int\limits_{\Omega_{iu}} \left(D_i(u(x)) - \gamma_i\right)\, dx \le [\,\mathrm{mes}\,\Omega\,]^{1/2}\, \|u\|_V,$$

то есть на V определены функционалы F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, по формулам

$$F_i(u) = \frac{1}{n}\,\vartheta_i \int\limits_\Omega \mu\left(D_i(u(x)) - \gamma_i\right)\, dx = \frac{1}{2\,n}\int\limits_\Omega \int\limits_0^{D_i^2(u)} g_{i\,1}(\xi)\, d\xi dx.$$

Таким образом, в соответствии с (10) под решением стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации, будем понимать функцию $u \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства

$$(A_0 u - f, \eta - u)_V + \sum_{i=1}^{n} F_i(\eta) - \sum_{i=1}^{n} F_i(u) \geq 0 \quad \forall \eta \in V, \tag{12}$$

где элемент $f \in V$ определяется по формуле $(f, \eta)_V = \int\limits_\Omega \widetilde{f}\,(x)\,\eta(x)\,dx$.

Вариационное неравенство (12) может быть записано в виде:

$$(A_0 u - f, \eta - u)_V + \sum_{i=1}^{n} G_i\big(B_i \eta\big) - \sum_{i=1}^{n} G_i\big(B_i u\big) \geq 0 \quad \forall \eta \in V, \tag{13}$$

где $F_i = G_i \circ B_i$, функционалы G_i определены на $Y = \big[L_2(\Omega)\big]^n$ по формулам

$$G_i(z) = \frac{1}{n}\,\vartheta_i \int\limits_\Omega \mu\left(|z| - \beta_i\right)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и являются выпуклыми, липшиц-непрерывными, $B_i = \Upsilon_i^{1/2}\,\nabla : V \to Y$ – линейные, непрерывные операторы.

Отметим, что исходная постановка задачи фильтрации (1)–(3) сформулировна в терминах полей давлений u и скоростей фильтрации, в то время как обобщенная постановка (13) – в терминах поля давлений u. Тем не менее справедлива (см. [2])

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4)–(8). *Тогда вариационное неравенство* (13) *имеет непустое, выпуклое, замкнутое множество решений.*

Если u – решение вариационного неравенства (13)*, то существует функция $v \in Y$ такая, что почти всюду на Ω выполнены включения* (3)*, и имеет место уравнение неразрывности*

$$\int\limits_\Omega (v(x), \nabla\eta(x))\,dx = \int\limits_\Omega \widetilde{f}\,(x)\,\eta(x)\,dx \quad \forall \eta \in C^{\infty}_{\Gamma_2}(\Omega).$$

При этом остается открытым вопрос о построении указанного поля скоростей фильтрации на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации (когда $D_i(u(x)) = \beta_i$).

2. Итерационный метод

Для решения вариационного неравенства (13) рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть $w^{(0)} \in V$, $y_i^{(0)} \in Y$, $\lambda_i^{(0)} \in Y$, $i = 0, 1, \ldots, n$, – произвольные элементы. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, зная $y_i^{(k)}$, $\mu_i^{(k)}$, определим $u^{(k+1)}$ как

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} - \tau\big[A_0 u^{(k)} + r \sum_{i=1}^{n} B_i^* B_i u^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} B_i^*\big(\lambda_i^{(k)} - r y_i^{(k)}\big)\big]. \tag{14}$$

Затем находим $y_i^{(k+1)} = rB_i w^{(k+1)} + \lambda^{(k)}$, решая задачи минимизации

$$\begin{aligned} r\,\big(\,y_i^{(k+1)},\, z_i - y_i^{(k+1)}\,\big)_Y + G_i(z_i) - G_i\big(y_i^{(k+1)}\,\big) \geq \\ \geq \big(\,r\,B_i w^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)},\, z_i - y_i^{(k+1)}\,\big)_Y \quad \forall z_i \in Y, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{15}$$

Наконец вычисляем $\lambda_i^{(k+1)}$ по формуле

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + r\big[\, B_i w^{(k+1)} - y_i^{(k+1)}\,\big], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Здесь $\tau > 0$ и $r > 0$ – итерационные параметры, $B_i^* : Y \to V$ – сопряженные к B_i операторы:

$$(B_i^* y_i, \eta)_V = (y_i, B_i \eta)_Y \quad \forall\, \eta \in V,\ y_i \in Y.$$

Обозначим через Y^n прямое произведение n пространств Y и введем в рассмотрение гильбертово пространство $Q = V \times Y \times Y$ со скалярным произведением

$$(\cdot,\cdot)_Q = \frac{(1 - n\tau\, r)}{\tau}\, (\cdot,\cdot)_V + r \sum_{i=1}^{n} (\cdot,\cdot)_Y + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} (\cdot,\cdot)_Y,$$

Рассмотрим оператор $T : Q \to Q$, ставящий в соответствие вектору $q = (q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{2n}) = (u, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ вектор $Tq = \big\{\, T_0 q, T_1 q, \ldots, T_{2n} q\,\big\}$ следующим образом:

$$T_0 q = q_0 - \tau \Big[\, A_0 q_0 - f + r \sum_{i=1}^{n} B_i^* B_i\, q_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i^* \big(q_{n+i} - r\, q_i \,\big) \Big],$$

$$T_i q = \operatorname{Prox}_{G_i/r} \Big(B_i\, T_0 q + \frac{1}{r}\, q_i \Big), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$T_{n+i}\, q = q_{n+i} + r\, \big[\, B_i\, T_0 q - T_i q \,\big], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь $\operatorname{Prox}_G : Z \to Z$ – проксимальное отображение [5, с. 48], сопоставляющее каждому элементу p из гильбертова пространства Z элемент $v = \operatorname{Prox}_G(p)$, являющийся решением задачи минимизации

$$\frac{1}{2}\, \big\|\, w - p \,\big\|_Z^2 + G(w) = \min_{z \in Z} \Big\{\, \frac{1}{2}\, \big\|\, z - p \,\big\|_Z^2 + G(z) \,\Big\},$$

которая эквивалентна [5, с. 48] в случае, когда G – выпуклый, собственный, полунепрерывный снизу функционал, вариационному неравенству

$$(w - p, z - w)_Z + G(z) - G(w) \geq 0 \quad \forall\, z \in Z. \tag{17}$$

Используя определение проксимального отображения в виде вариационного неравенства (17), легко установить, что итерационный процесс (14)–(16) может быть записан в следущем виде:

$$\begin{cases} q^{(0)} - \text{произвольный элемент}, \\ q^{(k+1)} = T q^{(k)}, \\ q^{(k)} = \Big(u^{(k)}, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}, \lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)} \Big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{18}$$

то есть T – оператор перехода этого итерационного процесса.

Справедлива (см. [4])

Теорема 2. *Точка $q = (u, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ является неподвижной точкой оператора T в том и только в том случае, когда*

$$y_i = B_i u, \quad \lambda_i \in \partial G_i(B_i u), \quad i = 1, 2 \ldots, n, \quad -\sum_{i=1}^{n} B_i^* \lambda_i = A_0 u - f.$$

При этом первая компонента u любой неподвижной точки оператора T является решением задачи (13).

Из теорем 1, 2 вытекает, что справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (4)–(8). *Тогда множество неподвижных точек оператора* T *не пусто.*

Кроме того, в [4] доказана

Теорема 4. *Пусть* $A_0 : V \to V$ *– обратно сильно монотонный оператор с константой* $\sigma_0 > 0$,

$$0 < \tau < \frac{2\,\sigma_0}{2\,n\,\sigma_0\,r + 1}\,,$$

задача (13) *имеет по крайней мере одно решение. Тогда итерационная последовательность* $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (18), *сходится слабо в* Q *при* $k \to +\infty$, *ее предел* $\widehat{q} = (\widehat{u}, \widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_n, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n)$ *является неподвижной точкой оператора* T, *и справедливы равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| y_i^{(k)} - B_i\, u^{(k)} \right\|_Y = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \lim_{k\to+\infty} \left\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \right\|_Q = 0.$$

Как следует из теоремы 1, задача (13) имеет по крайней мере одно решение. В [3] установлено, что при выполнении условий (4)–(7) операторы A_i являются обратно сильно монотонными, а значит, обратно сильно монотонным будет и оператор A_0, задаваемый соотношением (11). Поэтому для итерационного процесса (14)–(16) решения рассматриваемых задач фильтрации справедлива теорема 4 о сходимости этого процесса. При этом согласно теореме 2 имеем, что при $k \to +\infty$ последовательность $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ сходится слабо в V (а значит, сильно в $L_2(\Omega)$) к некоторому решению $\widehat{u}$ вариационного неравенства (13), последовательности $\left\{y_i^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ и $\left\{\lambda_i^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ сходятся слабо в Y к $B_i\,\widehat{u}$ и $\widehat{\lambda}_i$, $i = 1, 2 \ldots, n$, причем

$$\widehat{\lambda}_i \in \partial G_i\,(B_i\,\widehat{u}), \quad i = 1, 2 \ldots, n, \tag{19}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} B_i^*\widehat{\lambda}_i = A_0\,\widehat{u} - f. \tag{20}$$

Рассмотрим реализацию метода (14)–(16) для задачи фильтрации. Для определения $u^{(k+1)}$ по формуле (14) необходимо сначала решенить краевую задачу для эллиптического уравнения с положительно определенным самосопряженным оператором:

$$\begin{cases} Rs = f - A_0 u^{(k)} + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i^*(\lambda_i^{(k)} - r p_i^{(k)}) + n\,r\,Ru^{(k)}, & x \in \Omega, \\ (s(x), \mathbf{n}) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad s(x) = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases}$$

где $R = -\operatorname{div} \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \Upsilon_{\mathrm{i}} \nabla$, а затем положить $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau s$. Вычисления по формуле (16) проводятся явным образом. Наконец, как показано в [6], решение задач минимизации (15) также может быть найдено явным образом:

$$y_i^{(k+1)} = g_{i\,r}^*\,(\,|t|^2\,)\,t, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $t = r\,B_i\,u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)}$,

$$g_{i\,r}^*(\xi^2)\xi = \begin{cases} \xi/r, & \xi \le r\,\gamma_i, \\ \gamma_i, & r\,\beta_i < \xi \le r\,\gamma_i + \vartheta_i/n, \\ (\xi - \vartheta_i/n)/r, & \xi > r\,\gamma_i + \vartheta_i/n. \end{cases}$$

Далее, поскольку функционалы F_i выпуклы и непрерывны, то в силу Предложения 5.6 [5, с. 35]

$$\partial\Big(\sum_{i=1}^{n} F_i(u)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \partial F_i(u) = \sum_{i=1}^{n} \partial G_i(B_i u).$$

Проводя рассуждения, подобные содержащимся в [7], имеем, что в точке u субдифференциал функционала F_i есть множество линейных непрерывных на V функционалов l_i вида

$$(l_i u, \eta)_V = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\chi_{iu}(x)}{D_i(u(x))}\, (\nabla u(x), \nabla \eta(x))_i \, dx \quad \eta \in V,$$

где $\chi_{iu} \in L_\infty(\Omega)$, $\chi_{iu}(x) \in \vartheta_i\, H(\, D_i(u(x)) - \beta_i\,)$. Поэтому в силу (19) $\widehat{\lambda}_i = \chi_{i\widehat{u}}$, $\chi_{i\widehat{u}}(x) \in \vartheta_i\, H(\, D_i(\widehat{u}(x)) - \beta_i\,)$, следовательно, с учетом определения сопряженного оператора B_i^* соотношение (20) запишется в виде

$$\int\limits_{\Omega} \widetilde{f}\,(x)\,\eta(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left[g_{i0}\left(D_i^2(\widehat{u}(x))\right) + \frac{\widehat{\lambda}_i(x)}{D_i(\widehat{u}(x))} \right] \big(\widehat{u}(x),\, \nabla\eta(x)\big)_i\, dx =$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{jl}^{(i)} \left[g_{i0}\left(D_i^2(\widehat{u}(x))\right) + \frac{\widehat{\lambda}_i(x)}{D_i(\widehat{u}(x))} \right] \frac{\partial \widehat{u}(x)}{\partial x_j}\, \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_l}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (v(x), \nabla\eta(x))\, dx,$$

где

$$v_l(x) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{j\,l}^{(i)} \left[g_{i\,0}\left(D_i^2(\widehat{u}(x))\right) + \frac{\widehat{\lambda}_i(x)}{D_i(\widehat{u}(x))} \right] \frac{\partial \widehat{u}(x)}{\partial x_j}, \quad l = 1, 2 \ldots, n,$$

Таким образом, в качестве приближенного значения скорости фильтрации на k-й итерации можно выбрать вектор $v^{(k)}$:

$$v_l^{(k)} = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{kl}^{(i)} \left[g_{i0}\left(|y_i^{(k)}|^2\right) + \frac{\lambda_i^{(k)}}{|y_i^{(k)}|} \right] y_i^{(k)}, \quad l = 1, 2 \ldots, n.$$

3. Численные эксперименты

Рассмотренный итерационный метод был реализован численно. Рассматривалось течение в двумерной области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, в центре которой находится скважина с дебитом $q = 2$, $\Gamma = \Gamma_2$. Матрицы Υ_i выбирались равными

$$\Upsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функции $\xi \to g_{i0}(\,\xi^2\,)\,\xi$ задавались соотношениями

$$g_{i0}(\,\xi^2\,)\xi = \begin{cases} 0, & \xi \le \beta_i\,, \\ \xi - \beta_i, & \xi \ge \beta_i, \end{cases} \quad \beta_1 = \gamma_1 = 1, \quad \beta_2 = \gamma_2 = 0.7.$$

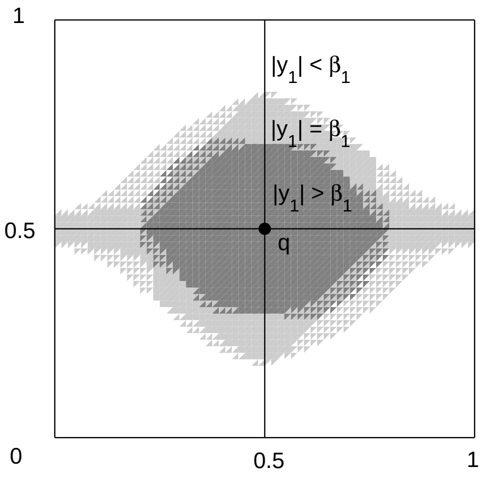

Рис. 1

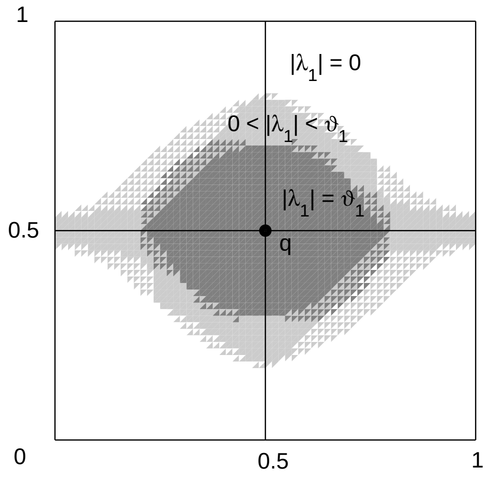

Рис. 2

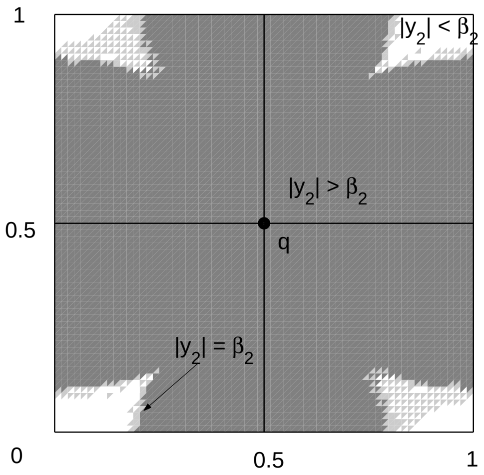

Рис. 3

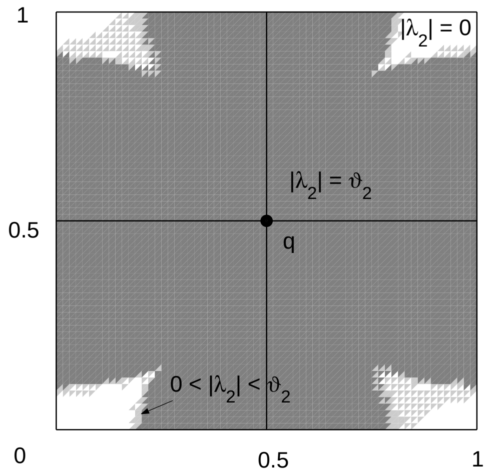

Рис. 4

Кроме того, полагалось $\vartheta_1 = 1,\ \vartheta_2 = 0.7$. Предварительно строилась конечноэлементная аппроксимация с помощью кусочно-линейных функций на треугольных элементах, построенных разбиением сторон квадрата на n_1 и n_2 равных частей и проведением диагоналей, параллельных биссектрисе первого и третьего координатных углов. Число разбиений составило $64{\times}64$. Критерием выхода из итерационного процесса являлось достижение относительной разностью значений приближенного решения на соседних итерациях заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$. Скважина моделировалась для конечноэлементных аппроксимаций сеточной дельта-функцией. Наименьшее количество итераций равнялось 57 при $\tau = 0.6,\ r = 0.5$.

На рис. 1–4 представлены результаты расчетов. На рис. 1, 3 светло-серым цветом помечены конечные элементы, на которых приближенные значения $|y_i| = D_i(u)$ отличаются от β_i на величину $5 \cdot 10^{-4}$, темно-серым и белым цветами – там, где эти значения соответственно больше β_i и меньше β_i. На рис. 2, 4 светло-серым цветом помечены конечные элементы, на которых приближенные значения $|\lambda_i|$ лежат на $(0, \vartheta_i)$, темно-серым и белым цветами – там, где эти значения соот-

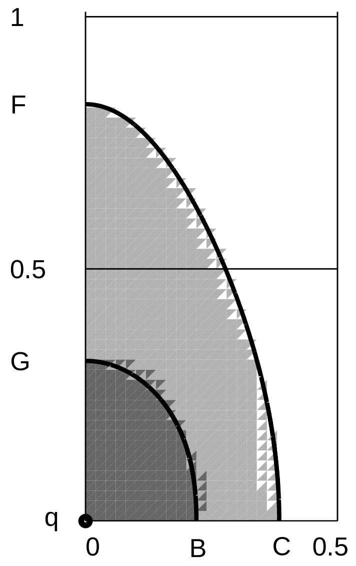

Рис. 5

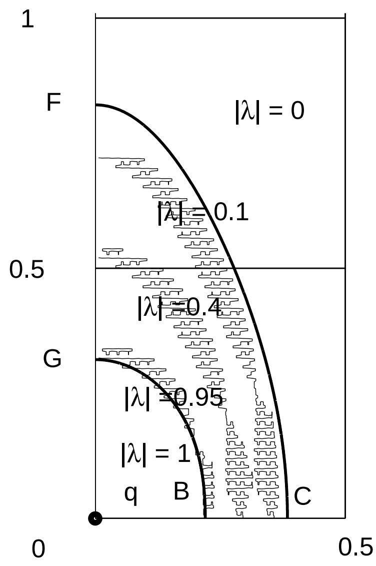

Рис. 6

ветственно равны ϑ_i и нулю. Таким образом, наблюдается согласно приведенным ранее рассуждениям соответствие между значениями y_i и λ_i.

Рассмотрена также модельная задача изотропной фильтрации (когда Υ_i – единичные матрицы, $g_i(\xi^2)\xi = g(\xi^2)\xi$, $\vartheta_i = \vartheta$, $\beta_i = \beta$, $\gamma_i = \gamma$, $i = 1, 2, \ldots, n$, интересная тем, что для нее известны границы областей Ω_γ, где модуль градиента давления равен заданному значению β. Рассматривается задача о цепочке скважин с расходом q, расположенных на одной прямой на расстоянии $2l$ друг от друга. В силу симметрии задачи можно ограничиться элементом течения, представляющим собой полуполосу $\{0 \le x_1 \le l,\, x_2 \ge 0\}$.

Рассматривался случай, когда (см., например, [8, с. 88, 95]):

$$g(\xi^2)\xi = \begin{cases} \alpha\,\xi, & 0 \le \xi < \beta, \\ [\alpha\,\beta,\ \beta] & \xi = \beta \\ \xi - \beta\,(1-\alpha), & \xi > \beta, \end{cases} \tag{21}$$

где $\alpha \in (0, 1)$. При этом очевидно, что $\vartheta = \gamma\,(1-\alpha)$.

При численном решении задачи полуполоса заменялась на конечную область $[0,1] \times [0, Z]$, $Z \gg 1$, на трех частях границы Γ_1 $(x_1 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0)$ которой задаются условия $(v, \mathbf{n}) = 0$, а на границе Γ_2, «отрезающей» бесконечность, задается однородное условие Дирихле $u = 0$. Скважина с расходом q расположена в точке O.

Для построения конечномерной аппроксимации задачи, как и выше, проводилась триангуляция области, полученная путем разбиения сторон Ω на n_1 и n_2 равных частей, построения треугольников с диагоналями, параллельными биссектрисе первого и третьего координатного углов, и применения метода конечных элементов с использованием кусочно-линейных на треугольниках функций. Критерием выхода из итерационного процесса являлось достижение относительной разностью значений приближенного решения на соседних итерациях заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$. При расчетах выбирались следующие значения входных параметров задачи: $\gamma = 1$, $\alpha = 0.4$, разбиение области $n_1 = 50$ и $n_2 = 500$, $Z = 10$. Наименьшее количество итераций равнялось 28 при $\tau = 0.7$, $r = 0.6$. Скважина моделировалась для конечноэлементных аппроксимаций сеточной дельта-функцией.

На рис. 5, 6 представлены результаты расчетов. Линии BG, CF на этих рисунках – границы зоны Ω_γ, построенные согласно аналитическим формулам (см. [9]). На рис. 5 светло-серым цветом выделена область, на которых модуль градиента приближенного решения (а фактически приближенные значения модуля $y = \Lambda u = \nabla u$) отличается от γ на величину $5 \cdot 10^{-4}$. На рис. 6 в указанной области приведены множества, соответствующие значениям $|\lambda|$, равным 0.95, 0.4 и 0.1.

Таким образом, результаты численных расчетов подтверждают теоретические выводы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00676, 08-01-00548, 09-01-00814, 09-01-97015).

Summary

I.B. Badriev, I.N. Ismagilov, L.N. Ismagilov, G.I. Mukhamadullina. Numerical Solving of Stationary Anisotropic Filtration Problems.

The paper is devoted to the methods of numerical solving of stationary filtration problems of non-compressible fluid following the nonlinear multi-valued anisotropic filtration law with limiting gradient. This problem is mathematically formulated in the form of variational inequality of the second kind in Hilbert space with inversely strongly monotone operator. The functional occurring in this variational inequality is a sum of several lower semi-continuous convex proper functionals. For the solution of the considered variational inequality the splitting method is offered. This method allows finding both the pressure and the filtration velocity. The results of numerical experiments are presented.

Key words: seepage theory, anisotropic filtration law, variational inequality, inversely strongly monotone operator, iterative process.

Литература

1. *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.* Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
2. *Бадриев И.Б., Исмагилов И.Н., Исмагилов Л.Н.* Метод решения нелинейных стационарных анизотропных задач фильтрации // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. – 2008. – № 3. – С. 3–11.
3. *Бадриев И.Б., Исмагилов И.Н.* Итерационные методы решения стационарных задач анизотропной фильтрации // Труды Средневолж. матем. о-ва. – 2006. – Т. 8, № 1. – С. 150–159.
4. *Исмагилов И.Н., Бадриев И.Б.* О сходимости итерационного метода решения вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2007. – Т. 149, кн. 4. – С. 90–100.
5. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
6. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н.* Применение метода декомпозиции для численного решения некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации // Исслед. по прикл. матем. и информ. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 12–24.

7. *Карчевский М.М., Бадриев И.Б.* Нелинейные задачи теории фильтрации с разрывными монотонными операторами // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР. – 1979. – Т. 10, № 5. – С. 63–78.

8. *Девликамов В.В., Хабибуллин З.А., Кабиров М.М.* Аномальные нефти. – М.: Недра, 1975. – 167 с.

9. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н., Скворцов Э.В.* Решение плоских задач фильтрации при многозначном законе фильтрации и наличии точечного источника // Прикл. матем. и механика. – 2009. – Т. 73, Вып 4. – С. 604–614.

Поступила в редакцию
05.07.09

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Ildar.Badriev@ksu.ru*

Исмагилов Ирек Наилевич – кандидат физико-математических наук, ведущий инженер Казанского государственного университета.

E-mail: *Irek.Ismagilov@mail.ru*

Исмагилов Линар Наилевич – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры экономической кибернетики Казанского государственного университета.

E-mail: *LIsmagil@ksu.ru*

Мухамадуллина Гузель Исламовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Guzel.Mukhamadullina@ksu.ru*