

УДК 539.3

## ДИНАМИКА КОНСОЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

*А.В. Иванчиков<sup>1</sup>, Д.В. Тарлаковский<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия*

<sup>2</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119192, Россия*

### Аннотация

Рассмотрена одномерная стационарная задача о динамике консольной круговой цилиндрической панели под действием нормального давления. Построены краевые задачи для различных моделей оболочек: Кирхгофа – Лява и Муштари – Донелла с растяжимой и нерастяжимой срединной поверхностью. Для указанных моделей исследована возможность аналитического построения системы собственных функций.

Для решения поставленной задачи предложено использовать интегральные представления с ядрами в виде функций Грина – решений краевых задач с давлением в виде дельта-функции Дирака. Построен аналитический алгоритм их вычисления при любой частоте колебаний. Он основан на численном (в случае моделей Кирхгофа – Лява и Муштари – Донелла с растяжимой срединной поверхностью) или точном (во всех остальных вариантах) решении характеристического уравнения, а также на построении общего решения краевой задачи в матричном виде. Приведены примеры расчетов динамики круговой цилиндрической панели под действием сосредоточенной силы (функций Грина) и равномерного давления.

Проведено сравнение различных моделей панели для сосредоточенной и равномерно распределенной нагрузок.

**Ключевые слова:** консольная круговая цилиндрическая панель, модель Кирхгофа – Лява, модель Муштари – Донелла, стационарная краевая задача, собственные функции, функции Грина

### Введение

Тонкостенные панели используются во многих областях техники, в том числе в качестве шумоизолирующих преград. Однако аналитические решения таких задач, как правило, удается построить только для пластин со специальными граничными условиями (шарнирное опирание, свободные края) или неограниченных преград, как, например, это сделано в основополагающих монографиях [1, 2], а также в статьях [3–8].

Необходимой составляющей решения задач о прохождении звуковых волн через преграды разных видов является исследование динамики самой панели. Напряженно-деформированное состояние пластин и панелей изучалось во многих работах (см., например, [9–14]). Однако в основном рассматривались статические задачи для пластин опять же со специальными граничными условиями, допускающими построение системы собственных функций с целью использования метода разделения переменных. В то же время динамика консольных криволинейных панелей практически не исследована. Этот вопрос на примере одномерных колебаний консольно закрепленной круговой цилиндрической панели и рассматривается ниже.

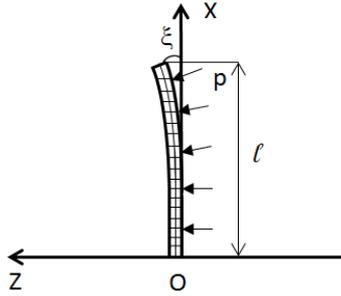


Рис. 1. Незамкнутая консольно закрепленная упругая цилиндрическая оболочка

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим незамкнутую консольно закрепленную упругую бесконечную в направлении образующей круговую цилиндрическую оболочку радиуса  $R$  и толщины  $h$ . Используем прямоугольную декартову систему координат  $Oxyz$  с началом в заделке и следующими осями:  $Oz$  нормальна срединной поверхности,  $Ox$  лежит в касательной плоскости, а  $Oy$  параллельна образующей срединной поверхности (рис. 1). Свободный край оболочки расположен на расстоянии  $l$  от плоскости  $Oyz$ . На оболочку действует изменяющееся во времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$  нормальное давление с амплитудой  $p$ .

Срединную поверхность оболочки зададим следующим образом:

$$\Pi : x = R \sin \xi, \quad z = \pm R(1 - \cos \xi), \quad y \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \xi \leq \beta, \quad \beta \leq \pi/4,$$

где  $\xi$  – угол между положительным направлением оси  $Ox$  и касательной плоскостью к поверхности  $\Pi$ .

Здесь и далее верхний знак соответствует вогнутой, а нижний – выпуклой в системе координат  $Oxz$  направляющей цилиндрической поверхности.

Достаточно просто показывается, что система координат  $\xi, y$ - является ортогональной, а соответствующие параметры Ламе  $H_1, H_2$ , единичный вектор  $\mathbf{n}$  внешней нормали и компоненты  $b_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , тензора кривизны определяются следующим образом [15]:

$$H_1 = R, \quad H_2 = 1, \quad \mathbf{n} = (\mp \sin \xi, 0, \cos \xi), \quad b_{11} = R, \quad b_{12} = b_{22} = 0.$$

Соответствующие краевые задачи относительно амплитудных значений неизвестных функций запишем для различных моделей оболочек [9-15], полагая, что  $p = p(\xi)$  (штрих обозначает производную по параметру  $\xi$ ).

**Модель А. Оболочка Кирхгофа – Лява:**

– уравнения движения

$$\rho h \omega^2 u + K_{11}(u) + K_{12}(w) = 0, \quad \rho h \omega^2 w + K_{21}(u) + K_{22}(w) + p = 0, \quad (1)$$

где

$$K_{11}(u) = \frac{B}{R^2} u'', \quad K_{12}(w) = -\frac{B}{R^2} w', \quad K_{21}(u) = \frac{B}{R^2} u', \quad B = h(\lambda + 2\mu),$$

$$K_{22}(w) = -\frac{1}{R^2} \left[ \frac{D}{R^2} (w^{IV} + 2w'') + Bw \right], \quad D = I(\lambda + 2\mu), \quad I = \frac{h^3}{12};$$

– краевые условия

$$u|_{\xi=0} = w|_{\xi=0} = 0, \quad (w' + u)|_{\xi=0} = 0; \quad (2)$$

$$(u' - w)|_{\xi=\beta} = 0, \quad (w'' + w)|_{\xi=\beta} = 0, \quad (w'' + w)'|_{\xi=\beta} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $u$  и  $w$  – тангенциальное и нормальное перемещения;  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $B$  и  $D$  – жесткости оболочки на растяжение-сжатие и на изгиб.

**Модель Б. Техническая теория Муштари – Донелла.** В этом случае уравнения движения в основном совпадают с (1). Необходимо только заменить  $K_{22}(w)$  следующим оператором:

$$K_{22}(w) = -\frac{1}{R^2} \left[ \frac{D}{R^2} (w^{IV} + w'') + Bw \right]. \quad (4)$$

Граничные условия совпадают с равенствами (2), (3).

**Модель В. Круговая цилиндрическая оболочка Кирхгофа – Лява с нерастяжимой срединной поверхностью.** Полагаем, что в модели А тангенциальная деформация  $\varepsilon = (u' - w)/R$ , что приводит к равенству:

$$u' = w.$$

Тогда первое уравнение в (1) сводится к естественному тривиальному равенству  $u = 0$ , а второе записывается в виде

$$\rho h \omega^2 w - \frac{D}{R^4} (w^{IV} + 2w'' + w) + p = 0. \quad (5)$$

Краевые условия для этого уравнения вытекают из (2) и (3):

$$w|_{\xi=0} = w'|_{\xi=0} = 0, \quad (w'' + w)|_{\xi=\beta} = 0, \quad (w'' + w)'|_{\xi=\beta} = 0. \quad (6)$$

**Модель Г. Техническая теория Муштари – Донелла с нерастяжимой срединной поверхностью.** Рассуждения, аналогично проведенные для модели В, приводят к уравнению

$$\rho h \omega^2 w - \frac{D}{R^4} (w^{IV} + w'') + p = 0. \quad (7)$$

и граничным условиям (6).

## 2. Собственные функции краевых задач для круговых цилиндрических оболочек

Традиционным подходом к решению типа построенных в разд. 1 краевых задач является разложение искомых функций в ряды по собственным функциям. При этом их желательно иметь в явном виде. Исследуем этот вопрос для всех рассмотренных выше моделей одномерного движения круговой цилиндрической оболочки.

**Модель А.** Собственные функции для системы уравнений (1) есть решение следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений ( $\alpha B/R^2$  – собственное значение):

$$\begin{pmatrix} K_{11} - \alpha B/R^2 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \alpha B/R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0. \quad (8)$$

Заменяя в (8) искомые функции  $u$  и  $w$  экспонентами  $U \exp(k\xi)$  и  $W \exp(k\xi)$ , приходим к бикубическому характеристическому уравнению:

$$\gamma^2 k^6 + \gamma^2 (2 - \alpha) k^4 + (1 - 2\gamma^2) \alpha k^2 - \alpha(1 + \alpha) = 0, \quad \gamma^2 = D/(BR^2). \quad (9)$$

Его аналитическое решение сложное, и определить явный вид собственных значений не представляется возможным.

**Модель Б.** Для этой модели характеристическое уравнение в соответствии с (3) и (4) также является бикубическим:

$$\gamma^2 k^6 + \gamma^2(1 - \alpha)k^4 + \alpha(1 - \gamma^2)k^2 - \alpha(\alpha + 1) = 0.$$

**Модель В.** В этом случае согласно (5) приходим к биквадратному уравнению

$$k^4 + 2k^2 + 1 = \alpha. \quad (10)$$

Оно имеет следующие корни:

$$k_1 = -k_3 = k_+ = \sqrt{\sqrt{\alpha} - 1}, \quad k_2 = -k_4 = k_- = \sqrt{-\sqrt{\alpha} - 1}. \quad (11)$$

**Модель Г.** С использованием (7) опять приходим к биквадратному уравнению

$$k^4 + k^2 = \alpha.$$

корни которого имеют вид

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}}, \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}},$$

$$k_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{-1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}}, \quad k_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{-1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}}.$$

Для последних двух вариантов можно в явном виде записать общее решение соответствующих дифференциальных уравнений. Однако их подстановка в граничные условия (6) приводит к сложным трансцендентным уравнениям относительно  $\alpha$ , которые исследовать затруднительно. Поэтому далее для моделей А–Г будем использовать другой подход к решению краевых задач.

### 3. Интегральное представление решения для круговой цилиндрической панели

**Модель А.** Решение краевой задачи (1)–(3) представляем в интегральном виде

$$u(\xi, \omega^2) = \int_0^\beta G_u(\xi, \zeta, \omega^2) p(\zeta) d\zeta, \quad w(\xi, \omega^2) = \int_0^\beta G_w(\xi, \zeta, \omega^2) p(\zeta) d\zeta. \quad (12)$$

Здесь  $G_u$  и  $G_w$  – функции Грина, которые удовлетворяют следующей уравнениям:

$$\rho h \omega^2 G_u + K_{11}(G_u) + K_{12}(G_w) = 0,$$

$$\rho h \omega^2 G_w + K_{21}(G_u) + K_{22}(G_w) + \delta(\xi - \zeta) = 0, \quad (13)$$

где  $\delta(\xi)$  – дельта-функция Дирака, и граничным условиям (2), (3).

Характеристическое уравнение для системы (13) следует из (9), где нужно положить  $\alpha B/R^2 = -\rho h \omega^2$ :

$$\gamma^2 k^6 + \gamma^2(2 + \eta^2 \omega^2)k^4 - (1 - 2\gamma^2)\eta^2 \omega^2 k^2 + \eta^2 \omega^2(1 - \eta^2 \omega^2) = 0, \quad \eta^2 = \rho h R^2/B. \quad (14)$$

При каждом фиксированном значении  $\omega^2$  это уравнение можно решить численно и найти корни (в общем комплексные):

$$k_{1,2} = \pm \kappa_1(\omega^2), \quad k_{3,4} = \pm \kappa_2(\omega^2), \quad k_{5,6} = \pm \kappa_3(\omega^2). \quad (15)$$

Соответствующие собственные векторы  $\gamma_j^\pm = (\gamma_{1j}^\pm, \gamma_{2j}^\pm)^T$ ,  $j = 1, 2, 3$ , согласно (8) есть нетривиальные решения следующих уравнений:

$$[\kappa_j^2(\omega^2) + \eta^2\omega^2] \gamma_{1j}^\pm = \pm \gamma_{2j}^\pm \kappa_j(\omega^2),$$

где  $\kappa_j$  – корни уравнения (14) с положительной действительной частью. Отсюда получаем

$$\gamma_j^\pm = (1, \pm \gamma_j(\omega^2))^T, \quad \gamma_j(\omega^2) = \frac{\kappa_1(\omega^2) + \eta^2\omega^2}{\kappa_j(\omega^2)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Следовательно, общее решение однородной системы уравнений, соответствующей (13), имеет вид

$$\begin{pmatrix} G_{u0} \\ G_{w0} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 [C_{j+} \gamma_j^+ e^{\kappa_j(\omega^2)\xi} + C_{j-} \gamma_j^- e^{-\kappa_j(\omega^2)\xi}], \quad (17)$$

где  $C_{j\pm}$  – произвольные постоянные.

Ее частное решение согласно методу вариации произвольных постоянных представляем в виде

$$\begin{pmatrix} G_{u*} \\ G_{w*} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 [D_{j+}(\xi, \zeta, \omega^2) \gamma_j^+ e^{\kappa_j(\omega^2)\xi} + D_{j-}(\xi, \zeta, \omega^2) \gamma_j^- e^{-\kappa_j(\omega^2)\xi}]. \quad (18)$$

Для определения функции  $D_{j+}(\xi, \zeta)$  и  $D_{j-}(\xi, \zeta)$  сначала с учетом (4) сводим систему (13) к системе первого порядка, которую записываем в матричном виде

$$\mathbf{G}' + \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{G} = (G_u, G_w, G'_w, G''_w, G'_u, G'''_w)^T, \quad \mathbf{F} = -\chi^{-2} \delta(\xi - \zeta) \varepsilon_6, \\ \varepsilon_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T, \quad \chi^2 = \frac{D}{R^4},$$

а матрица  $\mathbf{A} = (A_{ij})_{66}$  имеет следующие ненулевые элементы:

$$A_{15} = A_{23} = A_{34} = A_{46} = A_{53} = -1, \\ A_{51} = \eta^2\omega^2, \quad A_{62} = -\gamma^{-2}(\eta^2\omega^2 - 1), \quad A_{64} = 2, \quad A_{65} = -\gamma^{-2}, \quad \chi^2 = D/R^4.$$

К соответствующему виду приводим общее (17) и частное (18) решения:

$$\mathbf{G}_0(\xi, \zeta, \omega^2) = (G_{u0}, G_{w0}, G'_{w0}, G''_{w0}, G'_{u0}, G'''_{w0})^T = \mathbf{Y}(\xi, \omega^2) \mathbf{C}, \\ \mathbf{C} = (C_{1+}, C_{2+}, C_{3+}, C_{1-}, C_{2-}, C_{3-})^T; \quad (20)$$

$$\mathbf{G}_*(\xi, \zeta, \omega^2) = (G_{u*}, G_{w*}, G'_{w*}, G''_{w*}, G'_{u*}, G'''_{w*})^T = \mathbf{Y}(\xi, \omega^2) \mathbf{D}(\xi, \zeta, \omega^2), \\ \mathbf{D} = (D_{1+}, D_{2+}, D_{3+}, D_{1-}, D_{2-}, D_{3-})^T; \quad (21)$$

Здесь  $\mathbf{Y}(\xi, \omega^2)$  – фундаментальная матрица системы (13), которая в соответствии с (17) имеет вид

$$\mathbf{Y}(\xi, \omega^2) = \begin{pmatrix} E_{1+} & E_{2+} & E_{3+} & E_{1-} & E_{2-} & E_{3-} \\ \gamma_1 E_{1+} & \gamma_2 E_{2+} & \gamma_3 E_{3+} & -\gamma_1 E_{1-} & -\gamma_2 E_{2-} & -\gamma_3 E_{3-} \\ \gamma_1 \kappa_1 E_{1+} & \gamma_2 \kappa_2 E_{2+} & \gamma_3 \kappa_3 E_{3+} & \gamma_1 \kappa_1 E_{1-} & \gamma_2 \kappa_2 E_{2-} & \gamma_1 \kappa_3 E_{3-} \\ \gamma_1 \kappa_1^2 E_{1+} & \gamma_2 \kappa_2^2 E_{2+} & \gamma_3 \kappa_3^2 E_{3+} & -\gamma_1 \kappa_1^2 E_{1-} & -\gamma_2 \kappa_2^2 E_{2-} & -\gamma_1 \kappa_3^2 E_{3-} \\ \kappa_1 E_{1+} & \kappa_2 E_{2+} & \kappa_3 E_{3+} & -\kappa_1 E_{1-} & -\kappa_2 E_{2-} & -\kappa_3 E_{3-} \\ \gamma_1 \kappa_1^3 E_{1+} & \gamma_2 \kappa_2^3 E_{2+} & \gamma_3 \kappa_3^3 E_{3+} & \gamma_1 \kappa_1^3 E_{1-} & \gamma_2 \kappa_2^3 E_{2-} & \gamma_1 \kappa_3^3 E_{3-} \end{pmatrix}, \\ E_{j\pm} = E_{j\pm}(\xi, \omega^2) = \exp(\pm \kappa_j(\omega^2)\xi). \quad (22)$$

Подставляя (21) в (19), приходим к системе уравнений

$$\mathbf{Y}(\xi, \omega^2) \mathbf{D}'(\xi, \zeta, \omega^2) - \chi^{-2} \delta(\xi - \zeta) \varepsilon_6 = 0.$$

Ее решение записываем так:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'(\xi, \zeta, \omega^2) &= \frac{\delta(\xi - \zeta)}{\chi^2 W(\xi, \omega^2)} \mathbf{Z}^T(\xi, \omega^2) \varepsilon_6 = \frac{\delta(\xi - \zeta)}{\chi^2 W(\zeta, \omega^2)} \mathbf{Z}^T(\zeta, \omega^2) \varepsilon_6, \\ \mathbf{Z}(\zeta, \omega^2) &= (Y_{ij}(\zeta, \omega^2)), W(\zeta, \omega^2) = |\mathbf{Y}(\zeta, \omega^2)|, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $W(\zeta, \omega^2)$  – вронскиан фундаментальной системы решений системы (13);  $Y_{ij}$  – алгебраические дополнения к элементам матрицы  $\mathbf{Y}$ , стоящим в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце;  $\mathbf{Z}$  – присоединенная к  $\mathbf{Y}$  матрица.

Интегрируя (23), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\xi, \zeta, \omega^2) &= H(\xi - \zeta) \mathbf{d}(\zeta, \omega^2), \mathbf{d}(\zeta, \omega^2) = (d_{1+}, d_{2+}, d_{3+}, d_{1-}, d_{2-}, d_{3-})^T = \\ &= \frac{1}{\chi^2 W(\xi, \omega^2)} \mathbf{Z}_6^T(\zeta, \omega^2), \mathbf{Z}_6 = (Y_{61}, Y_{62}, Y_{63}, Y_{64}, Y_{65}, Y_{66}). \end{aligned} \quad (24)$$

Матричный вид общего решения неоднородной системы уравнений (12) с использованием (20), (21) и (24) записываем следующим образом:

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta, \omega^2) = \mathbf{G}_0(\xi, \zeta, \omega^2) + \mathbf{G}_*(\xi, \zeta, \omega^2) = \mathbf{Y}(\xi, \omega^2) [\mathbf{C} + \mathbf{D}(\xi, \zeta, \omega^2)]. \quad (25)$$

Постоянные  $C_{j\pm}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ , находим из граничных условий (2) и (3). Для этого сначала с использованием (25) получаем операторы от функций Грина, соответствующие следующим условиям:

$$\begin{aligned} (G_u, G_w, G'_w + G_u, G'_u - G_w, G''_w + G_w, G'''_w + G'_w)^T &= \\ &= \mathbf{Y}_b(\xi, \omega^2) [\mathbf{C} + H(\xi - \zeta) \mathbf{d}(\zeta, \omega^2)] = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{b11}(\xi, \omega^2) & \mathbf{Y}_{b12}(\xi, \omega^2) \\ \mathbf{Y}_{b21}(\xi, \omega^2) & \mathbf{Y}_{b22}(\xi, \omega^2) \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{C}_+ \\ \mathbf{C}_- \end{pmatrix} + H(\xi - \zeta) \begin{pmatrix} \mathbf{d}_+(\xi, \zeta, \omega^2) \\ \mathbf{d}_-(\xi, \zeta, \omega^2) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_b &= (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_5 - \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_6 + \mathbf{Y}_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{b11} & \mathbf{Y}_{b12} \\ \mathbf{Y}_{b21} & \mathbf{Y}_{b22} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_+ \\ \mathbf{C}_- \end{pmatrix}, \mathbf{C}_{\pm} = (C_{1\pm}, C_{2\pm}, C_{3\pm})^T, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_+ \\ \mathbf{d}_- \end{pmatrix}, \mathbf{d}_{\pm} = (d_{1\pm}, d_{2\pm}, d_{3\pm})^T, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\mathbf{Y}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , –  $i$ -я строка матрицы  $\mathbf{Y}$ .

Подставляя теперь (26) в граничные условия, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно  $C_{j\pm}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{b11}(0, \omega^2) \mathbf{C}_+ + \mathbf{Y}_{b12}(0, \omega^2) \mathbf{C}_- &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Y}_{b21}(\beta, \omega^2) \mathbf{C}_+ + \mathbf{Y}_{b22}(\beta, \omega^2) \mathbf{C}_- &= \mathbf{d}_-(\beta, \zeta, \omega^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Входящие в нее матрицы в соответствии с (22) и (27) записываются следующим образом:

$$\mathbf{Y}_{bkl}(\xi, \omega^2) = (Y_{bkl}^{ij}(\xi, \omega^2))_{3 \times 3}, \quad k, l = 1, 2; \quad \xi = 0, \beta,$$

где

$$\begin{aligned} Y_{b_{11}}^{1j}(0, \omega^2) &= Y_{b_{12}}^{1j}(0, \omega^2) = 1, Y_{b_{11}}^{2j}(0, \omega^2) = -Y_{b_{12}}^{2j}(0, \omega^2) = 1 + \gamma_j \kappa_j, \\ Y_{b_{11}}^{3j}(0, \omega^2) &= Y_{b_{12}}^{3j}(0, \omega^2) = 1 + \gamma_j \kappa_j, \\ Y_{b_{12}}^{1j}(\beta, \omega^2) &= (\kappa_j - 1)E_{j+}(\beta, \omega^2), Y_{b_{12}}^{2j}(\beta, \omega^2) = (\gamma_j \kappa_j^2 + 1)E_{j+}(\beta, \omega^2), \\ Y_{b_{12}}^{3j}(\beta, \omega^2) &= Y_{b_{22}}^{3j}(\beta, \omega^2) = \gamma_j \kappa_j (\gamma_j \kappa_j^2 + 1)E_{j+}(\beta, \omega^2), \\ Y_{b_{22}}^{1j}(\beta, \omega^2) &= -(\kappa_j + 1)E_{j-}(\beta, \omega^2), Y_{b_{22}}^{2j}(\beta, \omega^2) = (1 - \gamma_j \kappa_j^2)E_{j-}(\beta, \omega^2), \\ Y_{b_{12}}^{2j}(\beta, \omega^2) &= \gamma_j \kappa_j^2 (\gamma_j \kappa_j^2 + 1)E_{j+}(\beta, \omega^2); \end{aligned}$$

Таким образом, как следует из (17), (18) и (24), функции Грина определяются в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} G_u \\ G_w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G_{u0} \\ G_{w0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{u*} \\ G_{w*} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[ [C_{j+}(\omega^2) + H(\xi - \zeta)d_{j+}(\zeta, \omega^2)] \gamma_j^+(\omega^2) e^{\kappa_j(\omega^2)\xi} + \right. \\ &\quad \left. + [C_{j-}(\omega^2) + H(\xi - \zeta)d_{j-}(\zeta, \omega^2)] \gamma_j^-(\omega^2) e^{-\kappa_j(\omega^2)\xi} \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_j^+(\omega^2)$ ,  $\kappa_j(\omega^2)$  и  $d_{j\pm}(\zeta, \omega^2)$  находятся по формулам (15), (16) и (24), а  $C_{j\pm}(\omega^2)$  вычисляются как решения системы (28).

**Модель Б.** В этом варианте решение соответствующей краевой задачи также представляем в интегральном виде (12), где функции Грина  $G_u$  и  $G_w$  удовлетворяют той же краевой задаче (13)–(15). При этом необходимо заменить  $K_{22}(w)$  оператором (4).

Характеристическое уравнение системы в этом случае находится аналогично (14) из уравнения (10):

$$\gamma^2 k^6 + \gamma^2 (1 + \eta^2 \omega^2) k^4 - (1 - \gamma^2) \eta^2 \omega^2 k^2 + \eta^2 \omega^2 (1 - \eta^2 \omega^2) = 0.$$

Все дальнейшие выкладки аналогичны (15)–(29).

**Модель В.** Решение краевой задачи (5)–(6) представляем в интегральном виде

$$w(\xi, \omega^2) = \int_0^\beta G_w(\xi, \zeta, \omega^2) p(\zeta) d\zeta. \quad (30)$$

Здесь  $G_w$  – функция Грина, которая удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \rho h \omega^2 G_w - \frac{D}{R^4} (G_w^{IV} + 2G_w'' + G_w) + \delta(\xi - \zeta) &= 0, \\ G_w |_{\xi=0} = G_w' |_{\xi=0} = 0, \quad (G_w' + G_w) |_{\xi=\beta} = 0, \quad (G_w'' + G_w)' |_{\xi=\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее (31), вытекает из (11):

$$k^4 + 2k^2 + 1 + \eta^2 \omega^2 = 0.$$

Оно имеет следующие корни:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\sqrt{\eta^2 \omega^2 - 1}} = \pm \kappa_1(\omega^2), \quad k_{3,4} = \pm \sqrt{\sqrt{-\eta^2 \omega^2 - 1}} = \pm \kappa_2(\omega^2).$$

Функцию Грина в этом случае строим аналогично модели А. В результате получаем

$$G_w = \mathbf{Y}_0(\xi, \omega^2) [\mathbf{C} + \mathbf{d}(\zeta, \omega^2)H(\xi - \zeta)], \quad (32)$$

где

$$\mathbf{Y}_0(\xi, \omega^2) = (E_{1+}, E_{2+}, E_{1-}, E_{2-}), \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}(\omega^2)\mathbf{B}(\omega^2)\mathbf{d}(\zeta, \omega^2),$$

$$\mathbf{d}(\zeta, \omega^2) = \zeta^{-2}\mathbf{Y}^{-1}(\zeta, \omega^2)\varepsilon_4;$$

$$\mathbf{Y}(\xi, \omega^2) = \mathbf{Y}_0(\xi, \omega^2), \quad \mathbf{Y}_1(\xi, \omega^2), \quad \mathbf{Y}_2(\xi, \omega^2), \quad \mathbf{Y}_3(\xi, \omega^2),$$

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}'_0 = (\kappa_1 E_{1+}, \kappa_2 E_{2+}, -\kappa_1 E_{1-}, -\kappa_2 E_{2-}),$$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}'_1 = (\kappa_1^2 E_{1+}, \kappa_2^2 E_{2+}, \kappa_1^2 E_{1-}, \kappa_2^2 E_{2-}),$$

$$\mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}'_2 = (\kappa_1^3 E_{1+}, \kappa_2^3 E_{2+}, -\kappa_1^3 E_{1-}, -\kappa_2^3 E_{2-});$$

$$\mathbf{A}(\omega^2) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0(0, \omega^2) \\ \mathbf{A}_{01}(\beta, \omega^2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\omega^2) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{01}(\beta, \omega^2) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{01}(\xi, \omega^2) = \mathbf{A}_0(\xi, \omega^2) + \mathbf{A}_1(\xi, \omega^2),$$

$$\mathbf{A}_0(\xi, \omega^2) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_0(\xi, \omega^2) \\ \mathbf{Y}_1(\xi, \omega^2) \end{pmatrix}_{2 \times 4}, \quad \mathbf{A}_1(\xi, \omega^2) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_2(\xi, \omega^2) \\ \mathbf{Y}_3(\xi, \omega^2) \end{pmatrix}_{2 \times 4}.$$

**Модель Г.** Аналогично предыдущему пункту решение краевой задачи (6), (7), (17), (18) представляем в виде (30), где функция Грина  $G_w$  удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\rho h \omega^2 G_w - \frac{D}{R^4} (G_w^{IV} + G_w'') + \delta(\xi - \zeta) = 0,$$

$$G_w|_{\xi=0} = G_w'|_{\xi=0} = 0, \quad (G_w' + G_w)|_{\xi=\beta} = 0, \quad (G_w'' + G_w')|_{\xi=\beta} = 0.$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$k^4 + k^2 + \eta^2 \omega^2 = 0. \quad (33)$$

Функция Грина в этом случае определяется формулой (32), в которой корни уравнения (33) имеют вид

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-2 + 2\sqrt{1 - 4\eta^2 \omega^2}} = \pm \kappa_1(\omega^2), \quad k_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-2 - 2\sqrt{1 - 4\eta^2 \omega^2}} = \pm \kappa_2(\omega^2).$$

#### 4. Примеры расчетов

Положим, что материал панели – сталь [16] с плотностью  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ , модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.3$ , что соответствует следующим упругим постоянным Ламе [17]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 115 \text{ ГПа}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 77 \text{ ГПа}.$$

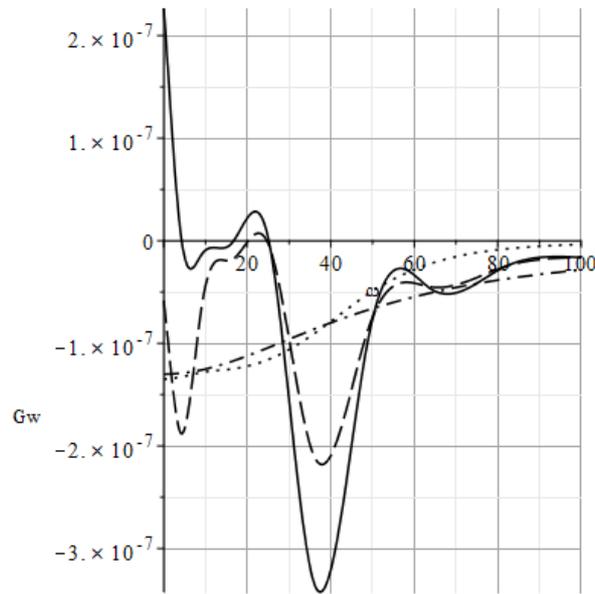


Рис. 2. Зависимость нормального перемещения (функции Грина) в точке  $\xi = \pi/6$  от  $\omega^2$  при действии единичной силы, приложенной в точке  $\zeta = \pi/7$ : сплошная кривая соответствует модели А, пунктирная – Б, точечная – В, пунктирная с точками – Г

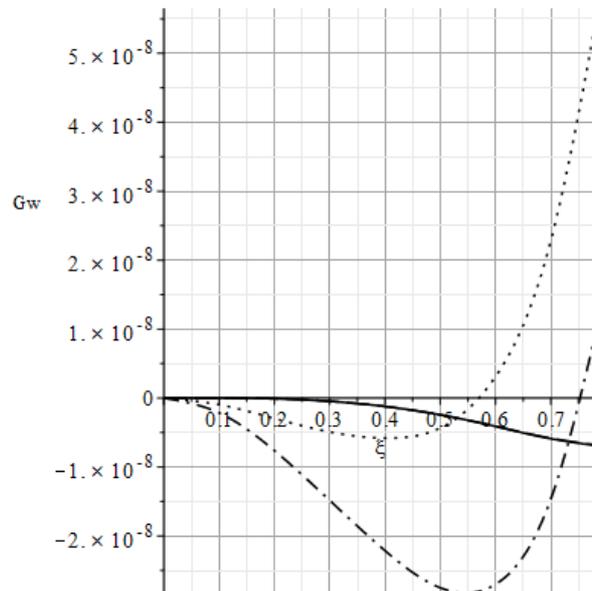


Рис. 3. Распределение нормального перемещения по координате  $\xi$  при действии единичной силы, приложенной в точке  $\pi/7$ , и  $\omega = 100$ : сплошная кривая соответствует модели А, пунктирная – Б, точечная – В, пунктирная с точками – Г

Геометрические параметры панели принимаем следующими:

$$R = 10 \text{ м}, \quad h/R = 1/20, \quad \beta = \pi/4.$$

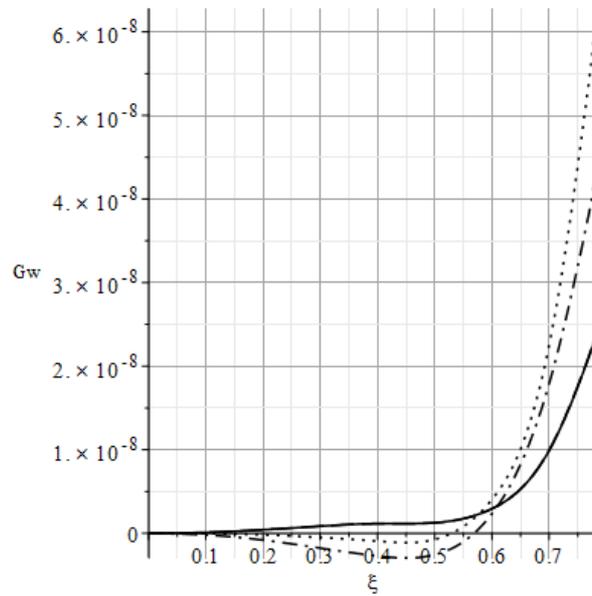


Рис. 4. Распределение нормального перемещения по координате  $\xi$  при действии единичной силы, приложенной в точке  $\pi/7$ , и  $\omega = 500$ : сплошная кривая соответствует модели А, пунктирная – Б, точечная – В, пунктирная с точками – Г

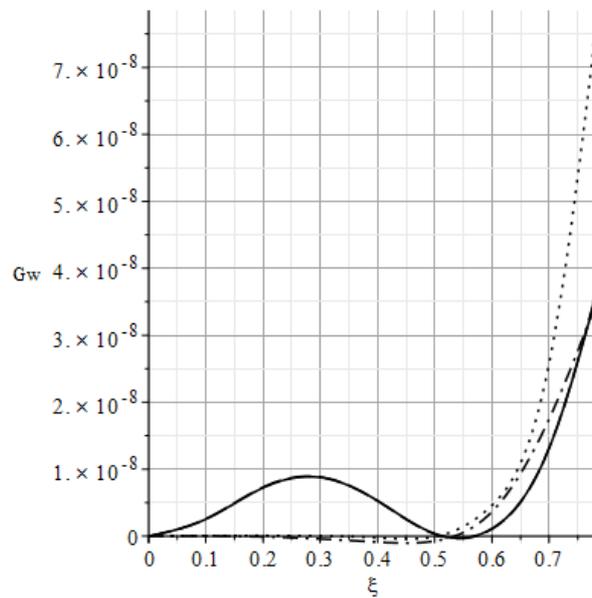


Рис. 5. Распределение нормального перемещения по координате  $\xi$  при действии единичной силы, приложенной в точке  $\pi/7$ , и  $\omega = 1000$ : сплошная кривая соответствует модели А, пунктирная – Б, точечная – В, пунктирная с точками – Г

Жесткости оболочки на растяжение-сжатие и изгиб находим по формулам в (1):

$$B = 1.346 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}, \quad D = 2.8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2.$$

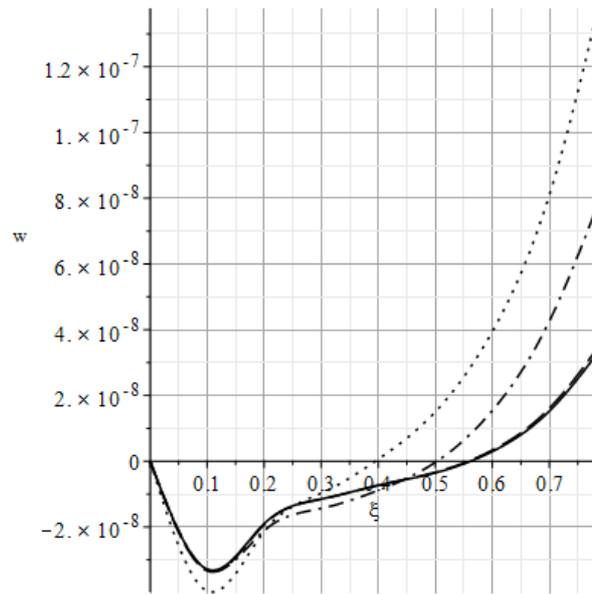


Рис. 6. Распределение нормального перемещения по координате  $\xi$  при действии равномерно распределенного по панели единичного давления и  $\omega = 100$ : сплошная кривая соответствует модели А, пунктирная – В, точечная – В, пунктирная с точками – Г

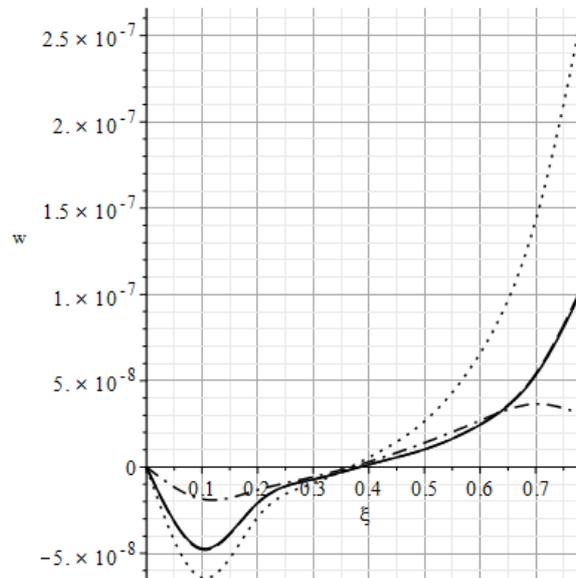


Рис. 7. Распределение нормального перемещения по координате  $\xi$  при действии равномерно распределенного по панели единичного давления и  $\omega = 500$ : сплошная кривая соответствует модели А, пунктирная – В, точечная – В, пунктирная с точками – Г

Для расчетов используются формулы разд. 3 для четырех вариантов теорий оболочек и пластины.

На рис. 2–5 изображено поведение функции Грина  $G_w$  при  $\xi = \pi/6$ ,  $\zeta = \pi/7$ , что соответствует нормальному перемещению в точке с координатой  $\xi = \pi/6$

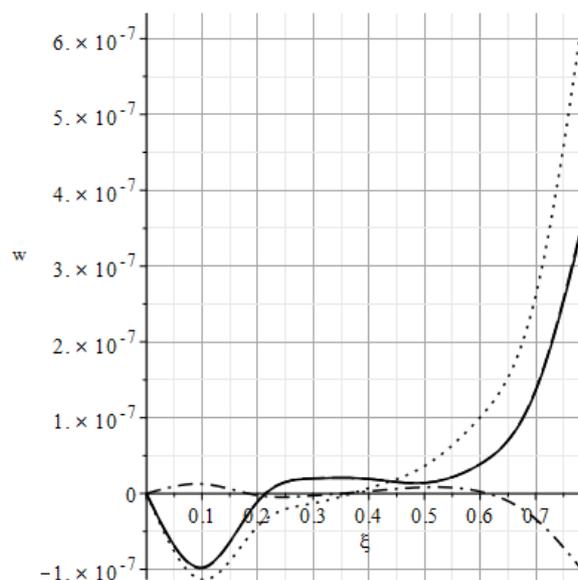


Рис. 8. Распределение нормального перемещения по координате  $\xi$  при действии равномерно распределенного по панели единичного давления и  $\omega = 1000$ : сплошная кривая соответствует модели А, пунктирная – В, точечная – В, пунктирная с точками – Г

при действии на панель единичной силы, сосредоточенной в точке  $\zeta = \pi/7$ . Кривые на рис. 2 соответствуют зависимости этой функции от квадрата частоты  $\omega^2$ , а рис. 3–5 – распределению нормального перемещения по координате  $\xi$  при частотах  $\omega = 100, 500$  и  $1000$  соответственно.

Рис. 6–8 аналогичны рис. 3–5 с той разницей, что нагрузкой является равномерно распределенное по панели единичное давление  $p(\xi) = 1$ . При этом нормальные перемещения находятся с помощью численного интегрирования в формулах (12) и (30).

Приведенные иллюстрации показывают удовлетворительную близость результатов для различных моделей в окрестности заделки и при больших частотах. Отметим также, что на рис. 3–8 кривые, соответствующие моделям А и В, практически совпадают и поэтому изображены единой линией.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 14-49-00091.

#### Литература

1. Стретт Д.В. Теория звука: в 2 т. – М.: Гостехтеориздат, 1955.
2. Лямшев Л.М. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 73 с.
3. Гурович Ю.А. О звукоизоляции прямоугольной пластины на низких частотах // Акуст. журн. – 1978. – Т. 24, Вып. 4. – С. 508–515.
4. Игумнов Л.А., Локтева Н.А., Паймушин В.Н., Тарлаковский Д.В. Звукоизоляционные свойства одномерной трехслойной пластины // Матем. методы та физ.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 2. – С. 86–93.

5. *Паймушин В. Н., Тарлаковский Д. В., Газизуллин Р. К., Лукашевич А.* Исследование различных вариантов постановки задачи о звукоизоляции прямоугольной пластины, окруженной акустическими средами // Матем. методы та физ.-мех. поля. – 2014. – Т. 57, № 4. – С. 51–67.
6. *Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.* Влияние формы набегающей волны на звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины сложной структуры // Электрон. журн. «Труды МАИ». – 2015. – № 82. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58602>.
7. *Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.* Исследование звукоизоляционных свойств трехслойной пластины // Изв. вузов. Машиностроение. – 2016. – № 1. – С. 167–171.
8. *Локтева Н.А., Паймушин В.Н., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В.* Взаимодействие плоской гармонической волны с ограниченной по высоте пластиной // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 64–74.
9. *Власов В.З.* Общая теория оболочек. – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
10. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
11. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
12. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. – М.: Из-во Моск. ун-та, 1969. – 695 с.
13. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости). – М.: Наука, 1976. – 416 с.
14. *Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терезулов И.Г.* Основания нелинейной теории оболочек. – Казань: Фэн, 1996. – 216 с.
15. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
16. Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами. / Под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 632 с.
17. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. – 112 с.

Поступила в редакцию  
26.12.17

---

**Иванилов Алексей Владимирович**, магистр кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: [kru0303@mail.ru](mailto:kru0303@mail.ru)

**Тарлаковский Дмитрий Валентинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний; заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова  
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия  
E-mail: [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)  
2018, vol. 160, no. 3, pp. 528–543

## Dynamics of a Console Cylindrical Panel

*A.V. Ivanilov<sup>a\*</sup>, D.V. Tarlakovskii<sup>a,b\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

<sup>b</sup>*Research Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119192 Russia*

E-mail: *\*kru0303@mail.ru, \*\*tdvhome@mail.ru*

Received December 26, 2017

### Abstract

A one-dimensional stationary problem of the dynamics of a console circular panel with applied normal pressure has been discussed. The boundary value problem has been considered for various shells, such as the Kirchhoff–Love shell and the Donnel–Mushtari shell with extensible and non-extensible middle plane. The possibility of finding an analytical solution for the above-said shells has been considered as well.

The solution of the problem has been sought in the form of using integral expressions with Green’s functions as their core. Green’s functions would be the boundary value problem’s solution with pressure in a form of Dirac delta function. An analytical algorithm has been developed to calculate Green’s functions value for any fluctuation frequency. This algorithm is based on the numerical (in case of the Kirchhoff–Love shell and the Donnel–Mushtari shell with extensible middle plane) and precise (in any other cases) solution of the characteristic equation and also on developing a common solution in a matrix form for the boundary value problem. Examples of the calculations of dynamics of a console circular panel with applied concentrated force (Green’s function) and normal pressure have been given.

Comparison of various shells with the applied concentrated and distributed loads has been performed.

**Keywords:** console circular panel, Kirchhoff–Love shell, Donnel–Mushtari shell, stationary boundary value problem, eigenfunction, Green’s function

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Science Foundation, project no. 14-49-00091.

### Figure Captions

Fig. 1. Open cantilever fitted elastic cylindrical shell.

Fig. 2. Dependence of the normal displacement (Green’s function) at the point  $\xi = \pi/6$  on  $\omega^2$  upon the impact of the concentrated force applied at the point  $\zeta = \pi/7$ : solid curve – model A, dashed curve – model B, dotted curve – model C, dash-and-dot curve – model D.

Fig. 3. Distribution of the normal displacement along the coordinate  $\xi$  upon the impact of the unit force applied at the point  $\pi/7$  and  $\omega = 100$ : solid curve – model A, dashed curve – model B, dotted curve – model C, dash-and-dot curve – model D.

Fig. 4. Distribution of the normal displacement along the coordinate  $\xi$  upon the impact of the unit force applied at the point  $\pi/7$  and  $\omega = 500$ : solid curve – model A, dashed curve – model B, dotted curve – model C, dash-and-dot curve – model D.

Fig. 5. Distribution of the normal displacement along the coordinate  $\xi$  upon the impact of the unit force applied at the point  $\pi/7$  and  $\omega = 1000$ : solid curve – model A, dashed curve – model B, dotted curve – model C, dash-and-dot curve – model D.

Fig. 6. Distribution of the normal displacement along the coordinate  $\xi$  upon the impact of unit pressure uniformly distributed along the panel and  $\omega = 100$ : solid curve – model A, dashed curve – model B, dotted curve – model C, dash-and-dot curve – model D.

Fig. 7. Distribution of the normal displacement along the coordinate  $\xi$  upon the impact of unit pressure uniformly distributed along the panel and  $\omega = 500$ : solid curve – model A, dashed curve – model B, dotted curve – model C, dash-and-dot curve – model D.

Fig. 8. Distribution of the normal displacement along the coordinate  $\xi$  upon the impact of unit pressure uniformly distributed along the panel and  $\omega = 1000$ : solid curve – model A, dashed curve – model B, dotted curve – model C, dash-and-dot curve – model D.

### References

1. Strutt J.W. *Teoriya zvuka* [Theory of Sound]. Moscow, Gostehteorizdat, 1955. (In Russian)
2. Lyamshev L.M. *Otrazhenie zvuka tonkimi plastinkami i obolochkami v zhidkosti* [Reflection of Sound by Thin Plates and Shells in Liquid]. Moscow, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1955. 73 p. (In Russian)
3. Gurovich Yu.A. On the sound insulation of a rectangular plate at low frequencies. *Akust. Zh.*, 1978, vol. 24, no. 4, pp. 508–515. (In Russian)
4. Igumnov L.A., Lokteva N.A., Paimushin V.N., Tarlakovskii D.V. Soundproof properties of a one-dimensional three-layer plate. *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 203, no. 1, pp. 104–113. doi: 10.1007/s10958-014-2093-7.
5. Paimushin V.N., Tarlakovskii D.V., Gazizullin R.K., Lukashevich A. Investigation of different versions of formulation of the problem of soundproofing of rectangular plates surrounded with acoustic media. *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 220, no. 1, pp. 59–81. doi: 10.1007/s10958-016-3168-4.
6. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Tarlakovskii D.V. Influence of incident wave shape on sound-insulating properties of a rectangular plate with complex structure. *Tr. MAI*, 2015, no. 82. Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58602>. (In Russian)
7. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Tarlakovskii D.V. Investigation of soundproof properties of a three-layer plate. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinost.*, 2016, no. 1, pp. 167–171. (In Russian)
8. Lokteva N.A., Paimushin V.N., Serdyuk D.O., Tarlakovskii D.V. The interaction between the plane wave and the plate with limited height in soil. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 1, pp. 64–74. (In Russian)
9. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek* [General Theory of Shells]. Moscow, Gostekhizdat, 1949. 784 p. (In Russian)
10. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovsky E.I. *Lineinaya teoriya tonkikh obolochek* [Linear Theory of Thin Shells]. Leningrad, Politekhnik, 1991. 656 p. (In Russian)
11. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1966. 635 p. (In Russian)
12. Ogibalov P.M., Koltunov M.A. *Obolochki i plastiny* [Shells and Plates]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1969. 695 p. (In Russian)
13. Volmir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza (zadachi aerouprugosti)* [Shells in Fluid and Gas Flow (Aeroelasticity Problems)]. Moscow, Nauka, 1976. 416 p. (In Russian)

14. Galimov K.Z., Paimushin V.N., Teregulov I.G. *Osnovaniya nelineinoi teorii obolochek* [Foundations of the Nonlinear Theory of Shells]. Kazan, Fen, 1996. 216 p. (In Russian)
15. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 472 p. (In Russian)
16. *Sbornik zadach po soprotivleniyu materialov s teoriei i primerami* [Collection of Problems on Resistance of Materials with Theory and Examples]. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. (Eds.). Moscow, FIZMATLIT, 2003. 632 p. (In Russian)
17. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Obshchie sootnosheniya i variatsionnye printsipy matematicheskoi teorii uprugosti* [General Relations and Variational Principles of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Izd. MAI-PRINT, 2009. 112 p. (In Russian)

---

⟨ **Для цитирования:** Иванылов А.В., Тарлаковский Д.В. Динамика консольной цилиндрической панели // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 528–543. ⟩

⟨ **For citation:** Ivanilov A.V., Tarlakovskii D.V. Dynamics of a console cylindrical panel. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 528–543. (In Russian) ⟩