УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 518–528 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 510.53+512.562

ОБ ОДНОМ ВЫЧИСЛИМОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НИЗКИХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

А.Н. Фролов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В 1998 г. в своей обзорной работе Р. Доуни сформулировал план исследования и описания достаточных условий вычислимой представимости линейных порядков в виде проблемы описания порядковых свойств P таких, что для любого низкого линейного порядка L из выполнимости условия $P(L)$ следует существование вычислимого представления L.

Настоящая работа содержит исследования в рамках плана Р. Доуни. В работе показано, что каждый низкий линейный порядок, фактор-порядок (другими словами, конденсация) которого есть η (порядковый тип естественного упорядочения натуральных чисел) и который не содержит бесконечного сильно η-схожего интервала, имеет вычислимое представление посредством $\mathbf{0}''$-вычислимого изоморфизма. Счетный линейный порядок называется сильно η-схожим, если существует некоторое натуральное число k такое, что каждый максимальный блок порядка имеет мощность не больше k.

В работе доказано также, что вышеприведенный результат не верен для $\mathbf{0}'$-вычислимого изоморфизма вместо $\mathbf{0}''$-вычислимого, а именно: построен низкий линейный порядок, конденсация которого есть η и который не содержит бесконечного сильно η-схожего интервала, не имеющий вычислимого представления посредством $\mathbf{0}'$-вычислимого изоморфизма.

Ключевые слова: линейный порядок, вычислимое представление, низкая степень, сильно η-схожий линейный порядок

Введение

В теории вычислимости известны низкие множества, не являющиеся вычислимыми, в то же самое время низкие множества «близко расположены» к вычислимым множествам (см., например, книгу Р. Соара [1]). Естественно напрашивается предположение, что, возможно, некоторые низкие структуры имеют вычислимые представления.

Р. Доуни и К. Джокуш [2] доказали, что каждая низкая булева алгебра является вычислимо представимой. Более того, Дж. Тёрбер [3] доказал, что каждая 2-низкая булева алгебра имеет вычислимое представление, а Дж. Найт и М. Стоб [4] показали, что любая 3-низкая и даже 4-низкая булевы алгебры являются вычислимо представимыми. Они же оценили сложность изоморфизмов при построении вычислимых представлений для n-низких булевых алгебр при $n \leq 4$. Они показали, что каждая низкая, а также 2-низкая булевы алгебры $\mathbf{0}'''$-изоморфны некоторым вычислимым алгебрам; каждая 3-низкая и 4-низкая булевы алгебры соответственно $\mathbf{0}^{(5)}$- и $\mathbf{0}^{(6)}$-изоморфны некоторым вычислимым алгебрам. До сих пор неизвестно, имеют ли вычислимые представления n-низкие булевы алгебры для $n \geq 5$. Известно только (К. Харрис и А. Монталбан [5]), что если 5-низкие булевы алгебры и имеют вычислимые представления, то лишь посредством изоморфизма, который не является $\mathbf{0}^{(7)}$-вычислимым.

Дж. Найт (неопубликовано) поставила вопрос о вычислимой представимости низких линейных порядков. К. Джокуш и Р. Соар [6] дали отрицательный ответ на этот вопрос, показав, что не каждый низкий линейный порядок имеет вычислимое представление. С другой стороны, Р. Доуни и М. Мозес [7] доказали, что любой дискретный линейный порядок низкой степени имеет вычислимую копию.

В 1998 г. в своей обзорной работе Р. Доуни [8] сформулировал программу исследования и описания достаточных условий вычислимой представимости линейных порядков в виде проблемы описания порядковых свойств P таких, что для любого низкого линейного порядка L из выполнимости $P(L)$ следует существование вычислимого представления L.

Долгое время вышеприведенный результат Р. Доуни и М. Мозеса о вычислимой представимости низких дискретных линейных порядков оставался единственным в рамках программы Р. Доуни. Первые результаты были получены в нашей работе [9], где было показано, что каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок имеет вычислимое представление. Если проанализировать доказательство этого результата, то можно показать, что каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок $\mathbf{0}''$-изоморфен некоторому вычислимому порядку. Счетный линейный порядок называется сильно η-схожим, если существует некоторое число k такое, что каждый максимальный блок имеет мощность не больше k.

Однако полученная оценка не является наилучшей. Позднее, в другой нашей работе [10] показано, что низкий сильно η-схожий линейный порядок имеет вычислимое представление посредством $\mathbf{0}'$-вычислимого изоморфизма и нельзя улучшить этот результат, построив вычислимый изоморфизм вместо $\mathbf{0}'$-вычислимого.

В этой же работе установлено также, что каждый низкий линейный порядок, являющийся k-дискретным (или k-квазидискретным), $\mathbf{0}''$–изоморфен (или $\mathbf{0}'''$-изоморфен) некоторому вычислимому линейному порядку. Линейный порядок называется k-квазидискретным (k-дискретным), если каждый максимальный блок либо имеет мощность не больше k, либо бесконечен (имеет тип ζ соответственно). Заметим, что класс 0-дискретных линейных порядков полностью совпадает с классом дискретных порядков. Таким образом, этот результат обобщает и уточняет вышеприведенный результат Р. Доуни и М. Мозеса о вычислимой представимости низких дискретных линейных порядках.

В нашей работе [11] показано, что каждый низкий линейный порядок, фактор-порядок (относительно отношения блока) которого есть η и который не содержит бесконечного сильно η-схожего интервала, имеет вычислимое представление. В настоящей работе мы проанализируем имеющееся доказательство и установим, что вычислимое представление такого порядка находится посредством $\mathbf{0}''$-вычислимого изоморфизма. Покажем также, что невозможно улучшить полученный результат построением $\mathbf{0}'$-вычислимого изоморфизма вместо $\mathbf{0}''$-вычислимого.

Из прочих результатов в данном направлении исследований отметим работу [12], где получен отрицательный ответ на вопрос Э. Кэча и А. Монталбана [13], а именно: построен 2-низкий разреженный линейный порядок, не имеющий вычислимого представления. Линейный порядок называется разреженным, если он не содержит плотного подпорядка. Не обделим вниманием также работу, в которой Э. Кэч и А. Монталбан [13] опубликовали результат о том, что для любого натурального числа n каждый n-низкий линейный порядок L, имеющий только лишь конечное число разбиений на сумму двух непустых сегментов $L = L_1 + L_2$ таких, что L_2 не имеет наименьшего элемента, является вычислимо представимым. Они же показали, что рассмотренный порядковый тип не является тривиальным, то есть что существует $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок такого типа, не имеющий вычислимой копии.

Отметим также совместную работу с П. Алаевым и Дж. Тёрбером [14], где доказано, что каждый 2-низкий 1-квазидискретный (1-дискретный) линейный порядок $\mathbf{0}'''$-изоморфен ($\mathbf{0}''$-изоморфен, соответственно) некоторому вычислимому порядку. Заметим, что из вышеприведенной работы [10] следует, что алгоритмические оценки изоморфизмов последнего результата не могут быть улучшены.

1. $\mathbf{0}''$-вычислимый изоморфизм

Определение 1. Отношением блока линейного порядка L называется отношение $F_L(x,y) \leftrightharpoons |[x,y]_L \bigcup [y,x]_L| < +\infty$.

Отношение блока является отношением эквивалентности на линейном порядке. Классы эквивалентности относительно этого отношения называются *максимальными блоками.*

Определение 2. Счетный линейный порядок называется сильно η-схожим, если существует некоторое число k такое, что каждый максимальный блок имеет мощность не больше k.

Определение 3. Счетный линейный порядок называется η-схожим, если каждый максимальный блок имеет конечную мощность, то есть порядок не содержит интервалов, упорядоченных ни по типу целых чисел ζ, ни по типу натуральных чисел ω, ни по типу отрицательных целых чисел ω^*.

Если предположить, что линейный порядок L не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, то он является η-схожим тогда и только тогда, когда $L \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$, где функция $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$. В этом случае сильно η-схожесть порядка равносильна конечности области значения f. В общем случае необходимо рассмотреть также варианты, когда суммирование вместо $\mathbb{Q}$ ведется по q из $1+\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}+1$ или $1+\mathbb{Q}+1$. Однако все рассуждения в этих случаях полностью аналогичны. Поэтому без ограничения общности предположим, что все рассматриваемые в работе порядки не имеют ни наибольшего, ни наименьшего элементов.

Определение 4. Функция $f:A\to\mathbb{N}$ называется X-предельно монотонной, если существует X-вычислимая функция $g: A\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такая, что для всех $x\in A$ выполнены условия

1) $g(x,s)\le g(x,s+1)$ для любого $s\in\mathbb{N}$;
2) предел $\lim\limits_{s\to+\infty} g(x,s)$ конечен и равен $f(x)$.

В работе [15] доказана следующая теорема (на самом деле в этой работе установлен целый ряд условий, которые эквивалентны $\mathbf{0}'$-предельно монотонным функциям).

Теорема 1. *Предположим, что* $L\cong\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}}(1+f(q))$, *где* $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ *является* $\mathbf{0}'$*-предельно монотонной функцией. Тогда* L *имеет вычислимое представление* (*причем отношение блока вычислимого представления есть* Π^0_1).

В работе [11] замечено, что некоторыми естественными изменениями эту теорему можно обобщить и использовать для доказательства того, что каждый низкий линейный порядок, фактор-порядок (относительно отношения блока) которого есть η и который не содержит бесконечного сильно η-схожего интервала, имеет вычислимое представление. В настоящей работе необходимо также оценить сложность строящегося при этом изоморфизма. Поэтому приведем доказательство обобщенной теоремы с установлением оценки сложности изоморфизма.

Заметим, что если L не содержит ни наибольшего, ни наименьшего элементов и является линейным порядком, фактор-порядок которого есть η, то $L \cong \sum_{q\in\mathbb{Q}} f(q)$, где $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \bigcup \{\omega, \omega^*, \zeta\} \setminus \{0\}$.

Определение 5. Функция $f : A \to \mathbb{N} \bigcup \{\omega\}$ называется X-предельно монотонной, если существует X-вычислимая функция $g : A \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для всех $x \in A$ выполнены условия

1) $g(x, s) \leq g(x, s + 1)$ для любого $s \in \mathbb{N}$,
2) $f(x) = \lim\limits_{s\to+\infty} g(x, s)$, если предел конечен, и $f(x) = \omega$, в противном случае.

Теорема 2. *Предположим, что* $L = \sum_{q\in\mathbb{Q}}((f_1(q))^* + 1 + f_2(q))$, *где* f_1, $f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \bigcup \{\omega\}$ *являются* $\mathbf{0}'$*-предельно монотонными функциями. Тогда* L *имеет вычислимое представление посредством* $\mathbf{0}''$*-вычислимого изоморфизма* (*причем отношение блока вычислимого представления есть* Π^0_1).

Доказательство. Согласно работам [15, 16] существуют такие вычислимые функции g_1 и g_2, что для $i \in \{1, 2\}$ выполнены соотношения $f_i(q) = \liminf\limits_{s\to\infty} g_i(q, s)$ и $g_i(q, s) \neq 0$ для всех $q \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{N}$.

Построим равномерно вычислимые последовательности конечных линейных порядков $\{I^1_s(q), I^2_s(q)\}_{s\in\mathbb{N},q\in\mathbb{Q}}$ такие, что $I^i(q) = \lim\limits_{s\to\infty} I^i_s(q)$ являются конечными линейными порядками для всех $q \in \mathbb{Q}$, $i \in \{1, 2\}$ и $R = \sum_{q\in\mathbb{Q}}((I^1(q))^* + 1 + I^2(q))$ является вычислимым линейным порядком, $\mathbf{0}''$-изоморфным порядку L.

В процессе построения R будем добавлять новые элементы в естественном порядке возрастания, поэтому носителем порядка R будет множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$. Пусть $N_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ – некоторая вычислимая биекция.

Алгоритм построения $(I^1)^* + 1 + I^2$.

Шаг $s = 0$. Положим множества $I^i_0(q)$ неопределенными для всех $q \in \mathbb{Q}$, $i \in \{1, 2\}$.

Шаг $s + 1$. Определим $I^i_{s+1}(q)$ для всех $i \in \{1, 2\}$ и всех $q \in \mathbb{Q}$ таких, что $N_{\mathbb{Q}}(q) \leq s$.

Случай 1. Предположим, что $I^1_s(q)$ и $I^2_s(q)$ определены и $(I^1_s(q))^* + 1 + I^2_s(q) = \{x^1_{n_1} <_R \cdots <_R x^1_1 <_R t <_R x^2_1 <_R \cdots <_R x^2_{n_2}\}$, где $I^i_s(q) = \{x^i_1 <_R \cdots <_R x^i_{n_i}\}$, а элемент $t = t(q)$ соответствует единственному элементу между сегментами $(I^1_s(q))^*$ и $I^2_s(q)$. Если $g_i(q, s) = n_i$, то положим $I^i_{s+1}(q) = I^i_s(q)$. Если $g_i(q, s) > n_i$, то добавим новые элементы $x^i_{n+1}, \dots, x^i_{g_i(q,s)}$ в $I^i_s(q)$ и определим $I^i_{s+1}(q) = \{x^i_1 <_R x^i_2 <_R \cdots <_R x^i_{n_i} <_R x^i_{n_i+1} <_R \cdots <_R x^i_{g_i(q,s)}\}$. В противном случае, если $g_i(q, s) < n_i$, положим $I^i_{s+1}(q) = \{x^i_1 <_R x^i_2 <_R \cdots <_R x^i_{g_i(q,s)}\}$ и будем называть элементы $x_{g_i(q,s)+1}, \dots, x_{n_i}$ *свободными* (то есть они не соотнесены с $I^i_{s+1}(u)$ ни для какого $u \in \mathbb{Q}$). Заметим, что элемент t свободным никогда не становится.

Случай 2. Предположим, что $I^1_s(q)$ и $I^2_s(q)$ не определены. Без ограничении общности считаем, что $-\infty <_{\mathbb{Q}} u <_{\mathbb{Q}} +\infty$ для всех $u \in \mathbb{Q}$; $I^i_p(-\infty) = \emptyset$, $I^i_p(+\infty) = \emptyset$, $(I^1_p(-\infty))^* + 1 + I^2_p(-\infty) = \{-\infty\}$ и $(I^1_p(+\infty))^* + 1 + I^2_p(+\infty) = \{+\infty\}$ определены для всех $p \in \mathbb{N}$, $-\infty <_R z <_R +\infty$ для всех $z \in R$.

Выберем теперь $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ такие, что $q_1 <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} q_2$ и все $I^i_s(q_1)$, $I^i_s(q_2)$ определены, а также что не существует такого q_3, что $q_1 <_{\mathbb{Q}} q_3 <_{\mathbb{Q}} q_2$ и $I^i_s(q_3)$ определены.

Найдем наименьшее натуральное число t, являющееся *свободным* и лежащим между сегментами $I^2_s(q_1)$ и $(I^1_s(q_2))^*$. Если такого t не существует, добавим новый *свободный* элемент между $I^2_s(q_1)$ и $(I^1_s(q_2))^*$ и обозначим его как t. Определим теперь $I^i_{s+1}(q) = \{x^i_1 <_R \cdots <_R x^i_{g_i(q,s)}\}$, где $x^i_1, \ldots, x^i_{g_i(q,s)}$ являются новыми еще не использованными в конструкции элементами. Теперь

$$(I^1_{s+1}(q))^* + 1 + I^2_{s+1}(q) = \{x^1_{g_1(q,s)} <_R \cdots <_R x^1_1 <_R t <_R x^2_1 <_R \cdots <_R x^2_{g_2(q,s)}\}.$$

Описание завершено.

Пусть $f_i(q) = n_i \le \omega$ и, следовательно, $\liminf\limits_{s\to\infty} g_i(q,s) = n_i$. Тогда легко видеть, что для любого натурального $n \le n_i$ существуют элементы $x^i_1, \ldots, x^i_n$ и шаг s_0 такие, что $(\forall s \ge s_0)[x^i_1, \ldots, x^i_n \in I^i_s(q)]$ и $(\forall x \notin \{x^i_j \mid 1 \le j \le n\})(\exists s')$ $(\forall s \ge s')[x \notin I^i_s(q)]$. Следовательно, существует предел $I^i(q) = \lim\limits_{s\to\infty} I^i_s(q)$ и справедливо равенство $|I^i(q)| = n_i$. Таким образом, $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} (f_1(q))^* + 1 + f_2(q) \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} (I^1(q))^* + 1 + I^2(q) = R$ и R — вычислимый линейный порядок.

Так как функции g_i вычислимы, а $f_i = \liminf\limits_{s\to\infty} g_i(\cdot, s)$, то шаг s_0 может быть найдет эффективно относительно оракула $\mathbf{0}''$. Элемент $t = t(q)$ в конструкции определяется один раз и навсегда. Далее нетрудно естественным образом определить эффективный относительно оракула $\mathbf{0}''$-изоморфизм, то есть $\mathbf{0}''$-вычислимый изоморфизм.

Заметим, что согласно конструкции для любого шага s если $x \in I^i_s(q_1)$, $y \in I^j_s(q_2)$ для $i, j \in \{1, 2\}$ и $q_1 \ne q_2$, то $\neg F_R(x,y)$. Отсюда следует, что $\neg F_R(x,y)$ является Σ^0_1-множеством и, следовательно, $F_R(x,y)$ есть Π^0_1. □

Чтобы завершить доказательство вычислимой представимости каждого низкого линейного порядка, фактор-порядок которого есть η и который не содержит сильно η-схожего интервала и оценить сложность изоморфизма, воспользуемся следующей теоремой [11].

Теорема 3. *Пусть L является X-вычислимым линейным порядком, фактор-порядок которого есть η. Пусть отношение соседства L является также X-вычислимым. Если L не содержит сильно η-схожего интервала, то существуют X-предельно монотонные функции f_1, $f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \bigcup \{\omega\}$ такие, что $L \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} ([f_1(q)]^* + 1 + f_2(q))$ посредством X'-вычислимого изоморфизма.*

Следствие 1. *Каждый низкий линейный порядок, фактор-порядок которого есть η и который не содержит сильно η-схожего интервала, является $\mathbf{0}''$-изоморфным некоторому вычислимому представлению (отношение блока которого является Π^0_1-вычислимым).*

Доказательство. Пусть линейный порядок L имеет низкую степень, а его фактор-порядок есть η. Тогда отношение порядка $<_L$ и отношение соседства являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми. По теореме 3 существуют $\mathbf{0}'$-предельно монотонные функции f_1, $f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \bigcup \{\omega\}$ такие, что выполнено соотношение $L \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} ([f_1(q)]^* + 1 + f_2(q))$ посредством $\mathbf{0}''$-вычислимого изоморфизма. По теореме 2 порядок L является $\mathbf{0}''$-изоморфным некоторому вычислимому представлению (отношение блока которого является Π^0_1-вычислимым). □

2. Контрпример

Ясно, что если линейный порядок L имеет низкую степень, то сам порядок L и отношение соседства являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми. На самом деле, как показано нами [10] и независимо А. Монталбаном [17], верно и обратное, причем нами получена также оценка строящегося изоморфизма, которая используется и в настоящей работе.

Теорема 4. *Если линейный порядок L и отношение соседства на нем являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми, то существуют низкий линейный порядок R и $\mathbf{0}'$-вычислимый изоморфизм f такие, что $L \cong_f R$.*

Контрпример, показывающий, что нельзя улучшить оценку сложности изоморфизма, строящегося в следствии 1, заменив $\mathbf{0}''$ на $\mathbf{0}'$, построим следующим образом. Предварительно дадим необходимые определения.

Определение 6. Пусть $L_0, L_1, L_2 \ldots$ – конечная или счетная последовательность линейных порядков. Перемешанной суммой этой последовательности называется линейный порядок $L = \sum\limits_{q \in \mathbb{Q}} L_{f(q)}$, где $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ является такой функцией, что для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ и $k \in \mathbb{N}$ из $q_1 <_{\mathbb{Q}} q_2$ вытекает равенство $k = f(q)$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$, что $q_1 <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} q_2$.

Определение 7. Обозначим порядковый тип линейного порядка, являющегося перемешанной суммой последовательности конечных линейных порядков $1, 2, 3, \ldots$, как η_{fin}.

Очевидно, что фактор-порядок η_{fin} есть η и что η_{fin} не содержит сильно η-схожего интервала.

Для доказательства следующей теоремы используется формула, которая, очевидно, является $\mathbf{0}'$-вычислимой (считаем, что $k > 0$):

$$\Phi_{\mathrm{int}}(x, y; e; k) = (\exists s)(\exists a_1, \ldots, a_k)(\varphi_{e,s}(\langle x, a_1\rangle)\downarrow = 1 \,\&\, \varphi_{e,s}(\langle a_1, a_2\rangle)\downarrow = 1 \,\&\, \ldots$$
$$\ldots \,\&\, \varphi_{e,s}(\langle a_{k-1}, a_k\rangle)\downarrow = 1 \,\&\, \varphi_{e,s}(\langle a_k, y\rangle)\downarrow = 1).$$

Интуитивно, формула $\Phi_{\mathrm{int}}(x, y; e; k)$ означает, что если φ_e задает вычислимый линейный порядок, то между x и y лежит не менее k элементов.

Теорема 5. *Существует низкий линейный порядок порядкового типа η_{fin}, который не может быть $\mathbf{0}'$-изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Доказательство. Искомый линейный порядок L будем строить в виде суммы $L = \sum\limits_{e \in \mathbb{N}} (\eta_{\mathrm{fin}} + L_e + \eta_{\mathrm{fin}})$, где $L_e \cong 1 + \eta_{\mathrm{fin}} + 1$ или $L_e \cong k$ для некоторого натурального числа $k = k(e)$ (то есть процедура построения L_e может быть на некотором шаге завершена). Очевидно, что $L \cong \eta_{\mathrm{fin}}$.

Каждый раз при добавлении нового элемента в процессе построения L будем добавлять наименьшие натуральные числа, которые еще не использовались в конструкции, добившись таким образом, чтобы $|L| = \mathbb{N}$.

Очевидно, что существует эффективная процедура $EN(s)$ построения линейного порядка с вычислимым отношением соседства порядкового типа η_{fin}, добавляющая на одном шаге только один элемент t, который определен для этого шага процедуры заранее, а точнее конструкцией порядка L. Обозначим это действие на шаге $s + 1$ как $EN(s + 1) = EN(s) \oplus t$. Предположим также, что $EN(0) = \emptyset$.

Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Одновременно с построением порядка L будем эффективно определять отношение соседства, которое обозначим как Succ_L. Этого вполне достаточно для доказательства теоремы, так как порядок L имеет вычислимое представление посредством $\mathbf{0}'$-изоморфизма тогда и только тогда, когда его низкое представление, которое строится в теореме 4, также $\mathbf{0}'$-изоморфно некоторому вычислимому порядку.

Алгоритм построения L_e.

Шаг $s=0$. Положим $\sigma_{e,0}=\{p_e <_L r_e\}=1+EN(0)+1$, где p_e и r_e — наименьшие натуральные числа, еще не использованные в конструкции L. Определим, что выполнено $\mathrm{Succ}_L(p_e,r_e)$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(p_e)\downarrow$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(r_e)\downarrow$ и

$$\Phi_{int}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(p_e),\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(r_e);e_2;1),$$

где $e=\langle e_1,e_2\rangle$. Последнее условие означает, что выполнено

$$|\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e),x\rangle)=1\,\&\,\varphi_{e_2}(\langle x,\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\rangle)=1\}|\neq|\{x \mid p<_L x<_L r\}|.$$

Если $\mathrm{Succ}_L(p_e,r_e)$, то завершаем построение L_e. Если $\neg\mathrm{Succ}_L(p_e,r_e)$, то скажем, что L_e *требует внимания.*

Шаг $s+1$. Предположим, что L_e *требует внимания* и на шаге s уже построено $\sigma_{e,s}$ такое, что

$$\sigma_{e,s}=1+EN(s)+1=\{p_e\}<_L|EN(s)|<_L\{r_e\}.$$

Случай 1. Пусть либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_e)\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_e)\uparrow$. Положим тогда

$$\sigma_{e,s+1}=1+EN(s+1)+1=\{p_e\}<_L EN(s+1)<_L\{r_e\}.$$

Завершаем шаг $s+1$ (конструкция L_e по-прежнему *требует внимания*).

Случай 2. Пусть $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_e)\downarrow$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_e)\downarrow$. Предположим, что $EN(s)$ содержит k элементов.

Если $\Phi_{\mathrm{int}}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_e),\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_e);e_2;2k+2)$, то добавим между каждой парой элементов из $EN(s)$ вместе с p_e и r_e, которые являются соседними на данном шаге, но еще не положены в Succ_L, то есть еще не объявлены соседними, по одному новому еще не использованном элементу и объявим все пары элементов, получившиеся соседними на данном шаге, *лежащими в* Succ_L. Заметим, что таких элементов будет не более $2k+1$. Поэтому выполнены соотношения

$$|\{x \mid p_e<_L x<_L r_e\}|\le 2k+1,$$

$$|\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e),x\rangle)=1\,\&\,\varphi_{e_2}(\langle x,\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\rangle)=1\}|\ge 2k+2$$

и, следовательно,

$$|\{x \mid p_e<_L x<_L r_e\}|\neq|\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e),x\rangle)=1\,\&\,\varphi_{e_2}(\langle x,\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\rangle)=1\}|.$$

Если же $\neg\Phi_{\mathrm{int}}(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_e),\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_e);e_2;2k+2)$, то так же, как и выше, добавим между каждой парой элементов, которые являются соседними на данном шаге, но еще не положены в Succ_L, то есть еще не объявлены соседними (в процедуре построения $EN(s)$), по одному новому еще не использованному элементу. Причем добавим непосредственно справа от элемента p_e еще несколько новых элементов, чтобы общее количество добавленных элементов равнялось $2k+2$. Объявим теперь, как и раньше, все пары элементов, получившиеся соседними на данном шаге, *лежащими в* Succ_L. Имеем, что

$$|\{x \mid p_e<_L x<_L r_e\}|=2k+2,$$

$$|\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e), x\rangle) = 1 \,\&\, \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\rangle) = 1\}| < 2k+2$$

и, следовательно,

$$|\{x \mid p_e <_L x <_L r_e\}| \neq |\{x \mid \varphi_{e_2}(\langle \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e), x\rangle) = 1 \,\&\, \varphi_{e_2}(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\rangle) = 1\}|.$$

В обоих исходах этого случая говорим, что L_e больше *не требует внимания* и завершаем шаг $s+1$.

Описание конструкции завершено.

Положим $L_s = \sum_{e\in\mathbb{N}}(EN(s) + \sigma_{e,s} + EN(s))$ и $L = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} L_s$. Ясно, что L и Succ_L являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми и что Succ_L является отношением соседства порядка L.

Не трудно видеть, что каждый $L_e = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \sigma_{e,s}$ либо конечный, либо имеет тип $1 + \eta_{\mathrm{fin}} + 1$, и, следовательно, L имеет порядковый тип $\sum_{e\in\omega}(\eta_{\mathrm{fin}} + L_e + \eta_{\mathrm{fin}}) = \eta_{\mathrm{fin}}$.

Предположим, что L является $\mathbf{0}'$-изоморфным некоторому вычислимому порядку. Пусть всюду определенные функции φ_{e_2} — вычислимое отношение порядка на $\mathbb{N}$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}$ — $\mathbf{0}'$-изоморфизм такие, что $L \cong (\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$ посредством $\mathbf{0}'$-вычислимого изоморфизма $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}$. Тогда согласно построениям в *случае 2* имеем $|\{x \mid \langle e_1, e_2, 0\rangle <_L x <_L \langle e_1, e_2, 1\rangle\}| \neq |\{x \mid \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_e) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_e)\}|$. Противоречие. □

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-60077).

Литература

1. *Soare R.I.* Recursively Enumerable Sets and Degrees. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. – XVIII, 437 p.
2. *Downey R.G., Jockusch C.G. Jr.* Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one // Proc. Am. Math. Soc. – 1994. – V. 122, No 3. – P. 871–880.
3. *Thurber J.* Every low_2 Boolean algebra has a recursive copy // Proc. Am. Math. Soc. – 1995. – V. 123, No 12. – P. 3859–3866.
4. *Knight J.F., Stob M.* Computable Boolean algebras // J. Symb. Logic. – 2000. – V. 65, No 4. – P. 1605–1623. – doi: 10.2307/2695066.
5. *Harris K., Montalban A.* Boolean algebra approximations // Trans. Am. Math. Soc. – 2014. – V. 366, No 10. – P. 5223–5256. – doi: 10.1090/S0002-9947-2014-05950-3.
6. *Jockusch C.G., Soare R.I.* Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. – 1991. – V. 52, No 1–2. – P. 39–64. – doi: 10.1016/0168-0072(91)90038-N.
7. *Downey R.G., Moses M.F.* On choice sets and strongly nontrivial self-embeddings of recursive linear orderings // Z. Math. Logik Grund. Math. – 1989. – Bd. 35. – S. 237–246.
8. *Downey R.G.* Computability theory and linear orderings // Handbook of Recursive Mathematics / Eds. Yu.L. Ershov, S.S. Goncharov, A. Nerode, J.B. Remmel. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – P. 823–976.
9. *Frolov A.N.* Δ^0_2-copies of linear orderings // Algebra logic. – 2006. – V. 45, No 3. – P. 201–209. – doi: 10.1007/s10469-006-0017-4.
10. *Frolov A.N.* Linear orderings of low degree // Sib. Math. J. – 2010. – V. 51, No 5. – P. 913–925. – doi: 10.1007/s11202-010-0091-7.

11. *Frolov A.N.* Low linear orderings // J. Logic Comput. – 2012. – V. 22, No 4. – P. 745–754. – doi: 10.1093/logcom/exq040.

12. *Frolov A.* Scattered linear orderings with no computable presentation // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35, No 1. – P. 19–22. – doi: 10.1134/S199508021401003X.

13. *Kach A., Montalbán A.* Cuts of linear orders // Order. – 2011. – V. 28, No 3. – P. 593–600. – doi: 10.1007/s11083-010-9194-9.

14. *Alaev P.E., Frolov A.N., Thurber J.* Computability on linear orderings enriched with predicates // Algebra Logic. – 2009. – V. 48, No 5. – P. 313–320. – doi: 10.1007/s10469-009-9067-8.

15. *Frolov A., Zubkov M.* Increasing η-representable degrees // Math. Logic Q. – 2009. – V. 55, No 6. – P. 633–636. – doi: 10.1002/malq.200810031

16. *Kach A.* Computable shuffle sums of ordinals // Archive for Math. Logic. – 2008. – V. 47, No 3. – P. 211–219. – doi 10.1007/s00153-008-0077-3.

17. *Montalban A.* Notes on the jump of a structure // Ambos-Spies K., Lowe B., Merkle W. (Eds.) Mathematical Theory and Computational Practice. CiE 2009. Lecture Notes in Computer Science, V. 5635. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. – P. 372–378.

Поступила в редакцию
12.09.17

Фролов Андрей Николаевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры алгебры и математической логики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *andrey.frolov@kpfu.ru*, *a.frolov.kpfu@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 4, pp. 518–528

On a Computable Presentation of Low Linear Orders

A.N. Frolov

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *andrey.frolov@kpfu.ru*

Received September 12, 2017

Abstract

R. Downey in the review paper of 1998 stated the research program on studying and description of sufficient conditions of computable representability of linear orders, namely, the problem of description of the order type P such that, for any low linear order L, from $P(L)$ it follows that L has a computable presentation.

This paper is a part of the program initiated by R. Downey. We have shown that each low linear order with η condensation and no infinite strongly η-like interval has a computable presentation via a $\mathbf{0}''$-computable isomorphism. The countable linear order is called η-like if there exists some natural number k such that each maximal block of the order has power no more than k.

We have also proven that the above-discussed result does not hold for $\mathbf{0}'$-computable isomorphism instead of $\mathbf{0}''$-computable. Namely, we have constructed a low linear order L with η condensation and no infinite strongly η-like interval such that L is not $\mathbf{0}'$-computably isomorphic to a computable one.

Keywords: linear order, computable presentation, low degree, strongly η-like linear order

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-31-60077).

References

1. Soare R.I. Recursively Enumerable Sets and Degrees. Heidelberg, Springer-Verlag, 1987. XVIII, 437 p.

2. Downey R.G., Jockusch C.G.,Jr. Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1994, vol. 122, no. 3, pp. 871–880.

3. Thurber J. Every low_2 Boolean algebra has a recursive copy. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1995, vol. 123, no. 12, pp. 3859–3866.

4. Knight J.F., Stob M. Computable Boolean algebras. *J. Symb. Logic*, 2000, vol. 65, no. 4, pp. 1605–1623. doi: 10.2307/2695066.

5. Harris K., Montalban A. Boolean algebra approximations. *Trans. Am. Math. Soc.*, 2014, vol. 366, no. 10, pp. 5223–5256. doi: 10.1090/S0002-9947-2014-05950-3.

6. Jockusch C.G., Soare R.I. Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings. *Ann. Pure Appl. Logic*, 1991, vol. 52, nos. 1–2, pp. 39–64. doi: 10.1016/0168-0072(91)90038-N.

7. Downey R.G., Moses M.F. On choice sets and strongly nontrivial self-embeddings of recursive linear orderings. *Z. Math. Logik Grund. Math.*, 1989, Bd. 35, S. 237–246.

8. Downey R.G. Handbook of Recursive Mathematics. *Computability Theory and Linear Orderings*. Ershov Yu.L., Goncharov S.S., Nerode A., Remmel J.B. (Eds.). Amsterdam, Elsevier, 1998, pp. 823–976.

9. Frolov A.N. Δ_2^0-copies of linear orderings. *Algebra Logic*, 2006, vol. 45, no. 3, pp. 201–209. doi: 10.1007/s10469-006-0017-4.

10. Frolov A.N. Linear orderings of low degree. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 5, pp. 913–925. doi: 10.1007/s11202-010-0091-7.

11. Frolov A.N. Low linear orderings. *J. Logic Comput.*, 2012, vol. 22, no. 4, pp. 745–754. doi: 10.1093/logcom/exq040.

12. Frolov A. Scattered linear orderings with no computable presentation. *Lobachevskii J. Math.*, 2014, vol. 35, no. 1, pp. 19–22. doi: 10.1134/S199508021401003X.

13. Kach A., Montalbán A. Cuts of linear orders. *Order*, 2011, vol. 28, no. 3, pp. 593–600. doi: 10.1007/s11083-010-9194-9.

14. Alaev P.E., Frolov A.N., Thurber J. Computability on linear orderings enriched with predicates. *Algebra Logic*, 2009, vol. 48, no. 5, pp. 313–320. doi: 10.1007/s10469-009-9067-8.

15. Frolov A., Zubkov M. Increasing η-representable degrees. *Math. Logic Q.*, 2009, vol. 55, no. 6, pp. 633–636. doi: 10.1002/malq.200810031.

16. Kach A. Computable shuffle sums of ordinals. *Arch. Math. Logic*, 2008, vol. 47, no. 3, pp. 211–219. doi: 10.1007/s00153-008-0077-3.

17. Montalban A. Mathematical Theory and Computational Practice. CiE 2009. Lecture Notes in Computer Science. Ambos-Spies K., Lowe B., Merkle W. (Eds.). *Notes on the Jump of a Structure*. Vol. 5635. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009, pp. 372–378.

⟨ ***Для цитирования:*** *Фролов А.Н.* Об одном вычислимом представлении низких линейных порядков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 4. – С. 518–528. ⟩

⟨ ***For citation:*** Frolov A.N. On a computable presentation of low linear orders. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 518–528. (In Russian) ⟩