

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ. КИНЕМАТИКА СРЕДЫ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Л.У. Султанов

Аннотация

Работа посвящена построению основных кинематических и определяющих соотношений, применяемых при разработке вычислительных методик исследования конечных упругопластических деформаций. Кинематика среды рассматривалась в рамках мультипликативного представления градиента полных деформаций. При выводе определяющих соотношений использованы теория течения и уравнение второго закона термодинамики. В результате получена зависимость скорости тензора напряжений от функции свободной энергии и функции текучести.

Ключевые слова: нелинейная упругость, конечные деформации, пластичность.

Введение

При исследовании конечных упругопластических, вязкоупругих или вязкопластических деформаций все чаще авторами используется мультипликативное разложение градиента деформаций. При таком разложении существует несколько способов построения алгоритма исследования. Это связано прежде всего с выбором базиса, относительно которого исследуется процесс деформирования. В настоящей работе основные соотношения записаны относительно актуального (деформированного) состояния. Отметим, что в работах [1–4] построены вычислительные алгоритмы исследования трехмерных тел для гиперупругих материалов, в [5–8] – методики решения упругопластических задач при аддитивном разложении скоростей деформаций.

1. Кинематика

Будем считать, что исследуемая среда допускает конечные деформации и находится в упругопластическом состоянии, в качестве основной кинематической характеристики используется градиент деформаций [9, 10], при этом тензор градиента полных деформаций представляется в виде произведения градиента упругих и пластических деформаций:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p. \quad (1)$$

Подобное представление широко применяется при решении нелинейных задач механики деформируемых тел и считается достаточно строгим (математически точным). В качестве примера упомянем работы [11–15].

Использование разложения (1) означает введение некоторого деформированного состояния, которое допустимо в микрообъеме среды в окрестности рассматриваемой материальной точки при снятии напряжений. Другими словами, это выделение остаточных деформаций, появившихся вследствие пластического (вязкого)

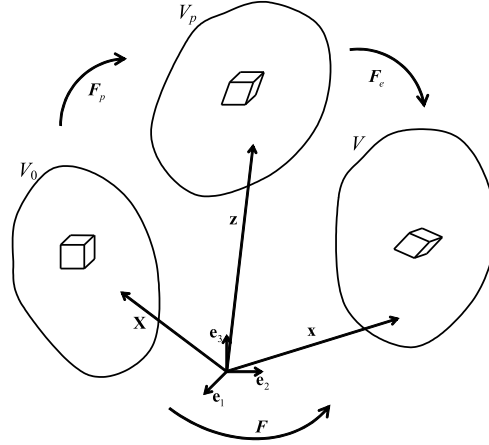


Рис. 1. Кинематика конечных деформаций

течения. Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 1. Здесь представлены радиус-вектор материальной точки в недеформированном состоянии, которому соответствует объем V_0 :

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i,$$

радиус-вектор той же материальной точки в актуальной конфигурации, которая соответствует объему V :

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i,$$

радиус-вектор материальной точки в разгруженном состоянии:

$$\mathbf{z} = z_i \mathbf{e}_i.$$

Использование этих параметров позволяет представить разложение (1) в виде

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial X_k} = \frac{\partial x_i}{\partial z_j} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_k) \frac{\partial z_m}{\partial X_k} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p.$$

Для каждого состояния введем соответствующие тензоры мер деформации:

– правый тензор Коши–Грина (мера деформации Коши–Грина)

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e, \quad \mathbf{C}_p = \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_p;$$

– левый тензор Коши–Грина (мера деформации Коши–Грина)

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{B}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e, \quad \mathbf{B}_p = \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_p;$$

– левый тензор Пиолы (мера деформации Альманси):

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{B}_e^{-1} = \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{B}_p^{-1} = \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{F}_p^{-1};$$

– правый тензор Пиолы:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{C}_e^{-1} = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-T}, \quad \mathbf{C}_p^{-1} = \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^{-T}.$$

Введенные тензоры связаны между собой различными соотношениями, приведем те из них, которые будут далее использоваться:

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{C}_e \cdot \mathbf{F}_p.$$

В дальнейшем будем считать справедливой теорию пластического течения, которую традиционно описывают в терминах производных по времени. Поэтому введем основные тензоры, используемые при описании кинематики течения сплошной среды. Базовым является тензор пространственного градиента скорости, который записывается в виде

$$\mathbf{h} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (2)$$

Симметричная часть этого тензора называется тензором деформации скорости

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} + \mathbf{h}^T], \quad (3)$$

кососимметричная – тензором скорости поворота

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} - \mathbf{h}^T]. \quad (4)$$

Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}} &= 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{h}^T, \\ \mathbf{d} &= -\frac{1}{2}\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \dot{\mathbf{B}}^{-1} = -\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{B}^{-1}. \end{aligned}$$

В соответствии с разложением (1) вводим аналоги тензоров (2)–(4) для упругих и пластических скоростей деформаций \mathbf{h}_e , \mathbf{d}_e , $\boldsymbol{\omega}_e$, \mathbf{h}_p , \mathbf{d}_p , $\boldsymbol{\omega}_p$. Установим связи между введенными тензорами:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= [\dot{\mathbf{F}}_e \cdot \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_e \cdot \dot{\mathbf{F}}_p] \cdot [\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-1}] = \mathbf{h}_e + \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{h}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \\ \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T &= -\mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \dot{\mathbf{C}}_p \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \\ &= -\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^{-T} \cdot [\dot{\mathbf{F}}_p^T \cdot \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_p^T \cdot \dot{\mathbf{F}}_p] \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_e^T = \\ &= -\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{h}_p^T \cdot \mathbf{F}_e^T - \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{h}_p \cdot \mathbf{F}_e^T = -2\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{d}_p \cdot \mathbf{F}_e^T, \\ \dot{\mathbf{B}}_e &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T = \mathbf{h} \cdot \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{h}^T - 2\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{d}_p \cdot \mathbf{F}_e^T. \end{aligned}$$

Если ввести обобщенную производную

$$\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_e = \dot{\mathbf{B}}_e - \mathbf{h} \cdot \mathbf{B}_e - \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{h}^T, \quad (5)$$

то для нее справедливы представления

$$\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_e = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = -2\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{d}_p \cdot \mathbf{F}_e^T.$$

Прокомментируем полученные соотношения. Во-первых, следует определить принадлежность введенных тензоров к соответствующему базису. Здесь введены три базиса: базисы, построенные в исходном, актуальном и промежуточном состояниях. В исходной конфигурации определены тензоры \mathbf{C} , \mathbf{C}_p , \mathbf{C}^{-1} , \mathbf{C}_p^{-1} , $\dot{\mathbf{C}}$, $\dot{\mathbf{C}}_p$, $\dot{\mathbf{C}}_p^{-1}$, которые являются инвариантными тензорами. В базисе актуальной конфигурации определены индиферентные тензоры \mathbf{B} , \mathbf{B}^{-1} , \mathbf{B}_e , \mathbf{B}_e^{-1} , $\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_e$, \mathbf{d} и тензоры \mathbf{h} , $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\mathbf{B}}_e$. В промежуточном (разгруженном) базисе определены тензоры \mathbf{C}_e , \mathbf{B}_p , \mathbf{h}_p . Во-вторых, операциями сложения-вычитания объединены тензоры, определенные в одном базисе. Это обстоятельство необходимо принимать во внимание и далее при формулировке соответствующих уравнений состояния. В-третьих,

перевод из одного базиса в другой осуществляется путем соответствующего умножения слева и справа на тензоры градиента деформации \mathbf{F} , \mathbf{F}_e , \mathbf{F}_p и градиента места \mathbf{F}^T , \mathbf{F}_e^T , \mathbf{F}_p^T и им обратные тензоры. В-четвертых, скорость пластических деформаций в исходной конфигурации определяет тензор $\dot{\mathbf{C}}_p$, в промежуточной – \mathbf{d}_p , в актуальной – \mathbf{B}_e .

2. Определяющие соотношения

В качестве базового примем тензор истинных напряжений Коши–Эйлера Σ , который также называют гидродинамическим тензором напряжений. Этот тензор определен в актуальном базисе, он является тензором, индифферентным и сопряженным по мощности тензору деформации скорости (3). Таким образом, мощность внутренних сил определяется в виде

$$N = \int_V \Sigma : \mathbf{d} dV.$$

Для определения мощности в виде интеграла по работе в исходной конфигурации используются два тензора: тензор напряжений Кирхгофа

$$\tau = J \Sigma \quad (6)$$

(J – относительное изменение объема) и второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \tau \cdot \mathbf{F}^{-T}.$$

В этом случае мощность определяется в виде

$$N = \int_{V_0} \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} dV_0 = \int_{V_0} \tau : \mathbf{d} dV_0.$$

Физические соотношения получим из уравнения второго закона термодинамики для изотермического процесса. В соответствии с [11, 12] имеем неравенство

$$\tau : \mathbf{d} - \rho_0 \dot{\psi} \geq 0, \quad (7)$$

где ρ_0 – исходная плотность, ψ – свободная энергия. Принимается, что свободная энергия зависит лишь от упругих деформаций, поскольку пластическое деформирование приводит к расходу (диссипации) энергии. В качестве тензора упругих деформаций, компоненты которого являются аргументами свободной энергии, различные авторы выбирают либо \mathbf{F}_e [13], либо \mathbf{C}_e [11, 12], либо \mathbf{B}_e [14, 15]. Известны и другие варианты (тензоры искажения, логарифмические меры деформаций, тензоры деформаций Коши–Грина и Альманси и др. [16–20]). В настоящей работе примем в качестве базового вариант

$$\psi = \psi(\mathbf{B}_e),$$

подставив который в (7) и используя выражение для обобщенной производной (5), получим

$$\left\{ \tau - \rho_0 \left[\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{B}_e \right] \right\} : \mathbf{d} - \rho_0 \left[\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{B}_e \right] : \omega - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} : \mathbf{B}_e \geq 0. \quad (8)$$

Отсюда имеем определяющее уравнение

$$\tau = 2\rho_0 \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e}, \quad (9)$$

уравнение симметрии

$$\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{B}_e$$

и диссипативное неравенство

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} : \nabla \cdot \mathbf{B}_e \leq 0.$$

В качестве условия пластического течения примем

$$\Phi_p(\boldsymbol{\Sigma}, \chi) \leq 0, \quad (10)$$

где Φ_p – функция текучести, χ – параметр упрочнения.

Составим обобщенный функционал диссипации

$$\rho \boldsymbol{\Sigma} : \left[\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{B}_e^{-1} \right] + \dot{\lambda} \Phi_p(\boldsymbol{\Sigma}, \chi) \leq 0. \quad (11)$$

Здесь использованы соотношения (6) и (9), с помощью которых градиент функционала $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e}$ выражается через тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$. Далее, в соответствии с работами [11, 12, 14, 15] запишем условие экстремума функционала (11) по возможным полям напряжений. В результате получим соотношение

$$-\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{B}_e^{-1} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_p}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}. \quad (12)$$

Данное уравнение является аналогом уравнения ассоциированного закона пластического течения в теории малых упругопластических деформаций (теория течения). Здесь также имеется параметр $\dot{\lambda}$, который определяет величину скорости деформации пластичности. Для получения линеаризованного определяющего соотношения продифференцируем по времени уравнение (9) и получим

$$\dot{\tau} = 2\rho_0 \left[\dot{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} + \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B}_e \partial \mathbf{B}_e} : \dot{\mathbf{B}}_e \right]$$

С учетом (6) запишем результат в виде двух слагаемых

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}_e + \dot{\tau}_p,$$

где

$$\dot{\tau}_e = 2\rho_0 \left\{ [\mathbf{h} \cdot \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{h}^T] \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} + \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B}_e \partial \mathbf{B}_e} : [\mathbf{h} \cdot \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{h}^T] \right\}, \quad (13)$$

$$\dot{\tau}_p = 2\rho_0 \left\{ \nabla \cdot \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} + \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B}_e \partial \mathbf{B}_e} : \nabla \cdot \mathbf{B}_e \right\}. \quad (14)$$

В работе [21] показано, что зависимость вида (13) приводится к следующей:

$$\dot{\tau}_e = 4\rho_0 \left[\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B}_e \partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{B}_e \right] : \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{h}^T.$$

Обобщенную производную $\overset{\nabla}{\mathbf{B}}_e$ выразим из (12) через неизвестный параметр $\dot{\lambda}$ и подставим в (14). В результате имеем

$$(\dot{\tau}) = 4\rho_0 \mathbf{\Lambda}_e : \mathbf{d} + \mathbf{h}\tau + \tau \mathbf{h}^T - \dot{\lambda} 4\rho_0 \left\{ \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} \cdot \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} + \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B}_e \partial \mathbf{B}_e} : \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} \mathbf{B}_e \right\}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{\Lambda}_e = \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B}_e \partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{B}_e. \quad (16)$$

Величину скорости пластических деформаций определяем из уравнения стационарности (согласованности), которое получается дифференцированием уравнения (6):

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : \dot{\Sigma} - H \dot{\lambda} = 0, \quad (17)$$

где введена функция упрочнения $H = \frac{\partial \Phi_p}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}$.

Производная тензора Σ через тензор τ выражается по формуле

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{J} \dot{\tau} - \Sigma [\mathbf{I} : \mathbf{d}], \quad (18)$$

где используется известное кинематическое соотношение $\frac{\dot{J}}{J} = I_{1\mathbf{d}} = \mathbf{I} : \mathbf{d}$.

Подставив (18) с учетом (15) в (17), получим уравнение для $\dot{\lambda}$:

$$4\rho \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : \mathbf{\Lambda}_e : \mathbf{d} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : [\mathbf{h}\Sigma + \Sigma \mathbf{h}^T - \Sigma I_{1\mathbf{d}}] - \dot{\lambda} 4\rho \left[\frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : \mathbf{R} \right] - \dot{\lambda} H = 0, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} \cdot \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} + \mathbf{B}_e \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B}_e \partial \mathbf{B}_e} : \left[\frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} \cdot \mathbf{B}_e \right].$$

Из соотношения (19) определяем $\dot{\lambda}$ в виде

$$\dot{\lambda} = \left[H + 4\rho \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : \mathbf{R} \right]^{-1} \left\{ 4\rho \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : \mathbf{\Lambda}_e : \mathbf{d} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : [\mathbf{h} \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \mathbf{h}^T - \Sigma I_{1\mathbf{d}}] \right\}.$$

Далее для кратности обозначим

$$4\rho \mathbf{\Lambda}_e : \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \mathbf{h}^T - \Sigma I_{1\mathbf{d}} = \mathbf{G}_e : \mathbf{h}.$$

В результате линеаризованное соотношение для $\dot{\Sigma}$ структурно представляется как

$$\dot{\Sigma} = \mathbf{G}_e : \mathbf{h} - 4\rho \mathbf{R} \frac{\frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : \mathbf{G}_e : \mathbf{h}}{H + 4\rho \frac{\partial \Phi_p}{\partial \Sigma} : \mathbf{R}}. \quad (20)$$

Полученное уравнение в скоростях можно считать уравнением в приращениях соответствующих величин. В частности, скорость изменения напряжений $\dot{\Sigma}$ следует отождествлять с приращением этих напряжений $\Delta \Sigma$, а пространственный градиент скорости \mathbf{h} считать тензором $\Delta \mathbf{h}_R$, при этом

$$\Delta \mathbf{h}_R = \frac{\partial \Delta y_i}{\partial y_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

что структурно совпадает с (2). Отметим, что замена \mathbf{h} на $\Delta \mathbf{h}_R$ и $\dot{\Sigma}$ на $\Delta \Sigma$ изменила физическую размерность соотношения (20). Время как физический параметр теперь отсутствует.

Заключение

В работе приведены основные кинематические и физические соотношения, используемые при моделировании конечных упругопластических деформаций. Кинематика среды рассматривалась с учетом мультипликативного представления полных градиентов деформаций на упругую и неупругую части. Вывод физических соотношений опирается на уравнение второго закона термодинамики с введением функции свободной энергии. Составлен обобщенный функционал на базе условия текучести, с использованием которого получен аналог уравнения ассоциированного закона пластического течения. В итоге построены определяющие соотношения для скоростей и приращений истинных напряжений Коши. Эти определяющие соотношения могут быть применены при построении вычислительных методик исследования нелинейных процессов деформирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-08733, 15-31-20602).

Summary

L.U. Sultanov. Analysis of Finite Elastoplastic Deformations. Kinematics and Constitutive Equations.

The main kinematic relations and constitutive equations, which are used for creating computational methods to investigate finite elastoplastic deformations are presented in the paper. The medium kinematics is considered along with the multiplicative concept of the full deformation gradient. The constitutive equations are deduced using the theory of flow and the second law of thermodynamics. As a result, a dependence of the stress tensor rate on the free energy function and the yield function is obtained.

Keywords: nonlinear elasticity, finite deformations, plasticity.

Литература

1. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 29–37.
2. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 3. – С. 122–132.
3. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 3. – С. 108–120.
4. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. IV. Конечноэлементная реализация. Примеры решения задач // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 3. – С. 115–126.
5. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 36–43.
6. Голованов А.И., Султанов Л.У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2008. – № 4. – С. 13–16.

7. *Давыдов Р.Л., Султанов Л.У.* Численный алгоритм решения задачи о больших упруго-пластических деформациях МКЭ // Вестн. ПНИПУ. Механика. – 2013. – № 1. – С. 81–93.
8. *Davydov R., Sultanov L.* Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformation by FEM // Sixth International Conference on Nonlinear Mechanics (ICNM-VI). – USA: DEStech Publ., Inc., 2013 – P. 64–67.
9. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 464 с.
10. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. – 165 с.
11. *Eidel B., Gruttman F.* Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // Comput. Mater. Sci. – 2003. – V. 28, No 3–4. – P. 732–742.
12. *Schröder J., Gruttman F., Löblein J.* A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures // Comput. Mech. – 2002. – V. 30, No 1. – P. 48–64.
13. *Simo J.S.* A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1988. – V. 66, No 2. – P. 199–219.
14. *Miehe C.* A theory of large-strain isotropic thermoplasticity based on metric transformation tensors // Arch. Appl. Mech. – 1995. – V. 66, No 1. – P. 45–64.
15. *Basar Y., Itskov M.* Constitutive model and finite element formulation for large strain elasto-plastic analysis of shell // Comput. Mech. – 1999. – V. 23, No 5. – P. 466–481.
16. *Meyers A., Schievbe P., Bruhns O.T.* Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates // Acta Mech. – 2000. – V. 139, No 1. – P. 91–103.
17. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient // Int. J. Plast. – 2000. – V. 16, No 2. – P. 143–177.
18. *Asghari M., Naghdabadi R., Sohrabpour S.* Stresses conjugate to the Jaumann rate of Eulerian strain measures // Acta. Mech. – 2007. – V. 190, No 1. – P. 45–56.
19. *Lin R.C.* Numerical study of consistency of rate constitutive equations with elasticity at finite deformation // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2002. – V. 55, No 9. – P. 1053–1077.
20. *Shen L.-J.* Constitutive relations for isotropic or kinematic hardening at finite elastic-plastic deformations // Int. J. Solids Struct. – 2006. – V. 43, No 18–19. – P. 5613–5627.
21. *Eterovic A.L., Bathe K.-J.* A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1990. – V. 30, No 6. – P. 1099–1114.

Поступила в редакцию
04.08.15

Султанов Ленар Усманович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: Lenar.Sultanov@kpfu.ru