

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

КАЩЕЕВ Р. А.

**ФИГУРА ЗЕМЛИ: ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЕ
(НОРМАЛЬНОЕ) ПРИБЛИЖЕНИЕ**

(учебное пособие)

Казань 2001

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
физического факультета

УДК: 528.2

Кашеев Р.А. Фигура Земли: эллипсоидальное (нормальное) приближение. Учебное пособие для студентов четвертого курса физического факультета. Казань 2001, 46 с.

Учебное пособие представляет собой краткий конспект лекций по первой части курса "Теория фигуры Земли и гравиметрия", читаемого для студентов четвертого курса специальности "Астрономогеодезия" физического факультета.

Оглавление

1 Сила тяжести и ее потенциал. Геоид.	2
2 Фигура геоида первого приближения (идеального геоида).	7
3 Сила тяжести на поверхности нормального эллипсоида. Формула Клеро.	15
4 Теорема Стокса. Проблема Стокса.	19
5 Решение проблемы Стокса для эллипсоида вращения.	24
6 Сила тяжести на поверхности уровенного эллипсоида. Формула Пицетти-Сомильяна.	30
7 Формулы нормальной силы тяжести..	36
8 Фундаментальные геодезические параметры Нормальной Земли.	39
9 Заключение о силе тяжести и фигуре Земли.	42

Рецензент:

Заболотников В.С. - канд. физ.-мат. наук, доцент каф. геодезии
Казанской государственной архитектурно-строительной академии

1 Сила тяжести и ее потенциал. Геоид.

На каждую материальную точку, находящуюся на поверхности Земли, действуют множество сил различной природы: силы притяжения Земли, Луны, Солнца, других небесных тел, центробежная сила, сила атмосферного давления и т.д. Среди этих сил наибольшими по величине являются сила земного притяжения \vec{F} и центробежная сила \vec{C} , обусловленная вращением Земли. Равнодействующая этих двух сил на единичную массу называется силой (ускорением силы) тяжести \vec{g} :

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C}.$$

Таким образом, сила тяжести на поверхности Земли, часто называемая весом тела, не совпадает с ньютоновской силой притяжения. Причиной этого несовпадения является вращение Земли. Соответствующее сile тяжести ускорение \vec{g} также является суммой гравитационного и центробежного ускорений. Влияние атмосферы, притяжения небесных тел и другие более тонкие эффекты приливного и неприливного характера невелики и могут быть учтены соответствующими поправками. Кроме того предполагается, что Земля обладает свойствами абсолютно твердого тела, а ее гравитационное поле является стационарным, т.е. неизменным во времени.

Сразу заметим, что вклад центробежной силы в силу тяжести достаточно мал. Оценим его с помощью постоянной q , равной отношению центробежной силы на экваторе (там она максимальна) к полной силе тяжести на экваторе g_e :

$$q = \frac{\omega^2 a}{g_e} \approx \frac{1}{289}.$$

Здесь $\omega = \frac{2\pi}{86164}$ - угловая скорость вращения Земли, $a = 6378 \text{ км}$ - ее средний экваториальный радиус. Поэтому в дальнейших рассуждениях можно считать q малой величиной того же порядка, что и сжатие Земли.

Введем потенциал W силы тяжести

$$\vec{g} = \text{grad } W,$$

модуль градиента которого является доступной для гравиметрических измерений величиной g ускорения силы тяжести. В силу принципа суперпозиции

$$W(P) = V(P) + Q(P),$$

где $V(P)$ - потенциал силы притяжения $\vec{F}(P)$, а $Q(P)$ - потенциал центробежной силы $\vec{C}(P)$. Потенциал $V(P)$ есть потенциал объемных масс Земли, который может быть выражен замкнутой интегральной формулой

$$V(P) = G \iint_{\tau} \frac{\delta(M) d\tau(M)}{r},$$

где $\delta(M)$ - значение функции объемной плотности во внутренней точке $M \in \tau$ Земли, r - расстояние от точки M до точки P . Объемный интеграл должен быть распространен на все тело Земли, включая твердую и жидкую части планеты. Малым влиянием атмосферы, как отмечалось выше, обычно пренебрегают, но при необходимости оно может быть учтено. То же относится и к изменениям потенциала V со временем.

Получим явном виде формулу для вычисления потенциала $Q(P)$. Будем предполагать, что Земля вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Тогда на единичную массу, находящуюся на поверхности планеты в точке

P , действует центробежная сила

$$|\vec{C}(P)| = \omega^2 d,$$

где d - расстояние от P до оси вращения Земли. Совместив ось Z базисной геоцентрической тройки векторов с осью вращения, будем иметь

$$|\vec{C}(P)| = \omega^2 \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Проекции центробежной силы на оси земной системы координат будут равны:

$$C_X = \omega^2 X, \quad C_Y = \omega^2 Y, \quad C_Z = 0.$$

Тогда в соответствии с определением потенциала силы имеем:

$$Q(X, Y, Z) = \frac{\omega^2}{2} (X^2 + Y^2),$$

вследствие чего потенциал силы тяжести запишется в виде:

$$W(X, Y, Z) = G \iint_T \frac{\delta(M) d\tau(M)}{r} + \frac{\omega^2}{2} (X^2 + Y^2). \quad (1)$$

Запишем формулу (1) также и в сферической системе координат в терминах разложения в ряд объемных сферических (шаровых) функций:

$$\begin{aligned} W(\rho, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\rho} [1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + \\ &+ S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)] + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Уровненной поверхностью потенциала W называется поверхность, во всех точках которой потенциал W равен одной

и той же постоянной величине. Уравнение уровненной поверхности потенциала W имеет вид:

$$W = c_0 = \text{const.} \quad (3)$$

Придавая постоянной c_0 различные числовые значения, получаем семейство уровненных поверхностей потенциала W . Ортогональные траектории к уровненным поверхностям называются силовыми линиями. Касательная к силовой линии в любой ее точке определяет направление вектора силы тяжести \vec{g} и называется отвесной линией.

Для геодезии особое значение имеет изучение размеров и фигуры той уровненной поверхности указанного семейства, которая проходит вблизи физической поверхности Земли. Выбор такой основной уровненной поверхности, несмотря на неизбежную его условность, не может быть совершенно произвольным. Хорошо известно, что три четверти поверхности Земли покрыта водами Мирового океана и только одна четверть ее представляет собой поверхность материков, выступающих над уровнем моря на небольшую по сравнению с радиусом земного шара высоту. При этом поверхность Мирового океана в состоянии покоя (гидростатического равновесия) образующей его водной массы является одной из уровненных поверхностей потенциала силы тяжести, поскольку в условиях равновесия уровненные поверхности потенциала силы тяжести совпадают с изобарическими поверхностями (поверхностями равного давления). Мысленно продолжив уровненную поверхность Мирового океана под материками так, чтобы она в своем продолжении всюду пересекала бы направление отвесной линии под прямым углом, возможно получить сплошную замкнутую уровненную поверхность, обнимающую

почти все массы Земли. Построенная таким образом поверхность может быть названа поверхностью геоида. Однако, существование морских течений указывает на то, что реальный уровень моря не является поверхностью уровня потенциала, поскольку стационарные течения на свободной поверхности жидкости невозможны в отсутствие постоянного градиента. Заметим также в качестве примера, что разность уровней Тихого и Атлантического океанов в зоне Панамского канала составляет 0.6м, а уровень Черного моря располагается на 0.7м ниже нуль-пункта Кронштадтского футштока.

Учитывая сказанное, сформулируем более строгое определение понятия геоида. Геоидом будем называть уравненную поверхность потенциала силы тяжести, проходящую через нуль начального пункта нивелирной сети (нуль футштока). На акватории Мирового океана эта поверхность с точностью $\pm 1\text{м}$ совпадает с невозмущенной приливами и атмосферными воздействиями поверхности воды, а под сушей является ее мысленным продолжением, в каждой своей точке оставаясь нормальной к местной вертикали. Термин "геоид" был впервые введен немецким физиком Иоганном Листингом в 1873 году и с этого момента фигура геоида рассматривается как планетарная фигура Земли, потому представляющая собой предмет пристального изучения со стороны геодезистов. Подчеркнем, кроме того, что поверхность геоида не является внешней уравненной поверхностью, ибо над ней возвышаются почти все материки и плотная атмосфера Земли.

В каждой точке геоида, описываемой уравнением (3), направление вектора силы тяжести \vec{g} совпадает с направлением нормали к поверхности геоида, а модуль его есть производ-

ная потенциала W по нормали к уравненной поверхности т.е.

$$g = - \frac{\partial W}{\partial n} \quad (4)$$

при этом направление нормали n выбрано противоположным направлению вектора силы. Из непрерывности потенциальной функции W и ее первых производных следует, что уравненные поверхности потенциала силы тяжести W непрерывны и не имеют угловых точек и ребер, вследствие чего нормаль к геоиду также меняет свое направление непрерывным образом. Тем не менее, фигура геоида, обусловленная неоднородностью внутреннего строения Земли, весьма сложна и потому не может быть описана замкнутой математической формулой. Во многих случаях за фигуру Земли первого приближения целесообразно принимать более простую поверхность, которая может быть получена выделением из уравнения геоида нескольких членов, доминирующих по величине.

2 Фигура геоида первого приближения (идеального геоида).

Перепишем формулу (2) для потенциала силы тяжести, выделив в явном виде гармоники степени $n = 2$:

$$\begin{aligned} W(\rho, \theta, \lambda) = & \frac{GM}{\rho} \left\{ 1 + \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 [C_{20} P_{20}(\cos \theta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_{22} \cos 2\lambda P_{22}(\cos \theta)] + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + \right. \right. \\ & \left. \left. + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right\} + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве фигуры Земли первого приближения выберем фигуру S сфероида Клеро (идеального геоида), представляющего собой уровненную поверхность

$$W^{(1)}|_S = c^{(1)} = \text{const} \quad (6)$$

потенциала силы тяжести в первом приближении

$$W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM}{\rho} [1 + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 C_{20} P_{20}(\cos \theta)] + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \sin^2 \theta. \quad (7)$$

По сравнению с (5), в (7) сохранена лишь гармоника второй степени, так как для Земли коэффициент C_{20} на несколько порядков больше прочих гармонических коэффициентов. Поскольку

$$C_{20} = \frac{1}{Ma^2} \left(\frac{A+B}{2} - C \right), \quad P_{20}(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1),$$

формулу (7) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\rho} [1 + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 \frac{1}{2Ma^2} \left(\frac{A+B}{2} - C \right) \times \\ &\times (3 \cos^2 \theta - 1)] + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Здесь C – главный момент инерции второго порядка, вычисляемый относительно оси вращения Земли, A и B – главные моменты инерции второго порядка относящиеся к главным осям инерции, лежащим в плоскости земного экватора. Положив при переходе от (5) к (7) $C_{22} = 0$, мы в качестве фигуры идеального геоида выбираем фигуру вращения, для которой $A = B$. Обозначим $C - A = \mu a^2$, где μ имеет смысл распределенной вдоль экватора массы, наличие которой обеспечивает ненулевое значение разности моментов C и A . Тогда

имеем:

$$W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM}{\rho} [1 + \frac{\mu}{2M} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta)] + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \sin^2 \theta.$$

Далее учтем, что

$$q = \frac{\omega^2 a}{g_e}, \quad g_e = \frac{GM}{a^2},$$

$$\text{следовательно } q = \frac{\omega^2 a^3}{GM} \quad \text{и} \quad \omega^2 = \frac{qGM}{a^3}.$$

Тогда уравнение (6) идеального геоида запишется как

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\rho} [1 + \frac{\mu}{2M} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) + \\ &+ \frac{q \rho^3}{2 a^3} \sin^2 \theta] = c^{(1)} = \text{const}. \end{aligned} \quad (8)$$

Потенциал $W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda)$ представляет собой приближенный потенциал силы тяжести, записанный с точностью до первого порядка малых величин μ/M и q . Значение постоянной $c^{(1)}$ в (8) выберем так, чтобы на экваторе, где $\theta = \pi/2$, радиус-вектор идеального геоида был бы равен среднему экваториальному радиусу Земли, т.е. $\rho = a$. Тогда из (8)

$$c^{(1)} = \frac{GM}{a} [1 + \frac{\mu}{2M} + \frac{q}{2}]. \quad (9)$$

Подставив (9) в (8), получаем:

$$\frac{\rho}{a} = \frac{[1 + \frac{\mu}{2M} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) + \frac{q \rho^3}{2 a^3} \sin^2 \theta]}{(1 + \frac{\mu}{2M} + \frac{q}{2})}. \quad (10)$$

В содержащих малые сомножители втором и третьем слагаемых числителя дроби (10) будем полагать $\rho = a$. В знаменателе той же дроби сохраним только единицу, а малые слагаемые $\mu/2M$ и $q/2$, поменяв их знаки, перенесем в числитель:

$$\frac{\rho}{a} = 1 + \frac{\mu}{2M} - 3\frac{\mu}{2M} \cos^2 \theta + \frac{q}{2} \sin^2 \theta - \frac{\mu}{2M} - \frac{q}{2}.$$

Тогда:

$$\frac{\rho}{a} = 1 - \left(\frac{3\mu}{2M} + \frac{q}{2} \right) \cos^2 \theta. \quad (11)$$

Равенство (11) представляет собой уравнение идеального геоида с точностью до малых первого порядка. Покажем, что фигура идеального геоида в этом приближении имеет форму эллипсоида вращения.

Запишем уравнение эллипсоида вращения с полуосами a и b в сферической системе координат:

$$\frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{b^2} = 1.$$

Введем в это уравнение сжатие эллипсоида $\alpha = (a - b)/a$:

$$\frac{\rho^2}{a^2} [\sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{(1 - \alpha)^2}] = 1,$$

откуда имеем:

$$\frac{\rho}{a} = \left[\frac{\sin^2 \theta (1 - \alpha)^2 + \cos^2 \theta}{(1 - \alpha)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Квадратную скобку разложим в ряд по степеням малой величины α , сохранив слагаемые только первого порядка малости:

$$\frac{\rho}{a} = (1 - \alpha)(1 - 2\alpha \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \alpha)(1 + \alpha \sin^2 \theta) = 1 - \alpha \cos^2 \theta$$

Сравнив результат с (11), приходим к выводу, что с точностью до малых первого порядка нормальный сфериод Клеро (идеальный геоид) совпадает с эллипсоидом вращения, имеющим большую полуось a и сжатие

$$\alpha = \frac{3\mu}{2M} + \frac{q}{2}.$$

В ряде случаев формулу (11) полезно записать в терминах сферических гармоник. Полином Лежандра второй степени $P_2(\cos \theta)$ выражается формулой

$$P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{3}[2P_2(\cos \theta) + 1],$$

вследствие чего (11) преобразуется к

$$\frac{\rho}{a} = [1 - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos \theta)]. \quad (12)$$

Введем средний радиус Земли R как среднее интегральное из ρ по единичной сфере ω , т.е.

$$R = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} \rho d\omega = a(1 - \frac{1}{3}\alpha),$$

поскольку в силу ортогональности сферических гармоник различных степеней интеграл от $P_2(\cos \theta)$ по единичной сфере ω равен нулю, т.к.

$$\iint_{\omega} P_2(\cos \theta) d\omega = \iint_{\omega} P_0(\cos \theta) P_2(\cos \theta) d\omega = 0.$$

Подставляя R в (12), имеем:

$$\rho = R[1 - \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos \theta)]. \quad (13)$$

Это равенство так же, как и (11) и (12), выражает зависимость радиуса-вектора ρ идеального геоида от полярного

расстояния θ . Долгота λ не входит в формулы, поскольку эллипсоид является фигуруй вращения. Тот факт, что (12) включает только полином четной степени $P_2(\cos \theta)$ отражает симметрию фигуры идеального геоида относительно плоскости экватора Земли.

Потенциал силы притяжения эллипсоида вращения с точностью до малых величин порядка сжатия также может быть выражен осесимметричным разложением

$$V(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM}{\rho} [1 + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 C_{20} P_2(\cos \theta)].$$

Для потенциала центробежной силы имеем:

$$Q(\rho, \theta, \lambda) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{3}\omega^2\rho^2[1 - P_2(\cos \theta)].$$

Тогда

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\rho} [1 + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 C_{20} P_2(\cos \theta)] + \\ &+ \frac{1}{3}\omega^2\rho^2[1 - P_2(\cos \theta)]. \end{aligned} \quad (14)$$

В рамках принятой точности можно положить в первой квадратной скобке формулы (14) $a^2 = \rho^2$, а перед второй квадратной скобкой $\rho^2 = R^2$. Приходим к

$$W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM}{\rho} [1 + C_{20}P_2(\cos \theta)] + \frac{1}{3}\omega^2\rho^2[1 - P_2(\cos \theta)].$$

Из (13) имеем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}[1 - \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos \theta)]^{-1} = \frac{1}{R}[1 + \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos \theta)],$$

откуда

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{R} [1 + \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos \theta)][1 + C_{20}P_2(\cos \theta)] + \\ &+ q \frac{GM}{3R} [1 - P_2(\cos \theta)], \end{aligned}$$

где $\omega^2 = q \frac{GM}{R^3}$. В итоге

$$W^{(1)}(\rho, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} [1 + \frac{1}{3}q + \left(\frac{2}{3}\alpha + C_{20} - \frac{1}{3}q\right) P_2(\cos \theta)]. \quad (15)$$

На поверхности уровенного эллипсоида для любых значений θ выполняется условие (6), в силу чего коэффициент при $P_2(\cos \theta)$ должен быть равен нулю. Тогда равенство (15) переписывается в виде:

$$W^{(1)}|_S = \frac{GM}{R} (1 + \frac{1}{3}q) = c^{(1)} \text{ и } \left(\frac{2}{3}\alpha + C_{20} - \frac{1}{3}q\right) = 0,$$

что приводит к чрезвычайно важному соотношению между α и C_{20} :

$$C_{20} = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}q \quad (16)$$

или обратно

$$\alpha = -\frac{3}{2}C_{20} + \frac{1}{2}q. \quad (17)$$

Равенство (17) является ключевой формулой для прямого определения геометрического сжатия α земного эллипсоида по значению зонального коэффициента C_{20} , получаемого методами динамической спутниковой геодезии. Разумеется,

в этих целях используются формулы более высокого класса точности.

В завершение параграфа сделаем еще одно важное замечание, которое касается выбора в качестве приближенной фигуры Земли идеального геоида (6), являющегося уровенной поверхностью потенциала (7). На первый взгляд, хорошим и гораздо более простым приближением может быть сфера, выбранная как уровенная поверхность потенциала однородной сферической Земли

$$V^{(0)} = \frac{GM}{\rho},$$

представляющего собой доминирующую составляющую потенциала W . Поскольку отклонение потенциала W от $V^{(0)}$ имеет порядок сжатия $\alpha \approx 0.003$, средние высоты геоида (уровенной поверхности потенциала W) над сферой будут составлять $\alpha a \approx 20$ км. Эта величина мала по сравнению с размерами Земли, но очень велика по сравнению со средними перепадами высот рельефа земной поверхности. Сфериод Клеро, с точностью до малых первого порядка совпадающий с эллипсоидом вращения, обеспечивает существенно более точное приближение к фигуре общепланетарного геоида (3). В самом деле, потенциал W (5) отличается от нормального потенциала $W^{(1)}$ (7) на величину порядка α^2 . Следовательно, отклонение геоида от нормального эллипсоида составит величину порядка $\alpha^2 a \approx 60$ м. Заметим, что для реальной неоднородной Земли это отклонение изменяется в диапазоне от -110 метров до $+70$ метров.

3 Сила тяжести на поверхности нормального эллипсоида. Формула Клеро.

Сила тяжести γ на поверхности нормального эллипсоида (идеального геоида), в гравиметрии чаще всего называемая нормальной силой тяжести, есть производная нормального потенциала силы тяжести, взятая по нормали к поверхности уровенного эллипсоида, т.е.

$$\gamma = -\frac{\partial W^{(1)}}{\partial n} \quad (18)$$

Направление нормали как и в формуле (4) выбрано противоположным направлению вектора силы тяжести.

В формуле (8) от геоцентрического полярного расстояния θ перейдем к геоцентрической широте φ , учитывая, что $\varphi + \theta = \pi/2$:

$$W^{(1)}(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{\rho} \left[1 + \frac{\mu}{2M} \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{q\rho^3}{2a^3} \cos^2 \varphi \right].$$

Заметим, однако, что направление нормали к эллипсоиду не совпадает с направлением геоцентрического радиуса-вектора ρ , вследствие чего

$$-\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \rho} = \gamma \cos(\varphi - B),$$

где B - геодезическая широта, т.е. угол между нормалью к эллипсоиду и плоскостью экватора. Для Земли разность геоцентрической и геодезической широт ($\varphi - B$) не превышает 12 дуговых минут. Косинус этого угла отличается от единицы на малую величину порядка квадрата сжатия, вследствие чего, выводя формулы с точностью до малых первого порядка,

различием между направлениями геоцентрического радиуса-вектора и нормали к эллипсоиду можно пренебречь. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma &= -\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \rho} = \frac{GM}{\rho^2} + \frac{3G\mu a^2}{2\rho^4} - \frac{9G\mu a^2}{2\rho^4} \sin^2 \varphi - \\ &- \frac{qGM\rho}{a^3} \cos^2 \varphi = \\ &= \frac{GM}{\rho^2} \left[1 + \frac{3\mu a^2}{2M\rho^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{q\rho^3}{a^3} \cos^2 \varphi \right].\end{aligned}$$

С точностью до малых первого порядка в квадратной скобке положим $\rho = a$. Далее, воспользовавшись (11), обозначим

$$\hat{A} = \frac{a^2}{\rho^2} = \left[1 - \left(\frac{3\mu}{2M} + \frac{q}{2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{-2}$$

и, заменив ρ^{-2} на $\hat{A}a^{-2}$, получим

$$\gamma = \frac{GM}{a^2} \hat{A} \left[1 + \frac{3\mu}{2M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - q \cos^2 \varphi \right]. \quad (19)$$

Продолжая разложение с точностью до малых первого порядка, подставим в (19) явное выражение для сомножителя \hat{A} :

$$\gamma = \frac{GM}{a^2} \left[1 + \left(\frac{3\mu}{M} + q \right) \sin^2 \varphi \right] \left[1 + \frac{3\mu}{2M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - q \cos^2 \varphi \right],$$

а затем перемножим квадратные скобки:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{GM}{a^2} \left[1 + \left(\frac{3\mu}{M} + q \right) \sin^2 \varphi + \frac{3\mu}{2M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \right. \\ &\left. - q \cos^2 \varphi \right] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{GM}{a^2} \left[1 + \left(\frac{3\mu}{M} - q \right) + \left(\frac{3\mu}{M} + q - \frac{9\mu}{2M} + q \right) \sin^2 \varphi \right] = \\ &= \frac{GM}{a^2} \left[1 + \left(\frac{3\mu}{M} - q \right) - \left(\frac{3\mu}{2M} - 2q \right) \sin^2 \varphi \right].\end{aligned}$$

Поскольку сжатие

$$\alpha = \frac{3\mu}{2M} + \frac{q}{2}, \quad \frac{3\mu}{2M} = \alpha - \frac{q}{2}.$$

Тогда

$$\gamma = \frac{GM}{a^2} \left[1 + \left(\alpha - \frac{3q}{2} \right) - \left(\alpha - \frac{5q}{2} \right) \sin^2 \varphi \right].$$

На экваторе ($\sin \varphi = 0$) сила тяжести

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \alpha - \frac{3q}{2} \right), \quad (20)$$

Запишем отношение

$$\frac{\gamma}{\gamma_e} = \frac{1 + \left(\alpha - \frac{3q}{2} \right) - \left(\alpha - \frac{5q}{2} \right) \sin^2 \varphi}{1 + \alpha - \frac{3q}{2}}.$$

С учетом малых величин лишь первого порядка имеем:

$$\frac{\gamma}{\gamma_e} = 1 + \left(\alpha - \frac{3q}{2} \right) - \left(\alpha - \frac{5q}{2} \right) \sin^2 \varphi - \alpha + \frac{3q}{2} = 1 + \left(\frac{5q}{2} - \alpha \right) \sin^2 \varphi.$$

Введем величину первого порядка малости: $\beta = 5q/2 - \alpha$.

Окончательно получим

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad \text{где } \beta = \frac{5}{2}q - \alpha. \quad (21)$$

На полюсе при $\varphi = 90^\circ$ нормальная сила тяжести равна

$$\gamma_p = \gamma_e(1 + \beta), \quad \text{отсюда} \quad \beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e},$$

т.е. β (гравиметрическое сжатие) есть отношение избытка силы тяжести на полюсе уровняенного эллипсоида вращения над экваториальной силой тяжести к экваториальному же значению нормальной силы тяжести.

В терминах сферических гармоник теория Клеро первого порядка строится дифференцированием потенциала (14) по радиусу вектору ρ :

$$\gamma = -\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \rho} = GM \left[\frac{1}{\rho^2} + 3 \frac{a^2}{\rho^4} C_{20} P_2(\cos \theta) \right] - \frac{2}{3} \omega^2 \rho [1 - P_2(\cos \theta)].$$

Равенство (13) дает

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \frac{2}{3} \alpha P_2(\cos \theta) \right]^{-2} = \frac{1}{R^2} \left[1 + \frac{4}{3} \alpha P_2(\cos \theta) \right].$$

Подставим $1/\rho^2$, в малых слагаемых a и ρ заменим на R и учтем (16):

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{GM}{R^2} \left[1 + \frac{4}{3} \alpha P_2(\cos \theta) \right] \left[1 + 3C_{20} P_2(\cos \theta) \right] - \\ &- \frac{2}{3} \omega^2 R [1 - P_2(\cos \theta)] = \\ &= \frac{GM}{R^2} \left[1 + \frac{4}{3} \alpha P_2(\cos \theta) + 3C_{20} P_2(\cos \theta) \right] - \\ &- \frac{2}{3} q + \frac{2}{3} q P_2(\cos \theta) = \\ &= \frac{GM}{R^2} \left[1 - \frac{2}{3} q + \left(\frac{4}{3} \alpha - 2\alpha + q + \frac{2}{3} q \right) P_2(\cos \theta) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{GM}{R^2} \left[1 - \frac{2}{3} q + \left(-\frac{2}{3} \alpha + \frac{5}{3} q \right) P_2(\cos \theta) \right].$$

На экваторе

$$\theta = 90^\circ, \quad P_2(0) = -0.5, \quad \gamma_e = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \alpha - \frac{3}{2} q \right).$$

На полюсе

$$\theta = 0^\circ, \quad P_2(1) = 1, \quad \gamma_p = \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2}{3} \alpha + q \right).$$

Коэффициент гравиметрического сжатия β с точностью до первого порядка

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \left(-\alpha + \frac{5}{2} q \right) \left(1 + \frac{1}{3} \alpha - \frac{3}{2} q \right)^{-1} = \frac{5}{2} q - \alpha,$$

что совпадает с его значением (21), полученным выше.

Формулы (21), называемые формулами Клеро (опубликованы в 1743 году), позволяют определить сжатие земного эллипсоида лишь по измерениям силы тяжести γ в некоторой совокупности точек поверхности Земли. Напомним, что в данном случае задача решена с точностью до малых величин первого порядка. В следующем параграфе рассматривается важная теорема, используемая нами далее для построения теории второго порядка.

4 Теорема Стокса. Проблема Стокса.

Теорема Стокса (1849 г.). Пусть тело известной массы M вращается вокруг неизменной оси с постоянной угловой скоростью ω и пусть также нам задана целиком охватывающая все массы тела уровеньенная поверхность S потенциала силы тяжести W . В таком случае потенциал W и его первые производные будут однозначно определены на поверхности S и

во всем внешнем по отношению к ней пространстве, независимо от распределения масс внутри рассматриваемого тела.

Очевидно, для доказательства теоремы необходимо показать, что потенциал силы тяжести W не изменится при перераспределении масс внутри тела при условии, что поверхность S останется внешней уровенной поверхностью потенциала W .

Допустим обратное, а именно существование двух различных значений V_1 и V_2 потенциала притяжения, соответствующих двум различным же распределениям масс внутри гравитирующего тела. Потенциал Q центробежной силы не зависит от распределения масс, вследствие чего

$$W_1 = V_1 + Q \quad \text{и} \quad W_2 = V_2 + Q.$$

На уровенной поверхности S эти потенциалы постоянны:

$$W_1|_S = c_1 \quad \text{и} \quad W_2|_S = c_2.$$

Образуем разность $T = W_1 - W_2 = V_1 - V_2$. Понятно также, что на S выполняется равенство $T|_S = c_1 - c_2$.

Рассмотрим тройной интеграл

$$J = \iiint_{\tau^*} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial Z} \right)^2 \right] dX dY dZ$$

по объему τ^* , заключенному между уровенной для T поверхностью S и поверхностью Σ сферы радиуса R , целиком охватывающей поверхность S . Применив первую формулу Грина

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau^*} U \Delta V d\tau &+ \iiint_{\tau^*} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial Z} \frac{\partial V}{\partial Z} \right) d\tau = \\ &= \iint_{\sigma} U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma, \end{aligned}$$

имеем:

$$J = \int_{\sigma=S+\Sigma} T \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma - \iint_{\tau^*} T \Delta T d\tau.$$

Разность ньютоновских потенциалов T обладает в пространстве, не занятом массами, свойством гармоничности, вследствие чего $\Delta T(P) = 0$, $P \in \tau^*$ и

$$J = \iint_S T \frac{\partial T}{\partial n} dS - \iint_{\Sigma} T \frac{\partial T}{\partial n} d\Sigma.$$

Знак минус отражает здесь противоположность направлений нормалей к поверхностям S и Σ .

Рассмотрим поведение второго из интегралов при неограниченном возрастании радиуса R сферы Σ . В силу регулярности потенциала силы притяжения на бесконечности

$$|V_1 - V_2| = |T| < \frac{GM}{R}, \quad \left| \frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right| < \frac{GM}{R^2}.$$

Тогда

$$\left| \iint_{\Sigma} T \frac{\partial T}{\partial n} d\Sigma \right| < \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G^2 M^2}{R^3} R^2 \sin \theta d\lambda d\theta = 4\pi \frac{G^2 M^2}{R}.$$

Устремляя $R \rightarrow \infty$, получаем:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \iint_{\Sigma} T \frac{\partial T}{\partial n} d\Sigma \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \frac{G^2 M^2}{R} = 0.$$

Теперь

$$J = \iint_S T \frac{\partial T}{\partial n} dS.$$

Вследствие того, что $T|_S = c_1 - c_2 = const$, имеем:

$$J = (c_1 - c_2) \iint_S \left(\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} \right) ds.$$

Применим к интегралу J вторую формулу Грина:

$$\iiint_{\tau} U \Delta V d\tau - \iiint_{\tau} V \Delta U d\tau = \iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS,$$

полагая, что $U = 1$, а τ - внутренняя по отношению к S область пространства, перепишем формулу

$$\iiint_{\tau} \Delta V d\tau = \iint_S \frac{\partial V}{\partial n} dS,$$

в силу чего интеграл J принимает вид:

$$J = (c_1 - c_2) \iint_{\tau} (\Delta V_1 - \Delta V_2) d\tau.$$

Внутри гравитирующих масс (т.е. в точках области τ) ньютоновские потенциалы удовлетворяют уравнению Пуассона:

$$\Delta V_1 = -4\pi G \delta_1(P), \quad \Delta V_2 = -4\pi G \delta_2(P), \quad P \in \tau.$$

По этой причине интегралы по объему τ для ΔV_1 и ΔV_2 будут равны друг другу:

$$\iiint_{\tau} \Delta V_1 d\tau = \iiint_{\tau} \Delta V_2 d\tau = -4\pi GM.$$

Тогда интеграл $J = 0$, следовательно

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{\partial T}{\partial Z} = 0, \quad \text{т.е. } dT = 0,$$

в силу чего $T = const$ во всем внешнем по отношению к S пространстве.

Это означает, что всюду во внешнем пространстве $V_1 - V_2 = const$. Так как обе функции при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, имеем $V_1 - V_2 = 0$. Тогда во всем внешнем пространстве $V_1 \equiv V_2$ и $W_1 \equiv W_2$, что и доказывает теорему Стокса.

Таким образом, зная угловую скорость вращения ω , общую массу M тела, а также форму S объемлющей все массы тела уровенной поверхности потенциала W силы тяжести, возможно найти единственное решение задачи определения потенциала W на S и во всем внешнем по отношению к ней пространстве. Нахождение функции W по указанным выше данным составляет проблему Стокса. Поскольку потенциал центробежной силы в точках поверхности гравитирующего тела определяется лишь геометрией этой поверхности, проблема Стокса сводится к отысканию гравитационного потенциала V . Этот потенциал представляет собой искомую функцию, обладающую всеми свойствами потенциала объемных масс:

- гармоничностью во внешнем пространстве;
- непрерывностью и конечностью потенциала и его первых производных во всем пространстве;
- регулярностью на бесконечности;

и на известной поверхности S удовлетворяющую краевому условию

$$V|_S = const - \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2).$$

Легко видеть, что в такой формулировке проблема Стокса по своей математической структуре эквивалентна краевой задаче Дирихле.

В следующем параграфе рассмотрим решение этой задачи для случая, когда уровенная поверхность S потенциала силы тяжести W , заключающая внутри себя всю планету, имеет форму эллипсоида вращения.

5 Решение проблемы Стокса для эллипсоида вращения.

Пусть на поверхности S эллипсоида вращения

$$\frac{X_e^2 + Y_e^2}{a^2} + \frac{Z_e^2}{c^2} = 1$$

с заданными по условию значениями полуосей a и c потенциал силы тяжести W равен постоянной величине $W(X_e, Y_e, Z_e) = W_0$. Предположим также, что все массы Земли сосредоточены внутри поверхности S эллипсоида и известны масса M и угловая скорость ω вращения планеты. Как указывалось выше, решение проблемы Стокса сводится к решению краевой задачи Дирихле, состоящей в отыскании во внешнем пространстве гармонической функции $V(X, Y, Z)$, которая на поверхности эллипсоида S удовлетворяла бы краевому условию

$$V(X_e, Y_e, Z_e) = W_0 - \frac{\omega^2}{2}(X_e^2 + Y_e^2). \quad (22)$$

Приступим к решению задачи. Согласно теореме Стокса сформулированные условия однозначно определяют искомый потенциал V , вне зависимости от распределения масс внутри Земли. Предположим тогда, что эллипсоид S равномерно заполнен массами постоянной плотности δ . Это предположение позволяет воспользоваться известными (см. курс

"Теория потенциала") формулами для притяжения однородным гравитирующим эллипсоидом внешней точечной массы. Напомним, что потенциал \hat{V} однородного эллипсоида вращения на внешнюю точку равен

$$\hat{V}(X, Y, Z) = \hat{V}_0 - P(X^2 + Y^2) - RZ^2, \quad (23)$$

где \hat{V}_0 - потенциал притяжения в центре симметрии эллипсоида,

$$P = \pi G \delta a^2 c \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta}, \quad R = \pi G \delta a^2 c \int_u^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\Delta},$$

$\Delta = (a^2 + s)\sqrt{c^2 + s}$, u - параметр, определяемый из уравнения эллипсоида вращения

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2 + u} + \frac{Z^2}{c^2 + u} = 1,$$

софокусного данному и проходящего через точку с координатами (X, Y, Z) . Понятно, что на поверхности S выполняются равенства $X = X_e, Y = Y_e, Z = Z_e, u = 0$.

Поиск решения в форме (23) означает, что искомый потенциал удовлетворяет всем свойствам ньютонаического потенциала притяжения, потому остается лишь согласовать его с краевым условием (22). Для этого в точках (X_e, Y_e, Z_e) поверхности S приравняем (23) и (22):

$$W_0 - \frac{\omega^2}{2}(X_e^2 + Y_e^2) = \hat{V}_0 - P(X_e^2 + Y_e^2) - RZ_e^2,$$

откуда имеем:

$$(P - \frac{\omega^2}{2})(X_e^2 + Y_e^2) + RZ_e^2 = \hat{V}_0 - W_0,$$

$$\frac{X_e^2 + Y_e^2}{(P - \frac{\omega^2}{2})^{-1}(\hat{V}_0 - W_0)} + \frac{Z_e^2}{R^{-1}(\hat{V}_0 - W_0)} = 1.$$

Сравнивая полученный результат с уравнением эллипсоида вращения, приходим к

$$(P - \frac{\omega^2}{2})^{-1}(\hat{V}_0 - W_0) = a^2, \quad R^{-1}(\hat{V}_0 - W_0) = c^2$$

и далее к

$$a^2(P - \frac{\omega^2}{2}) = c^2R. \quad (24)$$

Равенство (24) устанавливает взаимосвязь между полуосами a и c уровняного эллипсоида и угловой скоростью ω его вращения. При заданных a, c и ω добиться выполнения условия (24) возможно, варьируя фиктивную постоянную плотность $\hat{\delta}$, входящую в виде сомножителя в P и R . В их подинтегральных выражениях сделаем замену переменной интегрирования $s = c^2t$:

$$P = \pi G \hat{\delta} a^2 c \int_0^\infty \frac{c^2 dt}{(a^2 + c^2 t)^2 c \sqrt{1+t}} = \pi G \hat{\delta} \int_0^\infty \frac{v dt}{(1+vt)^2 \sqrt{1+t}},$$

$$R = \pi G \hat{\delta} a^2 c \int_0^\infty \frac{c^2 dt}{(a^2 + c^2 t)c^3 (\sqrt{1+t})^3} = \pi G \hat{\delta} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+vt)(\sqrt{1+t})^3},$$

где обозначено $v = c^2/a^2$. Перепишем условие (24) в виде:

$$a^2 P - c^2 R = a^2 \frac{\omega^2}{2}, \quad \text{откуда } P - vR = \frac{\omega^2}{2}.$$

Вычислим значение константы Ω .

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\omega^2}{2\pi G \hat{\delta}} = \frac{P - vR}{\pi G \hat{\delta}} = \int_0^\infty \frac{(v+vt-v-v^2t)}{(1+vt)^2(\sqrt{1+t})^3} dt = \\ &= v(1-v) \int_0^\infty \frac{tdt}{(1+vt)^2(\sqrt{1+t})^3}. \end{aligned}$$

Введем новую переменную

$$y^2 = \frac{1}{1+t}, \quad \text{тогда } 1+t = \frac{1}{y^2}, \quad \text{а } dt = -\frac{2}{y^3} dy.$$

Продолжая, имеем:

$$t = \frac{1-y^2}{y^2}, \quad tdt = -\frac{2(1-y^2)}{y^5} dy, \quad vt = \frac{v-vy^2}{y^2},$$

$$1+vt = \frac{v+(1-v)y^2}{y^2} = \frac{v}{y^2}(1+\frac{1-v}{v}y^2) = \frac{v}{y^2}(1+e'^2y^2),$$

где обозначено

$$e'^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \frac{1-v}{v}.$$

В принятых обозначениях интеграл

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{v(1-v)}{v^2} \int_1^0 \frac{2(1-y^2)dy}{y^5 \frac{1}{y^4}(1+e'^2y^2)} \frac{1}{y^3} = \\ &= 2e'^2 \int_0^1 \frac{y^2(1-y^2)dy}{(1+e'^2y^2)^2} = 2e'^2(I_1 + I_2), \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y^2 dy}{(1+e'^2y^2)^2}, \quad I_2 = -\int_0^1 \frac{y^4 dy}{(1+e'^2y^2)^2}.$$

Для вычисления интегралов I_1 и I_2 введем новую переменную

$$z = ye', \quad y = \frac{z}{e'}, \quad dy = \frac{dz}{e'}.$$

Тогда искомые интегралы перепишутся в виде:

$$I_1 = \frac{1}{e'^3} \int_0^{e'} \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2}, \quad I_2 = -\frac{1}{e'^5} \int_0^{e'} \frac{z^4 dz}{(1+z^2)^2}.$$

Учитывая, что

$$d\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = -\frac{2zdz}{(1+z^2)^2},$$

берем интегралы по частям:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2e'^3} \int_0^{e'} z d\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = -\frac{1}{2e'^3} \frac{z}{1+z^2} \Big|_0^{e'} + \\ &+ \frac{1}{2e'^3} arctgz \Big|_0^{e'} = -\frac{1}{2e'^3} \left(\frac{e'}{1+e'^2} - arctge' \right) \\ I_2 &= \frac{1}{2e'^5} \int_0^{e'} z^3 d\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2e'^5} \frac{z^3}{1+z^2} \Big|_0^{e'} - \frac{3}{2e'^5} \int_0^{e'} \frac{z^2 dz}{1+z^2}. \end{aligned}$$

Очевидно также, что

$$d(z - arctgz) = \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) dz = \frac{z^2 dz}{1+z^2},$$

вследствие чего

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2e'^5} \left(\frac{z^3}{1+z^2} - 3z + 3arctgz \right) \Big|_0^{e'} = \\ &= \frac{1}{2e'^5} \left(\frac{e'^3}{1+e'^2} - 3e' + 3arctge' \right). \end{aligned}$$

Тогда окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \Omega &= 2e'^2 \left[-\frac{1}{2e'^3} \left(\frac{e'}{1+e'^2} - arctge' \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2e'^5} \left(\frac{e'^3}{1+e'^2} - 3e' + 3arctge' \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{1+e'^2} + \frac{1}{e'} arctge' + \frac{1}{1+e'^2} - \frac{3}{e'^2} + \frac{3}{e'^3} arctge' = \\ &= \frac{1}{e'^3} (e'^2 + 3) arctge' - \frac{3}{e'^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

При заданных a, c и ω формула (25) позволяет вычислить плотность $\hat{\delta}$, обеспечивающую выполнение условия (24), т.е. то, что рассматриваемый эллипсоид действительно является уровенным. Еще раз подчеркнем, что плотность $\hat{\delta}$ -фиктивная. В самом деле, для Земли $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{с}^{-1}$ и $e' = 0.0820944$, тогда значение $\hat{\delta} = 7.10 \text{г}/\text{см}^3$, что значительно больше, чем действительная средняя плотность земных недр $\delta_{cp} = 5.51 \text{г}/\text{см}^3$. Это свидетельствует о том, что реальная Земля не является однородной фигуруй равновесия (эллипсоидом Маклорена), которой соответствует объемная плотность $\hat{\delta}$.

Является ли в этом случае решением проблемы Стокса для эллипсоида вращения потенциал

$$\hat{V} = \pi G \hat{\delta} a^2 c \int_u^{\infty} \left(1 - \frac{X^2+Y^2}{a^2+s} - \frac{Z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{c^2+s}}, \quad (26)$$

вычисляемый во внешней точке согласно формуле (23) ?

Потенциал (26) при выполнении условия (24) удовлетворяет краевому условию (22). Гравитационный потенциал (26) однородного эллипсоида есть функция всюду конечная и непрерывная вместе со своими первыми производными и гармоническая во внешнем пространстве. Однако, в связи с регулярностью его на бесконечности следует сделать принципиальное замечание. Дело в том, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \hat{V} = \frac{4}{3} \pi G \hat{\delta} a^2 c \neq GM,$$

так как произведение вычисленной фиктивной плотности $\hat{\delta}$ на объем эллипсоида, задаваемый по условию значениями полуосей, не будет равно заданной по условию же полной массе M Земли. Чтобы ликвидировать это несоответствие,

добавим к потенциалу (26) некоторую функцию, обеспечивающую выполнение требования регулярности потенциала на бесконечности:

$$V(X, Y, Z) = \hat{V}(X, Y, Z) + \lambda \pi G \hat{\delta} a^2 c K, \quad (27)$$

где

$$K = \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{c^2 + s}} = \frac{2}{ce'} \operatorname{arctg} \frac{ce'}{\sqrt{c^2 + u}},$$

а λ - постоянный множитель, которым следует распорядиться так, чтобы добиться искомой регулярности потенциала в бесконечно удаленной точке, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rV = \frac{4}{3}\pi G \hat{\delta} a^2 c = GM.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{M}{2\pi \hat{\delta} a^2 c} - \frac{2}{3}.$$

Таким образом, решение проблемы Стокса для эллипсоида вращения с полуосами a и c и массой M достигается потенциалом силы тяжести

$$W(X, Y, Z) = V(X, Y, Z) + \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2), \quad (28)$$

причем потенциал силы притяжения эллипсоида должен быть при этом вычислен по формуле (27).

6 Сила тяжести на поверхности уровенного эллипсоида. Формула Пицетти-Сомильяна.

В данном параграфе мы получим точную замкнутую формулу для вычисления нормальной силы тяжести γ на поверхности уровенного эллипсоида вращения (нормального эллипсоида), рассматриваемого в качестве первого приближения

к фигуре Земли. Эта формула может быть получена прямым дифференцированием потенциала (28), т.к.

$$\gamma_x = -\frac{\partial W}{\partial X}, \quad \gamma_y = -\frac{\partial W}{\partial Y}, \quad \gamma_z = -\frac{\partial W}{\partial Z},$$

где знак "минус" отражает факт противоположного направления силы и соответствующей координатной оси.

Вычисление компонент вектора нормальной силы тяжести начнем с его абсциссы:

$$\gamma_x = -\frac{\partial W}{\partial X} = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial X} - \lambda \pi G \hat{\delta} a^2 c \frac{\partial K}{\partial X} - \omega^2 X.$$

Учитывая (23), имеем: $-\partial \hat{V}/\partial X = 2PX$. Параметр K запишем в виде:

$$K = \int_u^\infty \frac{ds}{\sqrt{\psi(s)}}, \text{ где } \psi(s) = (a^2 + s)^2(c^2 + s).$$

Тогда

$$\frac{\partial K}{\partial X} = \frac{1}{\sqrt{\psi(u)}} \frac{\partial u}{\partial X}, \text{ а } \frac{\partial u}{\partial X} = -\frac{\partial f/\partial X}{\partial f/\partial u} = -\frac{2X}{(a^2 + u) \partial f/\partial u},$$

где неявная функция

$$f(X, u) = \frac{X^2 + Y^2}{a^2 + u} + \frac{Z^2}{c^2 + u} - 1 = 0.$$

Обозначим $F = \partial f/\partial u$. Дифференцируя, получим

$$F = \frac{X^2 + Y^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{Z^2}{(c^2 + u)^2}. \quad \text{Тогда } \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{2X}{(a^2 + u)F} \text{ и}$$

$$\frac{\partial K}{\partial X} = -\frac{2X}{(a^2 + u)F \sqrt{\psi(s)}}.$$

На поверхности S эллипсоида (при $u = 0$)

$$\frac{\partial K}{\partial X} \Big|_s = -\frac{2X}{a^2 F_0 \sqrt{a^4 c^2}}, \quad \text{где } F_0 = \frac{X^2 + Y^2}{a^4} + \frac{Z^2}{c^4}.$$

В итоге получаем для компонент вектора нормальной силы тяжести:

$$\gamma_x = 2PX + \frac{2\lambda\pi G\hat{\delta}}{a^2 F_0} X - \omega^2 X,$$

$$\gamma_y = 2PY + \frac{2\lambda\pi G\hat{\delta}}{a^2 F_0} Y - \omega^2 Y,$$

$$\gamma_z = 2RZ + \frac{2\lambda\pi G\hat{\delta}}{c^2 F_0} Z.$$

Из равенства (24) следует, что $\omega^2 = 2P - 2\frac{c^2}{a^2}R$. Тогда

$$\gamma_x = \frac{2\lambda\pi G\hat{\delta}}{a^2 F_0} X + 2\frac{c^2}{a^2} RX = HX,$$

$$\gamma_y = \frac{2\lambda\pi G\hat{\delta}}{a^2 F_0} Y + 2\frac{c^2}{a^2} RY = HY,$$

$$\gamma_z = 2RZ + \frac{2\lambda\pi G\hat{\delta}}{c^2 F_0} Z = \frac{a^2}{c^2} HZ,$$

где обозначено

$$H = 2\pi G\hat{\delta} \left(\frac{\lambda}{a^2 F_0} + 2\frac{c^2}{a^2} R' \right), \quad R' = \frac{R}{2\pi G\hat{\delta}}.$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} = H \sqrt{X^2 + Y^2 + \frac{a^4}{c^4} Z^2} = a^2 H \sqrt{F_0},$$

$$\text{т.к. } X^2 + Y^2 + \frac{a^4}{c^4} Z^2 = a^4 \left(\frac{X^2 + Y^2}{a^4} + \frac{Z^2}{c^4} \right) = a^4 F_0.$$

В F_0 введем геоцентрические сферические координаты ρ и φ внешней точки $P(X, Y, Z)$, исходя из

$$X^2 + Y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi, \quad Z^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi,$$

$$F_0 = \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{a^4} + \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{c^4} = \frac{\rho^2}{a^4} \left(\cos^2 \varphi + \frac{a^4}{c^4} \sin^2 \varphi \right).$$

Запишем уравнение уровняного эллипсоида вращения в сферических координатах:

$$\frac{\rho^2}{a^2} \left(\cos^2 \varphi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \varphi \right) = 1.$$

Делим F_0 на единицу слева и справа:

$$F_0 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi + \frac{a^4}{c^4} \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \varphi} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1 + \frac{a^4}{c^4} \tan^2 \varphi}{1 + \frac{a^2}{c^2} \tan^2 \varphi}.$$

Тангенсы геоцентрической φ и геодезической B широт связаны равенством:

$$\tan \varphi = \frac{c^2}{a^2} \tan B. \quad \text{Тогда, учитывая, что } 1 + \tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B},$$

имеем:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1 + \tan^2 B}{1 + \frac{c^2}{a^2} \tan^2 B} = \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 B (a^2 \cos^2 B + c^2 \sin^2 B)} = \\ &= \frac{1}{a^2 \cos^2 B + c^2 \sin^2 B}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= a^2 H \sqrt{F_0} = 2\pi G \hat{\delta} \cdot \left(\frac{\lambda}{F_0} + 2c^2 R' \right) \sqrt{F_0} = \\ &= 2\pi G \hat{\delta} \frac{\lambda a^2 \cos^2 B + \lambda c^2 \sin^2 B + 2c^2 R'}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + c^2 \sin^2 B}}.\end{aligned}$$

На экваторе при $B = 0$:

$$\gamma_e = 2\pi G \hat{\delta} \frac{\lambda a^2 + 2c^2 R'}{a},$$

а на полюсе при $B = 90^\circ$:

$$\gamma_p = 2\pi G \hat{\delta} \frac{\lambda c^2 + 2c^2 R'}{c}.$$

Тогда

$$\gamma = \frac{\gamma_e a \cos^2 B + \gamma_p c \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + c^2 \sin^2 B}}. \quad (29)$$

Формула (29) называется формулой Пицетти - Сомильяна (1929 г.) и представляет собой точное замкнутое выражение для нормальной силы тяжести на поверхности уровняного эллипсоида вращения.

С вычислительной точки зрения часто более удобной оказывается эквивалентная (29) формула

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 B}{\sqrt{1 - \alpha \sin^2 B}},$$

где $k = c\gamma_p/a\gamma_e$, так как

$$\begin{aligned}\gamma_e a \cos^2 B + \gamma_p c \sin^2 B &= \gamma_e a \cos^2 B + \gamma_e a \sin^2 B - \\ &- \gamma_e a \sin^2 B + \gamma_p c \sin^2 B = \\ &= \gamma_e a [1 - (\frac{c\gamma_p}{a\gamma_e}) \sin^2 B] = \gamma_e a (1 + k \sin^2 B),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \cos^2 B + c \sin^2 B &= a \cos^2 B + a \sin^2 B - \\ &- a \sin^2 B + c \sin^2 B = \\ &= a - (a - c) \sin^2 B = a(1 - \alpha \sin^2 B).\end{aligned}$$

Разложим равенство (29) в ряд, сохраняя вторые степени малых величин α и β порядка сжатия:

$$\alpha = \frac{a - c}{a}, \quad \beta = \frac{1}{\gamma_e} (\gamma_p - \gamma_e).$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_e \frac{a(1 - \sin^2 B) + a(1 - \alpha)(1 + \beta) \sin^2 B}{[a^2(1 - \sin^2 B) + a^2(1 - \alpha)^2 \sin^2 B]^{1/2}} = \\ &= \gamma_e [1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta) \sin^2 B][1 + (\alpha^2 - 2\alpha) \sin^2 B]^{-1/2} = \\ &= \gamma_e [1 + (\beta - \alpha - \alpha\beta) \sin^2 B][1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2\alpha) \sin^2 B + \\ &\quad + \frac{3}{8}(\alpha^2 - 2\alpha)^2 \sin^4 B - \dots] = \\ &= \gamma_e [1 + (\beta - \alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha^2) \sin^2 B + (\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2) \sin^4 B].\end{aligned}$$

Напомним, что $\sin^2 2B = 4 \sin^2 B \cos^2 B = 4 \sin^2 B - 4 \sin^4 B$, откуда $\sin^4 B = \sin^2 B - \frac{1}{4} \sin^2 2B$. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_e [1 + (\beta - \alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha^2) \sin^2 B + \\ &\quad + (\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2) \sin^2 B - \frac{1}{4}(\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2) \sin^2 2B].\end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta_1 = \frac{1}{4}(\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2)$$

и получим

$$\gamma = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B). \quad (30)$$

Формулу (30) иногда называют формулой Клеро второго порядка. Ограничиваясь в (30) малыми величинами первого порядка, получаем формулу Клеро первого порядка (21). Именно Клеро получил формулы (21) и (30), исходя из предположения о том, что Земля состоит из однородных концентрических эллипсоидальных слоев, плотность которых монотонно возрастает к центру. В отличие от этого, вывод формулы (30), осуществленный в настоящем параграфе, не требует предположений относительно внутреннего распределения масс и в согласии с теоремой Стокса базируется лишь на допущении, что Земля ограничена уровенной поверхностью потенциала силы тяжести, имеющей форму эллипсоида вращения.

7 Формулы нормальной силы тяжести.

Формулы (21) и (30) принято называть формулами нормальной силы тяжести или просто нормальными формулами. Они позволяют вычислять значение силы тяжести на эллипсоиде вращения, рассматриваемом как фигура Земли первого приближения.

Коэффициенты формулы нормальной силы тяжести начали получать по данным гравиметрических измерений в конце XIX века. Первыми определенными параметрами стали коэффициенты γ_e и β , а, следовательно, и сжатие земного эллипсоида α . Определение коэффициентов проводилось по методу наименьших квадратов, при этом в качестве наблюдае-

мой величины выступала реальная сила тяжести g , приведенная к уровню моря путем введения поправки за высоту точки наблюдения (так называемая "редукция в свободном воздухе"). Замена величины γ_0 (нормальная сила тяжести на поверхности эллипсоида) величиной g (реальная сила тяжести на уровне моря) вносит в нормальную силу тяжести ошибку порядка аномалии силы тяжести ($g - \gamma_0$). Предполагается, однако, что при большом числе измерений g эти ошибки будут вести себя случайным образом, а потому будут компенсироваться в процессе уравнивания методом наименьших квадратов. Что касается третьего коэффициента нормальной формулы β_1 , то по своей малости он не мог быть надежно определен по результатам гравиметрических измерений вместе с γ_e и β . Обычно β_1 отыскивается теоретически, исходя из априорных предположений о внутреннем строении Земли.

Многочисленные определения коэффициентов нормальных формул не отличались однозначностью, поскольку различные авторы использовали различный как в количественном, так и в качественном отношении исходный гравиметрический материал. Из множества нормальных формул, полученных различными авторами в разное время (см.[1, с.225]), приведем нормальную формулу Гельмерта, которая была принята в СССР, а теперь используется в России для вычисления нормальной силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида:

$$\gamma_0 = 978030(1 + 0.005302 \sin^2 B - 0.000007 \sin^2 2B)(\text{мГал}).$$

Формула получена в 1901 - 1909 гг. в результате обработки измерений силы тяжести g на 1603 гравиметрических пунк-

так. Формуле Гельмерта соответствует сжатие $\alpha = 1/298.3$, совпадающее со сжатием референц-эллипсоида Красовского.

Для сравнения с (31) приведем нормальную формулу силы тяжести, соответствующую Геодезической референцной системе 1967 (GRS 67), принятой XV Генеральной ассамблей Международного геодезического и геофизического Союза (1971 г.):

$$\gamma_0 = 978031.8(1 + 0.0053024 \sin^2 B - 0.0000059 \sin^2 2B) \text{ (мГал).}$$

Отметим, что все коэффициенты этой нормальной формулы определялись уже на основе спутниковых данных без привлечения результатов гравиметрических измерений.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос о вычислении значения $\gamma(P)$ нормальной силы тяжести в точке P , находящейся выше (или ниже) поверхности нормального эллипсоида. Обозначив высоту точки P над эллипсоидом символом H , запишем разложение в ряд:

$$\gamma(P) = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial n} H,$$

где γ_0 - вычисляемая по нормальной формуле нормальная сила тяжести на эллипсоиде, n - нормаль к нему, направление которой совпадает с направлением возрастания высоты H .

Производная $\partial \gamma / \partial n$ называется вертикальным градиентом нормальной силы тяжести и характеризует изменение последней вследствие изменения высоты. Вычислим значение градиента, приняв в сферическом приближении

$$\gamma = \frac{GM}{R^2}, \quad \text{тогда} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\frac{2GM}{R^3} = -\frac{2\gamma}{R},$$

где R - средний радиус Земли. Вводя численные значения, получим

$$\gamma(P) = (\gamma_0 - 0.3086H) \text{ (мГал),}$$

высота H здесь должна быть выражена в метрах. Максимальная погрешность полученной формулы оценивается величиной 0.00025 мГал/м. Более точное выражение для вертикального градиента нормальной силы тяжести имеет вид [5, с.124]:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -0.30855(1 + 0.00071 \cos 2B) \text{ (мГал/м).}$$

8 Фундаментальные геодезические параметры Нормальной Земли.

Нормальной Землей принято называть эллипсоид вращения, по форме и размерам наилучшим образом соответствующий планетарному геоиду. При подборе параметров Нормальной Земли следует соблюдать следующие независимые условия:

- 1) Геометрический центр Нормальной Земли должен совпадать с центром масс Земли, а его главная ось инерции совпадает с осью вращения Земли.

- 2) Нормальная Земля вращается с той же угловой скоростью ω , что и реальная Земля.

- 3) Масса Нормальной Земли должна быть равна массе реальной Земли.

- 4) Зональные гармонические коэффициенты второй степени Нормальной Земли и реальной Земли должны совпадать.

- 5) Большая полуось a Нормальной Земли должна быть подобрана так, чтобы нормальный потенциал на эллипсоиде U_0 был бы равен значению потенциала силы тяжести на ге-

оиде, т.е. $W_0 = U_0 = c_0$.

Таким образом, за фундаментальные геодезические постоянные, характеризующие Нормальную Землю, принимаются следующие независимые друг от друга величины:

- большая полуось a нормального эллипсоида,
- геоцентрическая гравитационная постоянная GM ,
- зональный коэффициент второй степени $J_2 = -C_{20}$,
- угловая скорость вращения Земли ω .

В настоящее время официальной референцной системой, рекомендованной Международной ассоциацией геодезии (МАГ), является геодезическая референцная система 1980 года GRS 80, принятая на XVII Генеральной ассамблее МГГС в 1979 году. В системе GRS 80 в качестве четырех фундаментальных констант приняты [4, с.23]:

$$a = 6378137 \text{ м},$$

$$GM = 3986.005 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \text{ сек}^{-2},$$

$$J_2 = 108263 \cdot 10^{-8},$$

$$\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ сек}^{-1}.$$

Заметим, что геоцентрическая постоянная GM включает и атмосферу Земли, значения же самих постоянных получены по спутниковым данным.

На основе принятых значений фундаментальных постоянных, пользуясь выведенными выше формулами, можно вычислить все интересующие нас другие постоянные Нормальной Земли. Так геодинамический параметр

$$q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} = 0.003467748,$$

а геометрическое сжатие α эллипсоида, согласно (17):

$$\alpha = -\frac{3}{2}C_{20} + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}(3J_2 + q) = 0.003352811 = 1/298.2572.$$

Далее по формуле (20) вычисляется нормальная сила тяжести на экваторе:

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left[1 + \alpha - \frac{3}{2}q \right] = 978032.7 \text{ мГал},$$

и по формуле (21) коэффициент β (гравиметрическое сжатие):

$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha = 0.00530244.$$

Тогда соответствующая системе GRS 80 формула нормальной силы тяжести принимает вид:

$$\gamma_0 = 978032.7(1 + 0.00530244 \sin^2 B - 0.0000058 \sin^2 2B) (\text{мГал}).$$

Резюмируя, еще раз напомним, что уровненный эллипсоид и его гравитационное поле представляют собой простую и удобную математическую модель, аппроксимирующую фигуру и гравитационное поле реальной Земли. Назначая в качестве фундаментальных параметров уровненного эллипсоида величины a , GM , J_2 и ω , можно строго вычислить прочие постоянные, характеризующие особенности его фигуры и гравитационного поля. При выполнении перечисленных выше условий, уровненный эллипсоид, описываемый соответствующими ему значениями постоянных, называют Нормальной Землей, которая принимается в геодезии как модель первого приближения к фигуре и гравитационному полю реальной Земли.

9 Заключение о силе тяжести и фигуре Земли.

В начале первого параграфа данного пособия (стр.2) сила тяжести определена нами как равнодействующая двух сил: силы притяжения и центробежной силы. Одновременно предполагается, что Земля вращается вокруг неизменной оси с постоянной угловой скоростью как абсолютно твердое тело. Понятно, что при выполнении этих условий определенная таким образом сила тяжести во всякой конкретной точке земной поверхности со временем меняться не будет.

В реальной обстановке значения силы тяжести определяются экспериментально, при этом измеряется равнодействующая не двух, но множества гравитационных и негравитационных сил, действующих на пробную массу, расположенную на поверхности Земли. Сила тяжести, понимаемая как результат взаимодействия пробной массы гравиметра со всеми массами Вселенной, будет изменяться со временем вследствие изменения скорости вращения Земли, перераспределения жидких, твердых и воздушных ее масс, а также изменения положения точки наблюдения относительно центра и главных осей инерции Земли и других небесных тел.

Высокая точность современных гравиметрических измерений заставляет считаться с проявлениями указанных геодинамических эффектов приливного и неприливного характера. Тем не менее, при обсуждении проблемы определения фигуры Земли в первом приближении под силой тяжести традиционно понимается неизменная во времени векторная сумма силы притяжения и центробежной силы. В этом случае в измеренную величину силы тяжести при необходимости можно ввести поправки, исключающие переменную ее соста-

вляющую.

Укажем далее, что временные вариации вектора силы тяжести и фигуры геоида в локальных областях предполагается рассмотреть в третьей части курса "Теория фигуры Земли и гравиметрия" и соответствующем этому разделу учебном пособии.

Завершая разговор о построении модели фигуры Земли первого приближения, полезно будет напомнить, что концептуально в роли фигуры Земли могут выступать следующие поверхности:

- 1) Физическая (топографическая) поверхность реальной Земли, включающая поверхность материков и поверхность Мирового океана. Эта поверхность чрезвычайно нерегулярна, плохо поддается математическому описанию, а также подвержена временным вариациям вследствие проявления приливных и неприливных геодинамических эффектов.
- 2) Геоид - замкнутая уровенная поверхность потенциала силы тяжести, совпадающая с невозмущенной поверхностью океанов и мысленно продолженная под континенты перпендикулярно к направлениям отвесных линий. Поверхность геоида в сравнении с физической поверхностью Земли имеет значительно более слаженную фигуру и тоже претерпевает изменения со временем.
- 3) Нормальная Земля, как правило выбирается в форме эллипсоида вращения, представляющего собой простую математическую модель, наиболее интенсивно используемую в практике геодезических работ. В настоящее время обычно предполагается, что уровенный эллипсоид нормального потенциала совпадает с общим земным эллипсоидом, относительно которого определяются и возмущающий потенциал

(а, следовательно, и фигура геоида), и геодезические координаты B, L, H пунктов земной поверхности. Нормальная фигура относимости не подвержена изменениям во времени.

Вместе с тем, с физической точки зрения наилучшей фигурой относимости для описания различных временных вариаций является гидростатическая фигура равновесия, совпадающая с поверхностями постоянной плотности, постоянного давления и постоянного потенциала силы тяжести. Для Земли фигура гидростатического равновесия по форме очень близка к эллипсоиду вращения и совпадает с ним с точностью до первого порядка малого его сжатия.

В течение более чем двух сотен лет, начиная с 1743 года, когда А.Клеро на основе теории гидростатического равновесия получил дифференциальное уравнение для изменения величины сжатия с увеличением глубины, теория гидростатически равновесных фигур являлась центральной темой теоретической геодезии: понятия "фигура равновесия" и "фигура Земли" были почти синонимами, а теория фигуры Земли как фигуры равновесия служила основой для определения сжатия земного эллипса.

Необходимость изучения фигуры геоида как уровенной поверхности потенциала силы тяжести впервые была сформулирована К.Гауссом, поскольку "Земля вообще не есть эллипсоид вращения, а вонообразно отклоняется от эллипсоида, описывающего ее в целом" (Гаусс, 1828 г.). В 1873 году И.Листингом был введен термин "геоид".

Определение понятия "фигура Земли" в виде ее физической поверхности было дано Г.Брунсом в 1878 году, однако утвердилось лишь в середине XX столетия, благодаря работам М.С.Молоденского. Молоденский показал, что для из-

учения физической поверхности Земли и ее внешнего гравитационного поля достаточно измерений, выполненных только на физической поверхности Земли, без проведения их редукции на поверхность геоида. Важная, глубокая и влиятельная теория Молоденского постулировала, что геодезия должна ограничиваться изучением только физической поверхности Земли и внешнего по отношению к ней гравитационного поля. Исследование же внутреннего строения Земли, включая внутреннее поле силы тяжести, является задачей геофизики.

На протяжении полувека плодотворные идеи Молоденского играли в геодезии доминирующую роль. Однако на современном этапе развития науки и техники мы являемся свидетелями стремительного изменения установленных представлений. Неуклонно возрастающее взаимодействие между геодезией и геофизикой ведет к стиранию сложившихся ранее границ и вынуждает геодезистов обращаться к процессам, происходящим в недрах Земли. Прецизионная точность современных геодезических измерений предоставляет возможность экспериментального изучения неравномерности вращения Земли, тектоники литосферных плит, приливных и не-приливных (в том числе антропогенных) геодинамических эффектов. В этих условиях основой теории изменяющейся со временем фигуры Земли снова становится теория фигур гидростатически равновесных вращающихся масс.

Отметим в этой связи, что модель фигуры Земли первого приближения - Нормальная Земля установлена с точностью до семи значащих цифр. Понятно, что построение соответствующей ей по точности модели внутреннего строения Земли требует исследования внутренних уровенных поверхно-

стей потенциала силы тяжести. Это вновь возвращает нас к давней геодезической традиции, заложенной еще работами Клеро, утверждавшего, что внешнее и внутреннее поля силы тяжести, их источники и распределение плотности в теле Земли связаны нераздельно и потому должны изучаться совместно.

Литература

- [1] Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. - М., Наука, 1976.
- [2] Машимов М.М. Высшая геодезия. Методы изучения фигуры Земли и создания общеземной системы геодезических координат. - М., Изд. ВИА, 1991.
- [3] Мещеряков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. - М., Наука, 1991.
- [4] Мориц Г. Фигура Земли: теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. - Киев, 1994.
- [5] Шимбиров Б.П. Теория фигуры Земли. - М., Недра, 1975.