Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

# ИНТЕГРАЛЫ
# И
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Учебно-методическое пособие*
*для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения*
*по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров*

**Набережные Челны**
**2024**

**УДК 51 (076)**

**Интегралы и дифференциальные уравнения.** *Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров.* /Составитель: ***Углов А.Н.*** -Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2024, 75с.

Учебно-методическое пособие составлено на основании требований Государственных образовательных стандартов высшего образования для студентов инженерно-технических направлений подготовки бакалавров. Разработано на кафедре «Математика» и предназначено для использования в учебном процессе студентами заочной формы обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано и для самостоятельной работы студентами очной и очно-заочной форм обучения.

Учебно-методическое пособие включает в себя разделы: неопределённый интеграл, определённый интеграл, несобственные интегралы, дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков, системы дифференциальных уравнений.

В учебно-методическом пособии изложены цели и задачи дисциплины, её содержание, методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы; приведены задания для индивидуальной контрольной работы и теоретические вопросы к экзамену (зачёту); указана рекомендуемая литература. В приложениях приведены: образец решения контрольных задач типового варианта, краткие теоретические сведения, необходимые для решения практических задач, образец оформления обложки тетради с индивидуальной контрольной работой, таблица номеров выполняемых заданий.

**УДК 51 (076)**

## 1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Целью освоения дисциплины «Интегралы и дифференциальные уравнения» является - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными задачами дисциплины являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода решения реальных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных естественнонаучных и технических задач с использованием математического аппарата данной дисциплины;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики в объёме курса средней школы, а также понятий и методов предшествующих ей дисциплин «Аналитическая геометрия» и «Математический анализ». Дисциплина является предшествующей для освоения следующих за ней математических дисциплин и большинства естественнонаучных и технических дисциплин, использующих математический аппарат.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать: базовые понятия интегрального исчисления функции одной переменной, дифференциальных уравнений и их систем;
- уметь: использовать математический аппарат в профессиональной деятельности; проводить расчёты на основе построенных математических моделей;
- владеть: методами интегрального исчисления функции одной переменной, дифференциальных уравнений и их систем; навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач.

Изучение  дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу. На лекциях излагается теоретический материал. Прослушав лекцию, студент должен ознакомиться с более подробным изложением материала в учебниках из списка рекомендуемой литературы. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью индивидуальных контрольных работ и экзамена(зачёта).

## 2. Содержание и структура дисциплины.

### 2.1. Содержание дисциплины (наименование и номера тем).

**Раздел I. Интегральное исчисление функции одной переменной.**

**Тема. Неопределённый интеграл.**

Первообразная функция, её свойства. Неопределённый интеграл, условия его существования, свойства. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование; интегрирование заменой переменной, интегрирование по частям. Неправильные и правильные рациональные дроби. Разложение правильной дроби на простые. Интегрирование простых, правильных, неправильных рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений.

**Тема. Определённый интеграл.**

Определённый интеграл, условия его существования, геометрический смысл и свойства. Оценка интеграла и формулы среднего значения. Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле. Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объёмов тел.

**Тема. Несобственные интегралы.**

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования и от неограниченной функции. Понятие абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов.

**Раздел II. Дифференциальные уравнения.**

**Тема. Дифференциальные уравнения первого порядка.**

Понятие дифференциального уравнения (ДУ). ДУ 1-ого порядка, основные сведения о них (формы записи, решение, начальные условия, общее и частное решения). Задача Коши. ДУ с разделёнными и разделяющимися переменными. Однородное ДУ. Линейное ДУ и уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах.

**Тема. Дифференциальные уравнения высших порядков.**

ДУ порядка $n$, основные сведения о них (формы записи, решение, начальные условия, общее и частное решения). Задача Коши. ДУ порядка $n$, допускающие понижение порядка. Линейное ДУ порядка $n$. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определитель Вронского. Условия линейной зависимости и независимости систем функций. Фундаментальная система решений (ФСР). Структура общего решения ЛДУ порядка $n$. Принцип суперпозиции частных решений. Однородные и неоднородные ЛДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Нахождение ФСР и общего решения ОЛДУ для различных типов корней характеристического уравнения. Нахождение частного и общего решений НЛДУ в случае специальной правой части уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.

**Тема. Системы дифференциальных уравнений.**

Нормальная система ДУ, основные сведения о них (формы записи, решение, начальные условия, общее и частное решения). Задача Коши. Понятия фазового пространства, фазовой траектории, точки покоя, устойчивости решения нормальной системы ДУ. Нахождение решения нормальной системы ДУ методом исключения. Линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Точки покоя однородной линейной системы ДУ с постоянными коэффициентами, их классификация и устойчивость.

## 3. Рекомендуемая литература:

### Основная литература:

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник для бакалавров. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. -960с. ISBN: 978-5-8114-0445-2.
2. Задачник по высшей математике для вузов : учебное пособие / В. Н. Земсков [и др.] ; под ред. А. С. Поспелова. - 3-е изд., стер .- Екатеринбург : Изд-во АТП, 2015 .- 512 с : ил. - (Учебник для вузов. Специальная литература) .- Прил.: с. 498-509 .- В пер .- ISBN 978-5-8114-1024-9.
3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр. - Москва : Айрис-пресс, 2011. - 608 с : граф. - (Высшее образование). - Прил.: с. 599-603. - В пер. - ISBN 978-5-8112-4351-8.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учебник / Г. М. Фихтенгольц. - 12-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2020. - Часть 1. - 2020. - 444 с. - ISBN 978-5-8114-5338-2. - URL: https://e.lanbook.com/book/139261.
5. Шипачёв В.С. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник / В.С. Шипачёв. – Москва: ИНФРА-М, 2018. -479 с. – (Высшее образование). – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=945790.

### Дополнительная литература:

1. Антонов В.И., Копелевич Ф.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. –СПб.:Изд-во «Лань», 2013. -112с. ISBN: 978-5-8114-1413-0.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Учеб. пособие для вузов. Часть I: -М: Высшая школа, 2008. -304с.
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу : учебное пособие / Г. И. Запорожец. - 8-е изд.,стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2014. - 464 с. - ISBN 978-5-8114-0912-9. - URL: https://e.lanbook.com/book/149
4. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)
5. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.С. Шипачёв. –10-е изд., стереотип. - Москва: ИНФРА-М, 2018. -304 с. – (Высшее образование). – Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=927763.

## 4. Методические указания по изучению дисциплины.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить одну контрольную работу (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

**1.** Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

**2.** На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).

**3.** Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

**4.** Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5).*

**5.** Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.

**6.** В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

**7.** Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

**8.** Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

**9.** Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.

**10.** В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

## 5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене (зачёте) студент должен показать знание теоретических основ дисциплины в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

## 5.1 Задания для контрольной работы.

### <u>Раздел I. Интегральное исчисление функции одной переменной.</u>

**1-10.** Найти неопределённые интегралы непосредственным интегрированием:

**1. а)** $\int\left(\frac{2}{x}-3x^2+\frac{4\sqrt{x}}{x^3}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

**2. а)** $\int\left(\frac{2\sqrt{x}+x^4-3x^2}{x^3}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{8x^2+2}$

**3. а)** $\int\left(\frac{4}{x}+5x^4-\frac{3\sqrt[3]{x}}{x^2}+\sqrt[4]{x^5}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$

**4. а)** $\int\left(4x^3-\frac{2x^2}{x^5}+\frac{3}{x}+6\sqrt{x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{9x^2+3}$

**5. а)** $\int\left(6x^2+\frac{5\sqrt{x}}{x^3}-\frac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$

**6. а)** $\int\left(10x^4-\frac{9x}{x^2}+\sqrt[5]{x^3}+3\sqrt{x^5}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{6x^2-4}$

**7. а)** $\int\left(8x^3-\frac{2}{x}+\frac{6\sqrt{x}}{x^2}-4\cdot\sqrt[3]{x}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{2-4x^2}}$

**8. а)** $\int\left(6x^2-\frac{3}{x^2}+\frac{4x^2}{x^3}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx$ **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

**9. а)** $\int \left( 4x^3 + \frac{5x^2}{x^4} - \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} \right) dx$ **б)** $\int \frac{dx}{4x^2+3}$

**10. а)** $\int \left( 4x^3 - \frac{2x^2}{x^3} - \frac{5}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[4]{x^5} \right) dx$ **б)** $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2+7}}$

**11-20.** Найти неопределённые интегралы заменой переменной интегрирования:

**11. а)** $\int (1-4x)^4 dx$ **б)** $\int \sin(9x+7) dx$ **в)** $\int \frac{tg(x+1)dx}{\cos^2(x+1)}$

**12. а)** $\int \sqrt[3]{(1+x^2)}\, dx$ **б)** $\int \cos(10x+3) dx$ **в)** $\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x)^2}$

**13. а)** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$ **б)** $\int e^{9x+1} dx$ **в)** $\int \frac{\ln(x^2)\, dx}{x}$

**14. а)** $\int (1+4x)^5 dx$ **б)** $\int \sin(8x+3) dx$ **в)** $\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

**15. а)** $\int \sqrt[3]{5-2x}\, dx$ **б)** $\int \cos(7x+4) dx$ **в)** $\int \frac{x^3 dx}{x^4+1}$

**16. а)** $\int \frac{dx}{(2+3x)^4}$ **б)** $\int e^{6x+5} dx$ **в)** $\int \frac{\ln(x-1)}{x-1} dx$

**17. а)** $\int (3-2x)^5 dx$ **б)** $\int \sin(5x+4) dx$ **в)** $\int \frac{4arctgx}{1+x^2} dx$

**18. а)** $\int \sqrt[4]{2+3x}\, dx$ **б)** $\int \cos(4x+3) dx$ **в)** $\int \frac{xdx}{x^4+1}$

**19. а)** $\int \frac{dx}{(4+3x)^5}$ **б)** $\int e^{3x+5} dx$ **в)** $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x}$

**20. а)** $\int (5-4x)^6 dx$ **б)** $\int \sin(2x+3) dx$ **в)** $\int \frac{arctg^4 x}{1+x^2} dx$

**21-30.** Найти неопределённые интегралы интегрированием по частям:

**21. а)** $\int (4-3x)e^{-3x}dx$ **б)** $\int arctg\sqrt{4x-1}\,dx$

**22. а)** $\int (2x+3)\cos 4x dx$ **б)** $\int \ln(x^2+4)dx$

**23. а)** $\int (4-16x)\sin 4x dx$ **б)** $\int \arcsin 3x\,dx$

**24. а)** $\int (3x+4)e^{3x}dx$ **б)** $\int \frac{\ln x\,dx}{x^3}$

**25. а)** $\int (5x+6)\cos 2x dx$ **б)** $\int arctg\sqrt{2x-1}\,dx$

**26. а)** $\int (x+5)\sin 3x dx$ **б)** $\int x^4\cdot\ln x\,dx$

**27. а)** $\int (1-6x)e^{2x}dx$ **б)** $\int \arcsin 5x\,dx$

**28. а)** $\int (3x-2)\cos 5x dx$ **б)** $\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}}$

**29. а)** $\int (2-4x)\sin 2x dx$ **б)** $\int \arcsin 8x\,dx$

**30. а)** $\int (2x-5)e^{3x}dx$ **б)** $\int (5x-2)\ln x\,dx$

**31-40.** Найти неопределённый интеграл от выражений вида:

$$\frac{P_n(x)}{ax+b},\ \frac{x}{ax^2+b},\ \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}},\ \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},\ \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

**31. а)** $\int \frac{xdx}{3-2x}$ **б)** $\int \frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$ **в)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

**32. а)** $\int \frac{xdx}{3x+9}$ **б)** $\int \frac{xdx}{7x^2-4}$ **в)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

**33. а)** $\int \frac{xdx}{2-3x}$ **б)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$ **в)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$

**34. а)** $\int \frac{xdx}{1-4x}$ **б)** $\int \frac{4xdx}{\sqrt{3-4x^2}}$ **в)** $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x-15}$

**35. а)** $\int \frac{xdx}{2+3x}$ **б)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}}$ **в)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

**36. а)** $\int \frac{xdx}{2-5x}$ **б)** $\int \frac{2xdx}{\sqrt{8x^2-9}}$ **в)** $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x-12}$

**37. а)** $\int \frac{xdx}{3x-2}$ **б)** $\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$ **в)** $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x-8}$

**38. а)** $\int \frac{xdx}{2x+3}$ **б)** $\int \frac{xdx}{5x^2+4}$ **в)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+6x+20}}$

**39. а)** $\int \frac{xdx}{3x-4}$ **б)** $\int \frac{xdx}{3-9x^2}$ **в)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

**40. а)** $\int \frac{xdx}{4-3x}$ **б)** $\int \frac{2xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$ **в)** $\int \frac{xdx}{x^2-4x+13}$

**41-50.** Найти неопределённые интегралы от рациональной дроби:

**41. а)** $\int \frac{(2x-1)dx}{x(2x+1)}$ **б)** $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$

**42. а)** $\int \frac{(x+2)dx}{(x-2)(x+3)}$ **б)** $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$

**43. а)** $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+3)}$ **б)** $\int \frac{(x^3+2x^2+3)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

**44. а)** $\int \frac{4x^2+24x+8}{x(x-2)(x+4)}dx$ **б)** $\int \frac{(x^3-17)dx}{x^2-4x+3}$

**45. а)** $\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)(x+6)}$ **б)** $\int \frac{(2x^3-1)dx}{x^2+x-6}$

**46. а)** $\int \frac{(x-2)dx}{(x+2)(x+5)}$ **б)** $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$

**47. а)** $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ **б)** $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$

**48. а)** $\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x+3)}$ **б)** $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx$

**49. а)** $\int \frac{dx}{x(3x+5)}$ **б)** $\int \frac{x^3dx}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

**50. а)** $\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)(x+1)}$ **б)** $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$

**51-60.** Найти неопределённые интегралы от тригонометрического выражения:

**51. а)** $\int \sin^4 x\cdot\cos^5 x\,dx$ **б)** $\int \sin^4 2x\,dx$ **в)** $\int \sin 3x\cdot\cos 5x\,dx$

**52. а)** $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ **б)** $\int \sin^2 2x\cdot\cos^2 2x\,dx$ **в)** $\int \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx$

**53. а)** $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x-6\sin x+12}$ **б)** $\int \cos^4 2x\,dx$ **в)** $\int \cos 3x\cdot\cos 5x\,dx$

**54. а)** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ **б)** $\int \sin^4 3x\,dx$ **в)** $\int \sin 2x\cdot\cos 4x\,dx$

**55. а)** $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$ **б)** $\int \cos^4 3x\,dx$ **в)** $\int \sin 2x\cdot\sin 4x\,dx$

**56. а)** $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^6 x}$ **б)** $\int \sin^2 3x\cdot\cos^2 3x\,dx$ **в)** $\int \cos 2x\cdot\cos 4x\,dx$

**57. а)** $\int \sin^2 x\cdot\cos^5 x\,dx$ **б)** $\int \sin^2 4x\,dx$ **в)** $\int \sin 3x\cdot\cos 7x\,dx$

**58. а)** $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$ **б)** $\int \sin^2 4x\cos^2 4x\,dx$ **в)** $\int \sin 3x\cdot\sin 7x\,dx$

**59. а)** $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$ **б)** $\int \cos^2 4x\,dx$ **в)** $\int \sin x\cdot\cos 3x\,dx$

**60. а)** $\int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x+6\cos^2 x}$ **б)** $\int \sin^4 4x\,dx$ **в)** $\int \cos 3x\cdot\cos 7x\,dx$

**61-70.** Найти неопределённые интегралы от иррационального алгебраического выражения:

**61.** а) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$ б) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$

**62.** а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

**63.** а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$ б) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$

**64.** а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$

**65.** а) $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

**66.** а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$

**67.** а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ б) $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

**68.** а) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}-1}dx$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$

**69.** а) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}dx$ б) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$

**70.** а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

**71-80.** Вычислить определённые интегралы:

**71.** а) $\int_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx$ б) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4+x^2}\,dx}{x^3}$

**72. а)** $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx$ **б)** $\int\limits_0^1 x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$

**73. а)** $\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx$ **б)** $\int\limits_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$

**74. а)** $\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$ **б)** $\int\limits_0^{3/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

**75. а)** $\int\limits_1^2 \frac{4x+2}{2x-1}\,dx$ **б)** $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{(5-x^2)\sqrt{5-x^2}}$

**76. а)** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ **б)** $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x^4}$

**77. а)** $\int\limits_1^0 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ **б)** $\int\limits_0^1 x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$

**78. а)** $\int\limits_2^{14} \frac{5x\,dx}{\sqrt{x+2}}$ **б)** $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

**79. а)** $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$ **б)** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)\sqrt{16+x^2}}$

**80. а)** $\int\limits_{-2}^1 x^2\cdot\sqrt{1-x^3}\,dx$ **б)** $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$

**81-90.** Вычислить несобственный интеграл I-ого рода или установить его расходимость:

**81.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{arctgx\,dx}{1+x^2}$ **82.** $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ **83.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

**84.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ **85.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{3x^2\,dx}{1+x^6}$ **86.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

**87.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ **88.** $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ **89.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^3}$

**90.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{arctg^2 x\,dx}{1+x^2}$

**91-100.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

**91.** $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$ **92.** $x=(y-2)^3$, $x=4y-8$

**93.** $y=5-x^2$, $y=x-1$ **94.** $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$

**95.** $y=\sin x\cos^2 x$, $y=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ **96.** $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$

**97.** $y=\cos x\sin^2 x$, $y=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ **98.** $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$

**99.** $y=x^2-5$, $y=1-x$ **100.** $y=x^2+4x$, $y=x+4$

**101-110.** Вычислить длину дуги кривой, заданной указанным уравнением:

**101.** $y=\ln x$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$ **102.** $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 15/16$

**103.** $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\le x\le 7/9$ **104.** $y=\ln\left(\frac{5}{2x}\right)$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

**105.** $y=-\ln\cos x$, $0\le x\le\pi/6$ **106.** $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$, $0\le x\le 8/9$

**107.** $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $\frac{1}{4}\le x\le 1$ **108.** $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 3$

**109.** $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $0\le x\le 1/4$ **110.** $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 2$

**111-120.** Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной графиками указанных функций.

**111.** $y=-x^2+5x-6$, $y=0$ **112.** $y=2x-x^2$, $y=4x-2x^2$

**113.** $y=3\sin x$, $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$ **114.** $y=x^2$, $y^2=x$

**115.** $y=5\cos x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x\ge 0$ **116.** $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$

**117.** $y=\sin^2 x$, $x=\pi/2$, $y=0$ **118.** $y=x^3+2$, $x=1$, $y=1$

**119.** $y=x^2$, $y=1$, $x=2$ **120.** $y=2x-x^2$, $y=-x+2$

**Раздел II. Дифференциальные уравнения.**

**1-10.** Найти общий интеграл ДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

**1.** $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$ **2.** $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$

**3.** $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$ **4.** $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$

**5.** $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$ **6.** $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$

**7.** $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy$ **8.** $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$

**9.** $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$ **10.** $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$

**11-20.** Найти: **а)** общий интеграл однородного ДУ первого порядка; **б)** общий интеграл ДУ первого порядка, приводящегося к однородному ДУ первого порядка:

**11. а)** $y'=\dfrac{y-x}{x}$ **б)** $y'=\dfrac{x+2y-3}{2x-2}$

**12. а)** $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ **б)** $y'=\dfrac{x+y-2}{2x-2}$

**13. а)** $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$ **б)** $y'=\dfrac{-x+3y-4}{3x+3}$

**14. а)** $x(y'+e^{y/x})=y$ **б)** $y'=\dfrac{2y-2}{x+y-2}$

**15. а)** $xy\cdot y'=y^2+2x^2$ **б)** $y'=\dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$

**16. а)** $y'=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$ **б)** $y'=\frac{2x+y-3}{x-1}$

**17. а)** $(x-y)+(x+y)y'=0$ **б)** $y'=\frac{x+7y-8}{9x-y-8}$

**18. а)** $xy'=y+x\cdot tg\,\frac{y}{x}$ **б)** $y'=\frac{x+3y+4}{3x-6}$

**19. а)** $(y+\sqrt{xy})=xy'$ **б)** $y'=\frac{3y+3}{2x+y-1}$

**20. а)** $xy'=y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ **б)** $y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3}$

**21-30.** Найти решение задачи Коши для линейного ДУ первого порядка:

**21.** $y'-\frac{y}{x}=x^2,\ y(1)=0$ **22.** $y'-y\cdot ctgx=2x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

**23.** $y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ y(0)=0$ **24.** $y'+\frac{y}{2x}=x^2,\ y(1)=1$

**25.** $y'+y\cdot ctgx=\cos^2 x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ **26.** $y'-\frac{y}{x}=x\sin x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

**27.** $y'-\frac{y}{x+2}=x^2+2x,\ y(-1)=\frac{3}{2}$ **28.** $y'+\frac{y}{x}=\sin x,\ y(\pi)=\frac{1}{\pi}$

**29.** $y'-\frac{1}{x+1}=e^{x}(x+1),\ y(0)=1$ **30.** $y'+\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{2x^2}{1+x^2},\ y(0)=\frac{2}{3}$

**31-40.** Найти решение задачи Коши для ДУ Бернулли:

**31.** $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2,\ y(0)=1$.

**32.** $xy'+y=2y^2\ln x,\ y(1)=1/2$.

**33.** $2(xy'+y)=xy^2,\ y(1)=2$.

**34.** $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2$, $y(0) = 1$.

**35.** $xy' - y = -y^2 (\ln x + 2)\ln x$, $y(1) = 1$.

**36.** $2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x} y^2$, $y(0) = 2$.

**37.** $3(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 3$.

**38.** $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x)$, $y(0) = 1$.

**39.** $y' + 4x^3 y = 4(1 - x^3)e^{4x} y^2$, $y(0) = -1$.

**40.** $3y' + 2xy = 2xe^{-2x^2} y^{-2}$, $y(0) = -1$.

**41-50.** Найти общий интеграл для ДУ в полных дифференциалах (предварительно в этом убедившись):

**41.** $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$.

**42.** $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\left(\frac{2x}{y}\right)\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\left(\frac{2x}{y}\right)dy = 0$.

**43.** $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$.

**44.** $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$.

**45.** $\left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + \left(2xy + tgx\right)dy = 0$.

**46.** $(3x^2 y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$.

**47.** $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$.

**48.** $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \left(\frac{2y}{x^3}\right)dy = 0$.

**49.** $\left(\sin 2x - 2\cos(x + y)\right)dx - 2\cos(x + y)dy = 0$.

**50.** $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$.

**51-60.** Найти общее решение простейшего дифференциального уравнения порядка $n$, допускающего понижение порядка $y^{(n)}(x) = f(x)$:

**51.** $y'' = 2x + \sin 3x$ **52.** $y'' = \dfrac{4}{x^3}$ **53.** $y'' = e^{2x}$

**54.** $y'' = \sin 2x$ **55.** $y'' = 4 + \cos 2x$ **56.** $y'' = 2x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

**57.** $y'' = \sin 4x$ **58.** $y'' = 3x + 2$ **59.** $y'' = 3 - \sin 4x$

**60.** $y'' = \cos 5x$

**61-70.** Найти: **а)** общее решение ДУ порядка $n$, допускающего понижение порядка до первого; **б)** решение задачи Коши для ДУ порядка $n$, допускающего понижение порядка до первого:

**61. а)** $y''' x \ln x = y''$ **б)** $y^3 y'' + 1 = 0$, $y(1) = -1, y'(1) = -1$.

**62. а)** $tgx \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$ **б)** $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1, y'(0) = 8$.

**63. а)** $2xy''' = y''$ **б)** $y'' y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4, y'(0) = 2$.

**64.а)** $xy''' + y'' = x + 1$ **б)** $y'' + 2\sin y \cdot \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

**65. а)** $xy''' + y'' = 1$ **б)** $y'' = 32\sin^3 y \cdot \cos y$, $y(1) = \pi/2, y'(1) = 4$.

**66. а)** $x^2 y'' + xy' = 1$ **б)** $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1, y'(1) = 7$.

**67. а)** $y''' ctg 2x + 2y'' = 0$ **б)** $y^3 y'' + 49 = 0$, $y(3) = -7, y'(3) = -1$.

**68. а)** $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$ **б)** $4y^3 y'' = 16y^4 - 1$, $y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

**69. а)** $tgx \cdot y''' = 2y''$ **б)** $y'' + 8\sin y \cdot \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

**70. а)** $ctg 2x \cdot y''' = 2y''$ **б)** $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1, y'(2) = 6$.

**71-80.** Найти общее решение однородного ЛДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$:

**71.** $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

**72.** $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

**73.** $y''-7y'=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

**74.** $y''-5y'+6y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

**75.** $y''-2y'+5y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

**76.** $y''-4y'+4y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

**77.** $y''+7y'=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

**78.** $y''+2y'+10y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

**79.** $y''+y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

**80.** $y''-4y'+3y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

**81-90.** Найти общее решение неоднородного ЛДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида:

**81.** $y''-4y'+4y=x^2$ **82.** $y''+2y'+5y=-\sin 2x$

**83.** $y''-7y'=(x-1)^2$ **84.** $y''-5y'+6y=2\cos x$

**85.** $y''-2y'+5y=x^2+1$ **86.** $y''-4y'+4y=-x^2+3x$

**87.** $y''+7y'=e^{-7x}$ **88.** $y''+2y'+10y=-\sin 2x$

**89.** $y''+y=2\cos 4x+3\sin 4x$ **90.** $y''-4y'+3y=e^{5x}$

**91-100.** Найти общее решение ЛДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида методом суперпозиции частных решений.

**91.** $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x+x\cdot e^{x}$ **92.** $y''-2y'+y=4e^{x}+e^{-x}\sin x$

**93.** $y''+4y=-8\sin 2x+32\cos 2x+4e^{2x}$ **94.** $y''-2y'=e^{2x}+e^{-2x}$

**95.** $y''-8y'-9y=(2x+1)e^{4x}\sin 5x$ **96.** $y''-5y'+6y=x\cdot e^{2x}-3x$

**97.** $y''-4y'+4y'=(x-1)e^{x}+e^{2x}\sin 6x$ **98.** $y''-y'=2e^{x}+\cos x$

**99.** $y''+4y'-5y=2x^3e^{-2x}\sin 3x$ **100.** $y''-2y'+10y=\sin 3x+e^{x}$

**101-110.** Найти решение задачи Коши для ЛДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.

**101.** $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

**102.** $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3 - \ln 8$

**103.** $y'' + 4y = 8ctg\,2x, \quad y(\pi/4) = 5,\ y'(\pi/4) = 4$

**104.** $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}, \quad y(1/2) = 1,\ y'(1/2) = \pi^2/2$

**105.** $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + \ln 4,\ y'(0) = 6\ln 2$

**106.** $y'' + y = 4ctgx, \quad y\left(\pi/2\right) = 4,\ y'\left(\pi/2\right) = 4$

**107.** $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

**108.** $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

**109.** $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}, \quad y(0) = 4\ln 4,\ y'(0) = 9\ln 4 - 3$

**110.** $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

**111-120.** Найти: а) общее решение однородной системы ДУ; б) общее решение неоднородной системы ДУ.

**111. а)** $\begin{cases} x'(t) = x - 2y \\ y'(t) = x + 4y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = y - \cos t \\ y'(t) = -x + \sin t \end{cases}$

**112. а)** $\begin{cases} x'(t) = x - 3y \\ y'(t) = x + 5y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = -y + e^{3t} \\ y'(t) = -x + 2e^{3t} \end{cases}$

**113. а)** $\begin{cases} x'(t) = 3x + y \\ y'(t) = -4x - 2y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = 3x - 4y + e^{-2t} \\ y'(t) = x - 2y - 3e^{-2t} \end{cases}$

**114. а)** $\begin{cases} x'(t) = 3x - 2y \\ y'(t) = 2x - 3y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = -x + 2y + 1 \\ y'(t) = -2x + 3y \end{cases}$

**115. а)** $\begin{cases} x'(t) = x - 2y \\ y'(t) = x + 3y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = y - 5\cos t \\ y'(t) = 2x + y \end{cases}$

**116. а)** $\begin{cases} x'(t) = -3x - y \\ y'(t) = x - y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = 2x - y \\ y'(t) = -2x + y + 18t \end{cases}$

**117. а)** $\begin{cases} x'(t) = -7x + y \\ y'(t) = -2x - 5y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = 2x - 4y \\ y'(t) = x - 3y + 3e^{t} \end{cases}$

**118. а)** $\begin{cases} x'(t) = 3x + 8y \\ y'(t) = -x - 3y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = 2x + 4y - 8 \\ y'(t) = 3x + 6y \end{cases}$

**119. а)** $\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -x \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = 2x - y \\ y'(t) = -x + 2y - 5e^{t} \end{cases}$

**120. а)** $\begin{cases} x'(t) = x + 5y \\ y'(t) = -x - 3y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'(t) = 4x + 6y \\ y'(t) = 2x + 3y + t \end{cases}$

## 5.2. Вопросы к экзамену (зачёту).

**<u>Раздел I. Интегральное исчисление функции одной переменной.</u>**

1. Первообразная функция, её свойства.
2. Неопределённый интеграл, условия его существования и свойства.
3. Таблица основных неопределённых интегралов. Непосредственное интегрирование.
4. Интегрирование заменой переменной; интегрирование по частям.
5. Нахождение интегралов вида:

**а)** $\int \frac{P_n(x)}{ax+b}dx$ **б)** $\int \frac{x\,dx}{ax^2+b}$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ **в)** $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

6. Неправильная и правильная рациональные дроби, разложение правильной дроби на простые.
7. Интегрирование простых, правильных и неправильных рациональных дробей.
8. Вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Универсальная тригонометрическая подстановка и ее применение. Частные тригонометрические подстановки.
9. Вычисление интегралов вида: **а)** $\int \sin^{2n}(kx)\cdot\cos^{2m}(kx)dx$, где $m, n \geq 0$; **б)** $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$.
10. Вычисление интегралов вида $\int R\left(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, \ldots, (ax+b)^{m_k/n_k}\right)dx$
11. Вычисление интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.
12. Определенный интеграл как предел интегральной суммы, его геометрический смысл. Условия существования определённого интеграла.
13. Основные свойства определенного интеграла. Оценивание интеграла. Формула среднего значения.
14. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.
15. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле.
16. Интегрирование периодических функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.
17. Интегрирование чётных и нечётных функций на отрезке симметричном относительно начала координат.
18. Площадь плоской фигуры и её вычисление с помощью определённого интеграла.
19. Длина дуги кривой и её вычисление с помощью определённого интеграла.
20. Объем тела и его вычисление с помощью определенного интеграла. Объём тела вращения.

21. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования, признаки их сходимости и расходимости.
22. Несобственные интегралы от неограниченных функций, признаки их сходимости и расходимости.
23. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

**Раздел II. Дифференциальные уравнения.**

24. Понятие дифференциального уравнения первого порядка, различные формы его записи. Решение, начальные условия, общее и частное решения ДУ первого порядка.
25. Задача Коши и теорема Коши (без вывода) для ДУ первого порядка.
26. Графическое построение решений ДУ с помощью изоклин.
27. ДУ с разделёнными и разделяющимися переменными, их решение.
28. Однородные ДУ первого порядка, их решение.
29. ДУ первого порядка, приводящие к однородным.
30. Линейное ДУ первого порядка и его решение.
31. Уравнение Бернулли.
32. ДУ первого порядка в полных дифференциалах.
33. Дифференциальное уравнение порядка n, различные формы его записи. Решение, начальные условия, общее и частное решения ДУ порядка n.
34. Задача Коши и теорема Коши (без вывода) для ДУ порядка n.
35. ДУ порядка n, допускающие понижение порядка, их решение.
36. Понятие линейной зависимости и независимости системы функций. Определитель Вронского. Условия линейной зависимости и независимости систем функций.
37. Линейное ДУ порядка n. Однородные и неоднородные ЛДУ. Свойства частных решений ОЛДУ. Фундаментальная система решений ОЛДУ.
38. Теорема о структуре общего решения однородного ЛДУ порядка n (на примере $n=2$).
39. Теорема о структуре общего решения неоднородного ЛДУ порядка n (на примере $n=2$).
40. Принцип суперпозиции частных решений.
41. Формула Остроградского-Лиувилля.
42. ОЛДУ порядка n с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

43. Нахождение ФСР и общего решения ОЛДУ в случае, когда корни характеристического уравнения действительные и различные.
44. Нахождение ФСР и общего решения ОЛДУ в случае, когда корни характеристического уравнения действительные и есть кратные.
45. Нахождение ФСР и общего решения ОЛДУ в случае, когда корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые.
46. Нахождение частного решения НЛДУ порядка n с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
47. Метод вариации произвольных постоянных нахождения частного и общего решений НЛДУ порядка n с постоянными коэффициентами и произвольной правой частью.
48. Постановка краевой задачи для ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, её разрешимость.
49. Понятие нормальной системы дифференциальных уравнений порядка n. Решение, начальные условия, общее и частное решения.
50. Задача Коши и теорема Коши (без вывода) для нормальной системы ДУ.
51. Нахождение общего решения нормальной системы ДУ сведением к нахождению общего решения ДУ порядка n методом исключения.
52. Первые интегралы нормальной системы ДУ, понижение с их помощью порядка системы. Интегрируемые комбинации. Симметрическая форма записи нормальной автономной системы ДУ.
53. Системы линейных ДУ (однородные и неоднородные), векторно-матричная их форма записи. Фундаментальная система решений линейной однородной системы ДУ. Структура общих решений однородных и неоднородных систем ЛДУ первого порядка.
54. Однородная система ЛДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Нахождение ФСР и общего решения однородной системы ЛДУ по корням характеристического уравнения.
55. Метод вариации произвольных постоянных нахождения общего решения неоднородной системы ДУ.

## 6. Приложения.

## 6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

**1-10.** Найти неопределенные интегралы:

**а)** $\int\left(\frac{3}{x}-4x^3+\frac{2}{x^4}+\sqrt[5]{x^2}\right)dx$; **б)** $\int\frac{\cos 2xdx}{4+\sin 2x}$; **в)** $\int(4x-2)\cos 2xdx$;

**г)** $\int\frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5}$; **д)** $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}dx$; **е)** $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}$.

| |
|---|
| Нахождение неопределённого интеграла $\int f(x)dx$ состоит в таком преобразовании подынтегрального выражения $f(x)dx$, чтобы получить интегралы (возможно по новой переменной интегрирования) из таблицы основных интегралов (*приложение 6.3*). |

**Решение.**

**а)** Интеграл вычислим непосредственным интегрированием. Получим:

$$\int\left(\frac{3}{x}-4x^3+\frac{2}{x^4}+\sqrt[5]{x^2}\right)dx=3\int\frac{dx}{x}-4\int x^3dx+2\int x^{-4}dx+\int x^{2/5}dx=$$

$$=\begin{bmatrix}\textit{используем}\\ \textit{табличные}\\ \textit{интегралы}1,\,3\end{bmatrix}=3\ln|x|-4\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+\frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}+c=$$

$$=3\ln|x|-x^4-\frac{2}{3x^3}+\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2}+C.$$

**Ответ:** $3\ln|x|-x^4-\frac{2}{3x^3}+\frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2}+C$.

**б)** Интеграл вычислим методом замены переменной интегрирования. Замену переменной интегрирования $x$ выполним методом подведения функции под знак дифференциала**,** используя для этого таблицу дифференциалов основных элементарных функций (*Приложение 6.3*). Получим:

$$\int\frac{\cos 2xdx}{4+\sin 2x}=\begin{bmatrix}\cos 2xdx=\frac{1}{2}d\sin 2x\\ \sin 2x=t\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+4}=\begin{bmatrix}\textit{используем}\\ \textit{таличныйинтеграл }4\\ \textit{по переменной } t\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t+4|+C=\begin{bmatrix}\textit{выполним}\\ \textit{обратнуюзамену}\\ t=\sin 2x\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\ln|\sin 2x+4|+C.$$

**Замечание.** Замену переменной интегрирования в данном интеграле можно выполнить и следующим образом. Положим $t=4+\sin 2x$. Тогда $dt=(4+\sin 2x)' dx=2\cos 2xdx$, откуда $\cos 2xdx=\frac{dt}{2}$. Подставив все это в интеграл, получим:

$$\int\frac{\cos 2xdx}{4+\sin 2x}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|4+\sin 2x|+C.$$

**Ответ:** $\frac{1}{2}\ln|4+\sin 2x|+C$.

**в)** Интеграл вычислим методом интегрирования по частям, используя формулу $\int f(x)dx=\int udv=u\,v-\int vdu$.

Положим: $u=4x-2$, $dv=\cos 2xdx$. Найдём $du=(4x-2)' dx=4dx$,

$$v(x)=\int\cos 2xdx=\begin{bmatrix}2x=t\Rightarrow x=t/2\\ dx=(t/2)'dt=\frac{1}{2}dt\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\cos tdt=\begin{bmatrix}\textit{используем}\\ \textit{табличный}\\ \textit{интеграл } 8\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t=[t=2x]=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Интеграл $\int dv=\int v'(x)dx$ в формуле интегрирования по частям вычисляется с точностью до постоянной, т.е. в качестве функции $v(x)$ выбирается одна из первообразных для функции $v'(x)$.

Для вычисления интеграла $\int\cos 2xdx$ можно использовать и следующее свойство неопределённого интеграла: если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, где $\int f(x)dx$ - табличный интеграл. В данном случае, так как $\int\cos xdx=\sin x+C$, то $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Тогда, получим:

$$\int (4x-2)\cos 2x dx = (4x-2)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 4dx = (2x-1)\sin 2x -$$

$$-2\int \sin 2x dx = (2x-1)\sin 2x - 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C = (2x-1)\sin 2x + \cos 2x + C$$

**Ответ:** $(2x-1)\sin 2x + \cos 2x + C$.

**г)** Интеграл относится к интегралам вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$. Для его вычисления сначала выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, затем сделаем замену переменной интегрирования. Получим:

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5} = \begin{bmatrix} x^2-6x+5 = (x-3)^2-4 \\ x-3 = t \Rightarrow x = 3+t \\ dx = (3+t)' dt = dt \end{bmatrix} = \int \frac{(3+t)+2}{t^2-4}dt = \int \frac{t+5}{t^2-4}dt =$$

$$=[\textit{представляем интеграл в виде суммы интегралов}] = \int \frac{tdt}{t^2-4} + 5\int \frac{dt}{t^2-4}.$$

Вычислим каждый из интегралов в отдельности: 1) $\int \frac{tdt}{t^2-4} =$

$$= \begin{bmatrix} \textit{преобразуем подынтегральное выражение,} \\ \textit{используя таблицу дифференциалов} \\ \textit{и заменим переменную интегрирования} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tdt = \frac{1}{2}dt^2 = \frac{1}{2}d(t^2-4) \\ t^2-4 = z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = [z = t^2-4] = \frac{1}{2}\ln|t^2-4| + C.$$

Одним из часто выполняемых преобразований является преобразование: $tdt = \frac{1}{2}d(t^2) = \frac{1}{2a}d(at^2) = \frac{1}{2a}d(at^2+b)$, где $a \neq 0, b$ - некоторые числа.

2) $$\int \frac{dt}{t^2-4} = \int \frac{dt}{t^2-2^2} = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл } 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C.$$

Тогда: $$\int \frac{(x+2)dx}{x^2-6x+5} = \frac{1}{2}\ln|t^2-4| + 5\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = [t = x-3] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|(x-3)^2-4| + \frac{5}{4}\ln\left|\frac{(x-3)-2}{(x-3)+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-6x+5| + \frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C.$$

**Ответ:** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+5\right|+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$.

| |
|---|
| Конечное выражение для неопределённого интеграла записывают, указывая одну из первообразных и добавляя к ней произвольную постоянную $C$. |

**д)** Интеграл относится к интегралам от рациональных дробей. В данном случае подынтегральная функция является правильной рациональной дробью.

Для вычисления интеграла, сначала разложим дробь на простые дроби: $\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{x-1}$, где неизвестные постоянные $A, B, C$ найдем методом неопределенных коэффициентов. Для этого выражение в правой части разложения приведем к общему знаменателю:

$$\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}=\frac{A(x+3)(x-1)+B(x-1)+C(x+3)^2}{(x+3)^2(x-1)}$$

и приравняем числители правой и левой дробей. Получим:

$$5x^2+6x+9=A(x+3)(x-1)+B(x-1)+C(x+3)^2=(A+C)x^2+$$
$$+(2A+B+6C)x+(-3A-B+9C).$$

| |
|---|
| Два многочлена одинакового порядка равны, тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях $x$. |

Приравняв соответствующие коэффициенты этих многочленов, получим систему линейных уравнений относительно $A, B, C$: $\begin{cases} A+C=5 \\ 2A+B+6C=6 \\ -3A-B+9C=9 \end{cases}$.

Решив систему (например, методоми Гаусса или Крамера), найдем $A=\frac{15}{4}$, $B=-9$, $C=\frac{5}{4}$. Тогда $\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}=\frac{15}{4(x+3)}-\frac{9}{(x+3)^2}+\frac{5}{4(x-1)}$.

Затем подставим это разложение в исходный интеграл и используем свойство линейности интегралов.

| |
|---|
| $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$, где $\alpha, \beta$ -некоторые числа. |

Получим: $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}dx=\frac{15}{4}\int\frac{dx}{x+3}-9\int\frac{dx}{(x+3)^2}+\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x-1}$.

Вычислим теперь каждый из интегралов в отдельности:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл } 4 \end{bmatrix} = \ln|x+3| + C$.

2) $\int \frac{dx}{(x+3)^2} = \int (x+3)^{-2}\,dx = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл } 2 \end{bmatrix} = \frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x+3} + C$.

3) $\int \frac{dx}{x-1} = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличный} \\ \textit{интеграл } 4 \end{bmatrix} = \ln|x-1| + C$.

Тогда получим: $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-1)}dx = \frac{15}{4}\ln|x+3| + \frac{9}{x+3} + \frac{5}{4}\ln|x-1| + C$.

**Ответ:** $\frac{15}{4}\ln|x+3| + \frac{9}{x+3} + \frac{5}{4}\ln|x-1| + C$.

**е)** Интеграл относится к интегралам вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Вычисление интеграла сводим методом замены переменной интегрирования к вычислению табличных интегралов от новой переменной, с последующей обратной заменой переменной.

Так как для подынтегральной функции $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos^3 x}$ выполняется условие $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то сделаем подстановку $t = tgx$. Получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \begin{bmatrix} tgx = t \Rightarrow x = arctgt \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t}dt = \int \left(\frac{1}{t} + t\right)dt = \int \frac{dt}{t} + \int tdt = \begin{bmatrix} \textit{используем} \\ \textit{табличные} \\ \textit{интегралы } 1, 3 \end{bmatrix} = \ln|t| + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$=\left[\begin{array}{c} выполним \\ обратнуюзамену \\ t = tgx \end{array}\right] = \ln|tgx| + \frac{tg^2 x}{2} + C.$$

**Ответ:** $\ln|tgx| + \dfrac{tg^2 x}{2} + C$.

**11-20.** Вычислить определённые интегралы:

**а)** $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **б)** $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$

Определённый интеграл для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляют по формуле Ньютона-Лейбница: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ -одна из её первообразных, используя для нахождения $F(x)$ все приёмы и методы вычисления неопределённых интегралов.

Следствиями формулы Ньютона-Лейбница являются:

**1)** формула интегрирования по частям $\displaystyle\int_a^b udv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$, где функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$;

**2)** формула замены переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ \alpha = \varphi^{-1}(a),\ \beta = \varphi^{-1}(b) \end{array}\right] = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

, где функция $x = \varphi(t)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$. Часто замена переменной в определённом интеграле выполняется с помощью подстановки $\psi(x) = t$ по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\begin{array}{c} \psi(x) = t \Rightarrow x = \psi^{-1}(t) \\ dx = (\psi^{-1}(t))'dt \\ \alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b) \end{array}\right] = \int_\alpha^\beta f(\psi^{-1}(t))(\psi^{-1}(t))'dt,$$

где функция $\psi(x)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

**Решение.**

**а)** Первообразная для подынтегральной функции $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ принадлежит к классу первообразных вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$. С помощью подстановки $x=a\sin t$ (в нашем случае $a=3$) и формулы замены переменной в определенном интеграле получим:

$$\int\limits_0^{3/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\left[\begin{array}{c} x=3\sin t\\ dx=(3\sin t)'dt=3\cos t dt\\ 0\le 3\sin t\le\dfrac{3}{2},\ \alpha\le t\le\beta\\ 3\sin\alpha=0\Rightarrow\alpha=0\\ 3\sin\beta=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\beta=\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right]=\int\limits_0^{\pi/6}\frac{(3\sin t)^2\,3\cos t dt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}=$$

$$=9\int\limits_0^{\pi/6}\frac{\sin^2 t\cdot\cos t}{\cos t}dt=9\int\limits_0^{\pi/6}\sin^2 t dt.$$

Для вычисления последнего интеграла используем формулу понижения степени: $\sin^2 t=(1-\cos 2t)/2$. Тогда

$$\int\limits_0^{3/2}\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=9\int\limits_0^{\pi/6}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\int\limits_0^{\pi/6}(1-\cos 2t)dt=\frac{9}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{9}{2}\left[\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right]=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{8}.$$

**б)** Первообразная для подынтегральной функции $f(x)=\dfrac{x}{2+\sqrt{2x+1}}$ относится к первообразным вида $\int R\left(x,\left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$, где $m_1,n_1,m_2,n_2,\ldots$- целые числа. С помощью подстановки $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^k$, где $k$ - наименьший общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1},\dfrac{m_2}{n_2},\ldots$ (в нашем случае – подстановки $\sqrt{2x+1}=t$ ), данный интеграл сводим к интегралу от рациональной функции новой переменной $t$ :

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}=\left[\begin{array}{c}\sqrt{2x+1}=t\Rightarrow x=\dfrac{t^2-1}{2}\\ dx=\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)'dt=t\,dt\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le 0,\quad \alpha\le\sqrt{2x+1}\le\beta\\ x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\sqrt{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1}=0\\ x=0\Rightarrow\beta=\sqrt{2\cdot 0+1}=1\end{array}\right]=\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)tdt}{2+t}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{t^3-t}{t+2}dt\,.$$

Последний интеграл является интегралом от неправильной рациональной дроби. Для его вычисления, разделим «уголком» числитель на знаменатель и представим подынтегральную функцию $\dfrac{t^3-t}{t+2}$ в виде:

$$\frac{t^3-t}{t+2}=t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\,.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{2t^2}{2}+3t-6\ln\left|t+2\right|\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-1+3-6\ln 3\right)-\left(0-0+0-6\ln 2\right)\right]=\frac{7}{6}-3\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

| |
|---|
| Для нахождения первообразной вида $\displaystyle\int\frac{P_n(t)dt}{at+b}$, где $P_n(t)$ - многочлен порядка $n$, можно использовать также подстановку $a\,t+b=z$. |

**Ответ: а)** $\dfrac{6\pi-9\sqrt{3}}{8}$ ; **б)** $\dfrac{7}{6}-3\ln\dfrac{3}{2}$.

**21-30.** Вычислить несобственный интеграл I-ого рода $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$ или установить его расходимость.

**Решение.**

По определению несобственного интеграла имеем $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$. Определенный интеграл, стоящий под знаком предела, вычислим методом замены переменной:

$$\int\limits_0^{b} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx = \left[\begin{array}{c} arctgx = t \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \\ 0 \le x \le b,\ \alpha \le arctgx \le \beta \\ x = 0 \Rightarrow \alpha = arctg0 = 0 \\ x = b \Rightarrow \beta = arctgb \end{array}\right] = \int\limits_0^{arctgb} \sqrt{t}dt = \left.\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{arctgb} = \frac{2}{3}(arctgb)^{3/2}$$

Тогда $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{2}{3}arctgb\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$.

**Ответ:** Несобственный интеграл сходится и равен $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$.

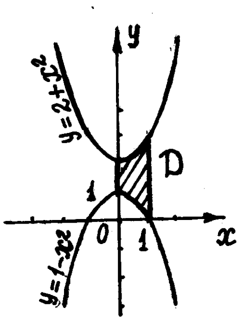
**31-40.** Вычислить площадь фигуры $D$, ограниченной линиями: $y = 1 - x^2$, $y = 2 + x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Площадь фигуры $D = \left\{\begin{array}{c} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{array}\right\} = D_y$, где $f_1(x),\ f_2(x)$ - непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, вычисляется по формуле: $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

Площадь фигуры $D = \left\{\begin{array}{c} g_1(y) \le x \le g_2(y) \\ c \le y \le d \end{array}\right\} = D_x$ где $g_1(y),\ g_2(y)$ - непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, вычисляется по формуле: $S = \int\limits_c^d [g_2(y) - g_1(y)]dy$.

**Решение.**

**1)** Изобразим фигуру $D$:




**2)** Представим $D$ в виде $D_y = \left\{ \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 1 - x^2 \le y \le 2 + x^2 \end{matrix} \right\}$.

Если $D \ne D_y$ или $D \ne D_x$, то фигуру $D$ прямыми, параллельными осям координат, разбивают на части, такие, чтобы они имели вид $D_y$ или $D_x$. При этом площадь фигуры $D$ находят как сумму площадей её частей.

**3)** Вычислим площадь:

$$S = \int_0^1 \left(\left(2 + x^2\right) - \left(1 - x^2\right)\right) dx = \int_0^1 \left(1 + 2x^2\right) dx = \left.\left( x + 2\frac{x^3}{3} \right)\right|_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

**Ответ:** $S = 5/3$.

**41-50.** Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением: $y = \ln\left(1 - x^2\right)$, $0 \le x \le \dfrac{1}{4}$.

Длина дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вычисляется по формуле $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\, dx$.

**Решение.**

**1)** Сначала найдём: $y'_x = \left(\ln\left(1 - x^2\right)\right)' = \dfrac{1}{1 - x^2} \cdot \left(1 - x^2\right)' = -\dfrac{2x}{1 - x^2}$. Тогда

$$1 + \left(y'_x\right)^2 = 1 + \left(-\frac{2x}{1 - x^2}\right)^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^2.$$

**2)** Вычислим длину: $L=\int\limits_0^{1/4}\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int\limits_0^{1/4}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$. Последний интеграл является интегралом от неправильной рациональной дроби. Для его вычисления, разделим «уголком» числитель на знаменатель и представим подынтегральную функцию $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ в виде: $\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1+\frac{2}{1-x^2}$. Тогда:

$$L=\int\limits_0^{1/4}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx=-\int\limits_0^{1/4}dx-2\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{x^2-1}=-x\Big|_0^{1/4}-2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_0^{1/4}=$$

$$=-\left(\frac{1}{4}-0\right)-\left(\ln\left|\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1}\right|-\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right|\right)+=-\frac{1}{4}-\ln\frac{3}{5}=\ln(5/3)-\frac{1}{4}.$$

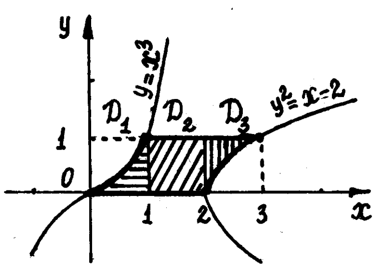
**Ответ:** $L=\ln(5/3)-\frac{1}{4}$.

**51-60.** Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры $D$, ограниченной линиями: $y^2=x-2$, $y=x^3$, $y=0$, $y=1$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры $D=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\end{matrix}\right\}=D_y$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ - непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, задаваемые одним аналитическим выражением, вычисляется по формуле: $V_x=\pi\int\limits_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx$.

**Решение.**

**1)** Изобразим фигуру $D$:



**2)** Представим $D$ в виде $D_y$.

| |
|---|
| Если $D \neq D_y$, то фигуру $D$ прямыми, параллельными оси $Oy$, разбиваем на части, такие, чтобы они имели вид $D_y$. При этом объём тела, образованного вращением фигуры $D$ находим как сумму объёмов тел, образованных вращением её частей. |

Так как это сделать невозможно, то фигуру $D$ разобьём прямыми $x=1$, $x=2$ на три части $D_1, D_2, D_3$, такие что $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ и представим их в виде $D_{1y}, D_{2y}, D_{3y}$: $D_1 = D_{1y} = \left\{ \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^3 \end{matrix} \right\}$, $D_2 = D_{2y} = \left\{ \begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \end{matrix} \right\}$,

$D_3 = D_{3y} = \left\{ \begin{matrix} 2 \le x \le 3 \\ \sqrt{x-2} \le y \le 1 \end{matrix} \right\}$. При этом $V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x}$.

**3)** Вычислим объём тела вращения: $V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x}$. Так как

$$V_{1x} = \pi \int_0^1 \left[ \left(x^3\right)^2 - 0^2 \right] dx = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left( \frac{x^7}{7} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{7},$$

$$V_{2x} = \pi \int_1^2 \left(1^2 - 0^2\right) dx = = \pi x\Big|_1^2 = \pi(2-1) = \pi,$$

$$V_{3x} = \pi \int_2^3 \left[ 1^2 - \left(\sqrt{x-2}\right)^2 \right] dx = \pi \int_2^3 (3-x) dx = \pi \left( 3x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_2^3 = \pi\left(9 - \frac{9}{2} - 6 + 2\right) = \frac{\pi}{2}$$

то: $V_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} = \frac{\pi}{7} + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{23\pi}{14}$.

**Ответ:** $V_x = \frac{23\pi}{14}$.

**141-150.** Установить тип ДУ первого порядка и найти его общее решение.

**а)** $(2-y^2)\,y' + 2(y^2 x + x) = 0$ **б)** $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$

**Решение.**

| |
|---|
| Тип ДУ первого порядка устанавливают по форме его записи. |

**а)** Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно записать в виде

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Действительно, осуществив в исходном уравнении замену $y' = \frac{dy}{dx}$ и умножив его затем на $dx$, получим: $2x(y^2+1)dx + (2-y^2)dy = 0$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными.

Нахождение общего решения уравнения $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$, путём деления обеих его частей на $Q_1(y)P_2(x)$, сводится к интегрированию уравнения с разделёнными переменными $P(x)dx + Q(y)dy = 0$, где $P(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, $Q(y) = \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}$, общее решение которого записывается в виде $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$.

Разделим обе части уравнения $2x(y^2+1)dx + (2-y^2)dy = 0$ на множитель $(y^2+1)$, получим ДУ с разделёнными переменными: $2xdx + \frac{2-y^2}{y^2+1}dy = 0$.

Общее решение последнего уравнения найдём интегрированием каждого слагаемого по своей переменной и запишем в виде:

$$\int 2xdx + \int \frac{2-y^2}{y^2+1}dy = C,$$ где $C$ - произвольная постоянная.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка должно обязательно содержать одну произвольную постоянную.

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого):

$$\int 2xdx = 2\frac{x^2}{2} = x^2,$$

$$\int \frac{2-y^2}{y^2+1}dy = \int \frac{3-(y^2+1)}{y^2+1}dy = \int \left(\frac{3}{y^2+1} - 1\right)dy = 3\int \frac{dy}{y^2+1} - \int dy = 3arctgy - y$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения запишется в виде:

$$3arctgy - y + \frac{x^2}{2} = C.$$

**Ответ:** $3arctgy - y + \frac{x^2}{2} = C$, где $C$ - произвольная постоянная.

**б)** Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка, так как его можно записать в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Действительно, выполнив преобразования: $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'(2y - 3x) = 3y - 4x \Rightarrow y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}, \text{ получим } y' = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right) - 4}{2\left(\frac{y}{x}\right) - 3} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

При выполнении преобразований однородного ДУ первого порядка к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ следует учесть, что $\frac{dy}{dx} = y'$.

Нахождение общего решения однородного ДУ первого порядка с помощью подстановки $y = x \cdot u$, $y' = u + xu'$ или $dy = udx + xdu$, где $u = u(x)$ - новая неизвестная функция, сводится к нахождению общего решения ДУ с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$ с последующей заменой $u = \frac{y}{x}$.

С помощью подстановки $y = x \cdot u$, $y' = u + xu'$ уравнение $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$ или $y' = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right) - 4}{2\left(\frac{y}{x}\right) - 3}$ приведём к ДУ с разделяющимися переменными вида $P_1(x)Q_1(u)du + P_2(x)Q_2(u)du = 0$ относительно новой неизвестной функции $u(x)$. Получим:

$$u + xu' = \frac{3u - 4}{2u - 3} \Rightarrow xu' = \frac{3u - 4}{2u - 3} - u = \frac{-2u^2 + 6u - 4}{2u - 3} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \textit{учитываем, что} \\ u' = \frac{du}{dx} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$xdu + \frac{2u^2 - 6u + 4}{2u - 3}dx = 0.$$

Последнее уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными. Сведём его, разделив обе части уравнения на множитель $x\cdot\left(\dfrac{2u^2-6u+4}{2u-3}\right)$ к уравнению с разделёнными переменными. Получим:

$$\frac{dx}{x}+\frac{2u-3}{2u^2-6u+4}\,du=0\,.$$

Общее решение последнего уравнения найдём интегрированием каждого слагаемого по своей переменной и запишем в виде:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(2u-3)du}{2u^2-6u+4}=C\,,\ \text{где } C \text{ - произвольная постоянная.}$$

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого):

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|;$$

$$\int\frac{(2u-3)du}{2u^2-6u+4}=\frac{1}{2}\int\frac{(2u-3)du}{u^2-3u+2}=\left[\begin{gathered}\textit{выделим в знаменателе полный квадрат}\\ u^2-3u+2=(u-3/2)^2-1/4\end{gathered}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2u-3)du}{(u-3/2)^2-1/4}=\left[\begin{gathered}\textit{сделаем замену}\\ u-3/2=t\Rightarrow u=t+3/2\\ du=(t+3/2)'dt=dt\end{gathered}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{2(t+3/2)-3}{t^2-1/4}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2t+3-3)dt}{t^2-1/4}=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2-1/4}=\left[\begin{gathered}\textit{сделаем замену}\\ 2tdt=d(t^2)=d(t^2-1/4)\\ t^2-1/4=z\end{gathered}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|z|=\left[z=t^2-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{2}\ln|t^2-1/4|=\left[t=u-\frac{3}{2}\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\left(u-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u^2-3u+2|\,.$$

Тогда общее решение последнего дифференциального уравнения запишется в виде: $\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|u^2-3u+2|=C$ или $\left[\begin{gathered}\textit{используя}\\ \textit{свойства}\\ \textit{логарифмов}\end{gathered}\right]$ в виде:

$x^2\cdot(u^2-3u+2)=C_1$, где $\pm e^{2C}=C_1$ - новая произвольная постоянная.

Теперь в найденном решении вернёмся к старой неизвестной функции $y(x)$, выполнив обратную замену $u=y/x$. В итоге получим:

$$x^2\cdot\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\frac{y}{x}+2\right)=C_1 \quad \text{или} \quad y^2-3xy+2x^2=C_1.$$

**Ответ:** $y^2-3xy+2x^2=C_1$, где $C_1$ - произвольная постоянная.

**151-160.** Установить тип ДУ, найти его общее и частное решения, если:

$$y'-3x^2y=x^2,\ y(0)=0.$$

**Решение.**

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) первого порядка, так как его можно записать в виде $y'+p(x)y=q(x)$, где $p(x)=-3x^2$, $q(x)=x^2$.

Общее решение ЛДУ первого порядка находится с помощью подстановки $y=uv$, где $u(x)$, $v(x)$ - новые неизвестные функции. Одну из них, например $u(x)$, находят в виде $u(x)=e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная для функции $p(x)$, тогда другую неизвестную функцию $v(x)$ находят в виде общего решения ДУ: $v'(x)=\dfrac{q(x)}{u(x)}$. В итоге будет найдено и общее решение исходного уравнения в виде $y=uv$

Частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$ получают из общего решения данного уравнения при конкретном значении произвольной постоянной $C=C_0$. Находят $C_0$ как решение уравнения, получаемого подстановкой в общее решение начального условия.

Сначала найдем общее решение линейного ДУ первого порядка. Его ищем в виде $y=uv$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - новые неизвестные функции.

Функцию $u(x)$ найдём в виде $u(x)=e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная для функции $p(x)=-3x^2$. Вычислив интеграл, получим $\int p(x)dx=-3\int x^2dx=-3\cdot\dfrac{x^3}{3}=-x^3$. Тогда $u(x)=e^{-\int p(x)dx}=e^{x^3}$.

Простейшим ДУ первого порядка называется уравнение вида $y'(x)=f(x)$. Общее решение такого уравнения находится интегрированием и записывается в виде $y(x)=\int f(x)dx+C$.

Функцию $v = v(x)$ найдём как общее решение ДУ: $v'(x) = \dfrac{q(x)}{u(x)}$, где $u(x) = e^{x^3}$, $q(x) = x^2$. Данное уравнение $v'(x) = x^2\, e^{-x^3}$ является простейшим ДУ первого порядка. Его общее решение найдём интегрированием и запишем в виде $v(x) = \int x^2 e^{-x^3}\, dx + C$. Вычислив интеграл (с точностью до постоянной), получим:

$$\int x^2 e^{-x^3} dx = \left[\begin{array}{c} \textit{сделаем замену} \\ x^2 dx = \dfrac{1}{3} d(x^3) = -\dfrac{1}{3} d(-x^3) \\ -x^3 = t \end{array}\right] = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t =$$

$$= \left[t = -x^3\right] = -\frac{1}{3}\, e^{-x^3}.$$

Таким образом $v(x) = -\dfrac{1}{3} e^{-x^3} + C$.

Тогда общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = u\,v = e^{x^3} \cdot \left(-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C\right) = Ce^{x^3} - \frac{1}{3}.$$

Теперь найдём частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$. Его получим из общего решения $y = Ce^{x^3} - \dfrac{1}{3}$ при конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$, которое найдём из уравнения, полученного подстановкой начального условия $y(0) = 0$ в общее решение. В результате получим: $0 = Ce^{0^3} - \dfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; C = C_0 = \dfrac{1}{3}$. Тогда частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, запишется в виде:

$$y = \frac{1}{3} e^{x^3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(e^{x^3} - 1\right).$$

**Ответ:** $y = Ce^{x^3} - \dfrac{1}{3}$ - общее решение; $y = \dfrac{1}{3}\left(e^{x^3} - 1\right)$ частное решение.

**161-170.** Требуется найти**:**

**а)** общее решение простейшего ДУ порядка $n$: $y'' = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

**б)** общее и частное решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 5y' - 6 = 0\,,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

**Решение.**

Общее решение простейшего ДУ $n$-го порядка $y^{(n)} = f(x)$ находят, выполняя последовательно $n$ интегрирований, и записывают в виде:

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int f(x)dx}_{n\text{ раз}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n\,.$$

Общее решение дифференциального уравнения порядка $n$ должно обязательно содержать $n$ разных произвольных постоянных.

**а)** Данное уравнение дважды проинтегрируем.

После первого интегрирования получим: $y' = \int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx + C_1$. Интеграл вычислим (с точностью до постоянного слагаемого) методом интегрирования по частям. Получим:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow v = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \end{array}\right] = \ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\,\frac{dx}{x} =$$

$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$. Тогда $y' = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C_1$.

После второго интегрирования получим:
$y = \int (2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C_1)dx + C_2 = 2\int \sqrt{x}\ln x dx - 4\int \sqrt{x}\,dx + C_1\int dx + C_2$.

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого). Получим:

$$\int\sqrt{x}\ln x dx=\begin{bmatrix} \text{вычислим} \\ \text{методом} \\ \text{интегрирования} \\ \text{по частям}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\sqrt{x}dx\Rightarrow v=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{bmatrix}=$$

$$\ln x\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\int\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{4}{9}\cdot x^{3/2};$$

$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}$; $\int dx=x$.

Тогда $y=2\cdot\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{4}{9}x^{3/2}\right)-4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}+C_1x+C_2=$

$$=\frac{4}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{32}{9}x^{3/2}+C_1x+C_2.$$

**Ответ:** $y=\frac{4}{3}x^{3/2}\ln x-\frac{32}{9}x^{3/2}+C_1x+C_2$.

Общее решение однородного линейного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $ay''+by'+cy=0$ имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, где $\{y_1,y_2\}$ - фундаментальная система его частных решений; $C_1,C_2$ -произвольные постоянные.
Фундаментальная система решений $\{y_1,y_2\}$ строится на основе характера корней характеристического уравнения $a\lambda^2+b\lambda+c=0$. А именно: **1)** если $\lambda_1,\lambda_2$ - пара различных действительных корней характеристического уравнения, то ФСР имеет вид $\{e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x}\}$; **2)** если $\lambda_1,\lambda_2$ - пара одинаковых $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$ действительных корней, то ФСР имеет вид $\{e^{\lambda x},xe^{\lambda x}\}$; **3)** если $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ - пара комплексно-сопряжённых корней, то ФСР имеет вид $\{e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x\}$.

Корни характеристического уравнения $a\lambda^2+b\lambda+c=0$, являющегося квадратным, находят на множестве комплексных чисел по формулам:

**1)** если дискриминант уравнения $D=b^2-4ac\ge 0$, то $\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

| |
|---|
| **2)** если дискриминант уравнения $D<0$, то $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta=-\dfrac{b}{2a}\pm i\dfrac{\sqrt{\lvert D\rvert}}{2a}$. |

**б)** Сначала найдём общее решение ДУ в виде: $y=C_1y_1+C_2y_2$, где $\{y_1,y_2\}$ - фундаментальная система его частных решений.

Для нахождения ФСР, составим характеристическое уравнение $\lambda^2-5\lambda-6=0$ для данного дифференциального уравнения и найдём его корни на множестве комплексных чисел. Так как дискриминант $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(-6)=25+24=49\geq0$, то $\lambda_{1,2}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm7}{2}\Rightarrow$ $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=6$, т.е. характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Следовательно, ФСР имеет вид $\left\{e^{-x},e^{6x}\right\}$.

Тогда общее решение данного ДУ запишется в виде: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$.

Теперь найдём частное решение данного ДУ, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Для этого сначала найдём производную $y'(x)$ общего решения: $y'=(C_1e^{-x}+C_2e^{6x})'=-C_1e^{-x}+6C_2e^{6x}$. Затем подставим начальные данные в выражения для общего решения и его производной, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения значений произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$:

$$\begin{cases}y(0)=1\\y'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1e^{-0}+C_2e^{6\cdot0}=1\\-C_1e^{-0}+6C_2e^{6\cdot0}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=1\\-C_1+6C_2=0\end{cases}.$$

Решив систему, найдём: $C_1=6/7$, $C_2=1/7$. Тогда частное решение данного ДУ запишется в виде: $y=\dfrac{6}{7}e^{-x}+\dfrac{1}{7}e^{6x}$.

**Ответ:**

Общее решение: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$; частное решение: $y=\dfrac{6}{7}e^{-x}+\dfrac{1}{7}e^{6x}$.

**171-180.** Требуется найти**:**

**а)** общее решение линейного ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида: $y''+4y'+4y=50\cos x$**;**

**б)** общее решение ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (с точностью до неизвестных постоянных в частном решении): $y''+16y=x\cos4x-16e^{4x}$**.**

Общее решение неоднородного ЛДУ 2-го порядка $ay'' + by' + cy = f(x)$ имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$, где $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения.

Частное решение $\tilde{y}$ уравнения с правой частью специального вида $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$ ищется *методом неопределённых коэффициентов* в виде $\tilde{y} = x^k e^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x]$, где $k = 0$, если число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и $k$ равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ в противном случае; $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - полные многочлены степени $N = \max\{m, l\}$ с неопределёнными коэффициентами. Примерами полных многочленов с неопределёнными коэффициентами степени $0, 1, 2, 3, \ldots$ соответственно являются: $a$, $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, $ax^3 + bx^2 + cx + d$,…. Для нахождения коэффициентов многочленов $S_N(x)$ и $T_N(x)$, надо подставить решение $\tilde{y}$ в неоднородное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим систему уравнений, решив которую, найдём значения коэффициентов.

Частное решение $\tilde{y}$ неоднородного ЛДУ с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ равно сумме частных решений $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ неоднородных уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, f_2$ (*принцип наложения решений*).

**Решение.**

**а)** Общее решение данного ДУ найдём в виде: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}$, где $\{y_1, y_2\}$ - фундаментальная система частных решений соответствующего ему однородного ДУ: $y''+4y'+4y = 0$; $\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного неоднородного дифференциального уравнения.

Сначала найдём ФСР $\{y_1, y_2\}$ соответствующего однородного ДУ $y''+4y'+4y = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ для данного однородного дифференциального уравнения и найдём его корни на множестве комплексных чисел. Так как дискриминант $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \geq 0$, то $\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, т.е. характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня. Следовательно, ФСР имеет вид $\left\{e^{-2x}, xe^{-2x}\right\}$.

Затем найдём частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y''+4y'+4y=50\cos x$, имеющего правую часть специального вида $f(x)=50\cos x=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x]$, где $\alpha=0$, $\beta=1$, $P_m(x)=50\Rightarrow m=0$, $Q_\ell(x)\equiv 0\Rightarrow \ell=0$. Частное решение найдём в виде $\tilde{y}=x^k e^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x]$, где $k=0$, если число $\lambda=\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и $k$ равно кратности корня $\lambda=\alpha+i\beta$ в противном случае; $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - полные многочлены степени $N=\max\{m,l\}$ с неопределёнными коэффициентами. В данном случае: 1) число $\lambda=\alpha+i\beta=0+i\cdot 1=i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $k=0$; 2) $N=\max\{m,l\}=\max\{0,0\}=0$, поэтому $S_N(x)=S_0(x)=a$, $T_N(x)=T_0(x)=b$, где $a,b$ - неизвестные постоянные, подлежащие определению. Таким образом, частное решение с неизвестными постоянными запишется в виде:

$$\tilde{y}=x^0 e^{0\cdot x}\left[a\cos(1\cdot x)+b\sin(1\cdot x)\right]=a\cos x+b\sin x.$$

Для определения значений постоянных $a$ и $b$, найдём производные $\tilde{y}', \tilde{y}''$ и подставим выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ вместо $y, y', y''$ в неоднородное уравнение $y''+4y'+4y=50\cos x$. Учитывая, что:

$$\tilde{y}'=(a\cos x+b\sin x)'=-a\sin x+b\cos x,$$

$$\tilde{y}''=(\tilde{y}')'=(-a\sin x+b\cos x)'=-a\cos x-b\sin x,$$

получим:

$$-a\cos x-b\sin x+4\cdot(-a\sin x+b\cos x)+4\cdot(a\cos x+b\sin x)=50\cos x\Rightarrow$$

$$(3a+4b)\cos x+(-4a+3b)\sin x=50\cos x.$$

Приравняв, в правой и левой части полученного равенства, постоянные коэффициенты, стоящие при одинаковых функциях, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a$ и $b$: $\begin{cases}3a+4b=50\\-4a+3b=0\end{cases}$. Решив систему, найдём: $a=6$, $b=8$. Частное решение $\tilde{y}$ запишется тогда в виде: $\tilde{y}=6\cos x+8\sin x$.

Теперь запишем общее решение исходного уравнения в виде:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\tilde{y}=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+6\cos x+8\sin x.$$

**Ответ:** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + 6\cos x + 8\sin x$.

**б)** Общее решение данного ДУ найдём в виде: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}$, где $\{y_1, y_2\}$ - фундаментальная система частных решений соответствующего ему однородного ДУ: $y'' + 16y = 0$; $\tilde{y}$ -какое-нибудь частное решение данного неоднородного дифференциального уравнения.

Сначала найдём ФСР $\{y_1, y_2\}$ соответствующего однородного ДУ $y'' + 16y = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 16 = 0$ для данного однородного дифференциального уравнения и найдём его корни на множестве комплексных чисел. Так как дискриминант $D = 0^2 - 4\cdot 1\cdot 16 = -64 < 0$, то $\lambda_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm i\frac{\sqrt{|-64|}}{2} = \pm i\frac{8}{2} = \pm 4i$, т.е. характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = 0$, $\beta = 4$. Следовательно, ФСР имеет вид $\left\{e^{0\cdot x}\cos(4x),\ e^{0\cdot x}\sin(4x)\right\} = \{\cos 4x, \sin 4x\}$.

Затем найдём частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y'' + 16y = x\cos 4x - 16e^{4x}$ с правой частью $f(x) = x\cos 4x - 16e^{4x}$. В данном случае функция $f(x)$ не является функцией специального вида $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$, но представляет собой сумму функций $f_1(x) = x\cos 4x$ и $f_2(x) = -16e^{4x}$, каждая из которых уже имеет специальный вид. Поэтому, используя принцип наложения решений, частное решение $\tilde{y}$ неоднородного ДУ с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ найдём в виде суммы частных решений $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ неоднородных уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, f_2$.

Сначала найдём частное решение $\tilde{y}_1$ неоднородного уравнения $y'' + 16y = x\cos 4x$, имеющего правую часть специального вида $f_1(x) = x\cos 4x = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$, где $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $P_m(x) = x \Rightarrow m = 1$, $Q_\ell(x) \equiv 0 \Rightarrow \ell = 0$. Частное решение $\tilde{y}_1(x)$ найдём тогда в виде $\tilde{y}_1 = x^k e^{\alpha x}[S_N^{(1)}(x)\cos\beta x + T_N^{(1)}(x)\sin\beta x]$, где $k = 0$, если число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и $k$ равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ в противном случае; $S_N^{(1)}(x)$ и $T_N^{(1)}(x)$ - полные многочлены степени $N = \max\{m, l\}$ с неопределёнными коэффициентами. В данном случае: 1) число $\lambda = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 4 = 4i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, поэтому $k = 1$; 2) $N = \max\{m, l\} = \max\{1, 0\} = 1$, поэтому $S_N^{(1)}(x) = S_1^{(1)}(x) = a_1 x + b_1$, $T_N^{(1)}(x) = T_1^{(1)}(x) = c_1 x + d_1$, где $a_1, b_1, c_1, d_1$ - некоторые постоянные. Таким образом, частное решение $\tilde{y}_1(x)$ с неизвестными постоянными запишется в виде: $\tilde{y}_1 = x^1 e^{0 \cdot x}\left[(a_1 x + b_1)\cos(4 \cdot x) + (c_1 x + d_1)\sin(4 \cdot x)\right] =.$

$$= x\left[(a_1 x + b_1)\cos 4x + (c_1 x + d_1)\sin 4x\right].$$

Теперь найдём частное решение $\tilde{y}_2$ неоднородного уравнения $y'' + 16y = -16e^{4x}$, имеющего правую часть специального вида $f_2(x) = -16e^{4x} = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$, где $\alpha = 4$, $\beta = 0$, $P_m(x) = -16 \Rightarrow m = 0$, $Q_\ell(x) \equiv 0 \Rightarrow \ell = 0$. Частное решение $\tilde{y}_2(x)$ найдём тогда в виде $\tilde{y}_2 = x^k e^{\alpha x}[S_N^{(2)}(x)\cos\beta x + T_N^{(2)}(x)\sin\beta x]$, где $k = 0$, если число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и $k$ равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ в противном случае; $S_N^{(2)}(x)$ и $T_N^{(2)}(x)$ - полные многочлены степени $N = \max\{m, l\}$ с неопределёнными коэффициентами. В данном случае: 1) число $\lambda = \alpha + i\beta = 4 + i \cdot 0 = 4$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $k = 0$; 2) $N = \max\{m, l\} = \max\{0, 0\} = 0$, поэтому $S_N^{(2)}(x) = S_0^{(2)}(x) = a_2$, $T_N^{(2)}(x) = T_0^{(2)}(x) = b_2$, где $a_2, b_2$ - некоторые постоянные. Таким образом, частное решение $\tilde{y}_2(x)$ с неизвестными постоянными запишется в виде:

$$\tilde{y}_2 = x^0 e^{4 \cdot x}\left[a_2 \cos(0 \cdot x) + b_2 \sin(0 \cdot x)\right] = a_2 e^{4x}.$$

Общее решение исходного уравнения запишется тогда (с точностью до неизвестных постоянных $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2$ в частном решении) в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x +$$
$$+ x\left[(a_1 x + b_1)\cos 4x + (c_1 x + d_1)\sin 4x\right] + a_2 e^{4x}.$$

**Ответ:**

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + x\left[(a_1 x + b_1)\cos 4x + (c_1 x + d_1)\sin 4x\right] + a_2 e^{4x}.$$

## 6.2. Краткие теоретические сведения.

### Тема. Неопределённый интеграл.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке $X$, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Функция $f(x)$ может иметь различные первообразные, но все они отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми. Поэтому все первообразные для $f(x)$ содержатся в выражении $F(x)+C$, где $C \in R$ - произвольная постоянная, которое и называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Операция нахождения первообразной или неопределённого интеграла от функции $f(x)$ называется ***интегрированием*** этой функции. Функция $f(x)$ для которой на промежутке $X$ существует первообразная или неопределённый интеграл называется ***интегрируемой*** на этом промежутке. Первообразная и неопределённый интеграл на промежутке $X$ существуют у любой непрерывной на этом промежутке функции. Нахождение неопределённого интеграла состоит в таком преобразовании подынтегрального выражения, чтобы получить интегралы из таблицы основных интегралов (*приложение 6.3*).

***Основные свойства неопределённого интеграла***:

**1.** $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. **2.** $\int f'(x)dx = f(x)+C$.

**3.** $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ ($k = const, k \neq 0$).

**4.** $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

**5.** Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a \neq 0$.

Основными методами интегрирования являются: непосредственное интегрирование, интегрирование заменой переменной и по частям.

***Непосредственным интегрированием*** (интегрированием *методом разложения*) функции $f(x)$ называют отыскание неопределённого интеграла $\int f(x)dx$ с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции $f(x)$, свойств **3-4** неопределённого интеграла и таблицы основных интегралов.

Часто, заменой переменной интегрирования $x \to t$, удаётся свести нахождение интеграла $\int f(x)dx$ к нахождению более простого интеграла $\int g(t)dt$ с последующей заменой $t \to x$.

Существуют два варианта замены переменной интегрирования:

**1)** ***Метод подведения функции под знак дифференциала***.

Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде $f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - дифференцируемая функция, то осуществляется замена $\varphi(x) = t$. Тогда

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x) = [\varphi(x) = t] = \int g(t)dt \Big|_{t=\varphi(x)} .$$

При подведении функций под знак дифференциала широко используются свойства дифференциалов и таблица дифференциалов основных элементарных функций (*приложение 6.3),* в частности, преобразования:

$$dx = d(x+b) = \frac{1}{a}d(ax+b); \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x};$$

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+b) = \frac{1}{2a}d(ax^2+b), \ a \neq 0 .$$

**2)** ***Метод подстановки.***

Если функция $x = \psi(t)$ дифференцируема и имеет обратную $t = \psi^{-1}(x)$ на соответствующем промежутке, то справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int g(t)dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)} .$$

Функция $x = \psi(t)$ подбирается таким образом, чтобы подынтегральное выражение приняло более удобный для интегрирования вид. Выбор её определяется конкретным видом подынтегрального выражения.

Если $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции, то справедлива ***формула интегрирования по частям***:

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ или кратко $\int udv = uv - \int vdu$ .

Эта формула используется в тех случаях для вычисления $\int f(x)dx$, когда подынтегральное выражение $f(x)dx$ можно так представить в виде $udv$, что интеграл $\int vdu$ может оказаться проще интеграла $\int udv$.

Этим методом вычисляются: **1)** интегралы вида $\int x^n \cos(\alpha x + \beta)dx$,

$\int x^n \sin(\alpha x+\beta)dx$, $\int x^n e^{\alpha x+\beta}dx$, $\int x^n a^{\alpha x+\beta}dx$, причём в качестве $u(x)$ выбирается $x^n$; **2)** интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, причём в качестве $u(x)$ выбирается одна из указанных выше функций. Указанные группы интегралов не исчерпывают всех без исключения интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.

**Интегрирование основных классов элементарных функций.**

Вычисление интегралов вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ и $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$, выделяя в квадратном трёхчлене $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ полный квадрат $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}$ и делая замену переменной интегрирования $x+\frac{\beta}{2\alpha}=t$, сводят к вычислению табличных интегралов (см. *приложение 6.3*) и интегралов вида $\int \frac{tdt}{t^2\pm a^2}$ и $\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2\pm a^2}}$, которые сводят к табличным заменой переменной $t^2\pm a^2=z$ .

Вычисление интегралов вида $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$, делая замену переменной интегрирования $\frac{1}{px+q}=t$, сводят к вычислению интегралов, рассмотренных выше.

***Рациональной дробью*** называется рациональная функция $R(x)$ вида $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{b_0x^m+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n}$. Если $m\ge n$, то дробь **не*правильная***, в противном случае – ***правильная***. Всякую неправильную дробь всегда можно представить в виде $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=T_{m-n}(x)+\frac{S_l(x)}{Q_n(x)}$, где $T_{m-n}(x)$, $S_l(x)$ - многочлены от $x$, причём $l<n$. Выделение целой части (многочлена $T_{m-n}(x)$) в неправильной дроби производят делением числителя на знаменатель, выполняемое «уголком». Таким образом, интегрирование неправильной

рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Интегрирование правильной рациональной дроби основано на её представлении в виде конечной суммы простейших дробей вида $\dfrac{A_1}{\alpha x+\beta}$, $\dfrac{A_k}{(\alpha x+\beta)^k}$ $(k\ge 2)$, $\dfrac{B_1 x+C_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, $\dfrac{B_k x+C_k}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$ $(k\ge 2)$, причём трёхчлен $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ не имеет действительных корней. Вид этого разложения определяется разложением знаменателя $Q_n(x)$ дроби на линейные и квадратичные множители (не имеющие действительных корней).

Каждому линейному множителю вида $(\alpha x+\beta)^k$, где $k\ge 1$, в разложении соответствует сумма из $k$ простейших дробей вида $\dfrac{A_1}{\alpha x+\beta}+\dfrac{A_2}{(\alpha x+\beta)^2}+\ldots+\dfrac{A_k}{(\alpha x+\beta)^k}$. Каждому квадратичному множителю вида $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k$, где $k\ge 1$, в разложении соответствует сумма из $k$ простейших дробей вида $\dfrac{B_1 x+C_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\dfrac{B_2 x+C_2}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}+\ldots+\dfrac{B_k x+C_k}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}$.

Неизвестные постоянные $A_i$, $B_i$, $C_i$ в разложении правильной рациональной дроби $\dfrac{S_l(x)}{Q_n(x)}$ в сумму простейших дробей определяют ***методом неопределённых коэффициентов***. Для этого правую часть искомого разложения приводят к общему знаменателю (им будет многочлен $Q_n(x)$), после чего у получившегося в числителе многочлена с неизвестными постоянными и у многочлена $S_l(x)$ приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях $x$. В результате получают систему линейных уравнений, решая которую находят неизвестные постоянные. Можно также определять $A_i$, $B_i$, $C_i$, подставляя в равенство, полученное приравниванием числителя $S_l(x)$ к числителю дроби с неизвестными постоянными, полученной после приведения простейших дробей к общему знаменателю $Q_n(x)$, вместо $x$ некоторые специально подобранные числа (обычно действительные корни знаменателя $Q_n(x)$) (***метод частных значений***). Часто, при нахождении неизвестных постоянных, комбинируют оба способа.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R$ -рациональная функция относительно аргументов $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам вида $\int R_1(t)dt$, где $R_1(t)$ -рациональная функция относительно аргумента $t$, с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки*** $tg(x/2) = t$. При этом используются формулы

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Применение универсальной подстановки, иногда приводит к громоздким вычислениям. В частных случаях используют подстановки:

**1)** $\cos x = t$, если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, при этом: $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -dt\big/\sqrt{1-t^2}$;

**2)** $\sin x = t$, если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, при этом: $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = dt\big/\sqrt{1-t^2}$;

**3)** $tgx = t$, если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ или $R(\sin x, \cos x) = R_1(tgx)$, при этом: $\sin x = t\big/\sqrt{1+t^2}$, $\cos x = 1\big/\sqrt{1+t^2}$, $dx = dt\big/(1+t^2)$;

**4)** $ctgx = t$, если $R(\sin x, \cos x) = R_1(ctgx)$, при этом $dx = -dt\big/(1+t^2)$. Здесь $R_1$ - рациональная функция относительно аргументов $tgx$, $ctgx$.

Интегралы вида $\int \sin^{2m} \alpha x \cos^{2n} \alpha x dx$, где $m$, $n$ - целые неотрицательные числа, вычисляют, преобразуя подынтегральную функцию с помощью формул: $\sin^2 \alpha x = (1-\cos 2\alpha x)/2$, $\cos^2 \alpha x = (1+\cos 2\alpha x)/2$.

Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$, вычисляют, преобразуя подынтегральную функцию по формулам:

$$\sin a \cos b = [\sin(a-b) + \sin(a+b)]/2;$$

$$\sin a \sin b = [\cos(a-b) - \cos(a+b)]/2;$$

$$\cos a \cos b = [\cos(a-b) + \cos(a+b)]/2.$$

Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций. При этом используются формулы:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1; \quad sh^2 x = \frac{ch2x-1}{2}; \quad ch^2 x = \frac{ch2x+1}{2}; \quad sh2x = 2shxchx.$$

Интегралы вида $\int R\left[x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\dots\right]dx$, где $R$ - рациональная функция своих аргументов, $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$ -целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^k$, где $k$ - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$.

Вычисление интегралов вида $\int R\,(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$, где $R$ - рациональная функция своих аргументов, выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\beta/(2\alpha)\right)^2+\gamma-\beta^2/(4\alpha)$ и заменой $x+\beta/(2\alpha)=t$, сводится к вычислению интегралов вида:

**1)** $\int R_1\,(t, \sqrt{a^2-t^2})\,dt$ **;** **2)** $\int R_1\,(t, \sqrt{a^2+t^2})\,dt$ **;** **3)** $\int R_1\,(t, \sqrt{t^2-a^2})\,dt$**,** где $R_1$ - рациональная функция своих аргументов.

Последние интегралы, соответственно, с помощью тригонометрических или гиперболических подстановок:

**1)** $t=a\sin z$ или $t=a\,thz$ **;**

**2)** $t=a\,tgz$ или $t=a\,shz$ **;**

**3)** $t=\frac{a}{\cos z}$ или $t=a\,chz$

приводятся к интегралам вида $\int R_2(\sin z, \cos z)dz$ или $\int R_2(shz, chz)dz$, где $R_2$ - рациональная функция своих аргументов

## Тема. Определённый интеграл.

К понятию определённого интеграла можно прийти, решая задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, т.е. фигуры, заключённой между прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и кривой $y=f(x)$. Число, равное площади криволинейной трапеции, причём площадь той части, которая лежит выше оси $Ox$ берётся со знаком «+», и ниже её – со знаком « $-$ » и называется ***определённым интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Определённый интеграл обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, где числа $a, b$ называются ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определённый интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке. ***Достаточным условием интегрируемости*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является её непрерывность на данном отрезке.

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то, по определению, полагают $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$, $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

***Основные свойства определённого интеграла:***

**1.** $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx \quad (k = const)$.

**2.** $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

**3.** $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

**4.** Если $f(x) \le g(x)$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

**5.** Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $m$ - наименьшее, $M$ - наибольшее значения $f(x)$ на $[a,b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ (***теорема об оценке определённого интеграла***).

**6.** Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ (***теорема о среднем значении***). Число $f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется при этом ***средним значением*** функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a,b]$.

Понятие определённого интеграла тесно связано с понятием неопределённого интеграла (первообразной).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ - одна из её первообразных, то справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \text{ (}\textbf{\textit{формула Ньютона-Лейбница}}\text{).}$$

Следствиями формулы Ньютона-Лейбница являются формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то

$$\int_a^b udv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b vdu \text{ (}\textbf{\textit{формула интегрирования по частям}}\text{).}$$

Если функция $x=\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[c,d]\supset[a,b]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ ($[c,d]$ -образ отрезка $[\alpha,\beta]$, т.е. отрезок для которого $c\le\varphi(t)\le d$ при всех $\alpha\le t\le\beta$), то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \text{ (}\textbf{\textit{формула замены переменной}}\text{).}$$

При замене переменной в определённом интеграле в отличие от вычисления неопределённого не нужно возвращаться к исходному аргументу, так как преобразованный определённый интеграл берётся по тому отрезку, по которому изменяется новый аргумент.

При вычислении неопределённого интеграла по умолчанию предполагалось, что первообразная находится на тех промежутках, на которых выполняемые преобразования подынтегральной функции являются тождественными. При вычислении же определённого интеграла первообразная находится на заданном отрезке, поэтому здесь уже необходимо следить за тождественностью выполняемых преобразований.

**Геометрические приложения определённого интеграла.**

Площадь фигуры (рис.1) $a\le x\le b$, $f_1(x)\le y\le f_2(x)$ равна

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx.$$

Площадь фигуры (рис.2) $g_1(y)\le x\le g_2(y)$, $c\le y\le d$ равна

$$S=\int_{c}^{d}(g_2(y)-g_1(y))dy\,.$$

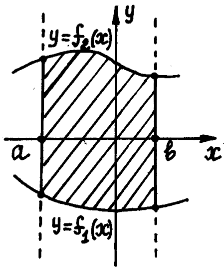



**Рис.1**

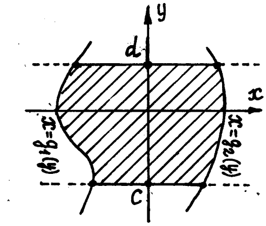



**Рис.2**

Если фигура (рис.3) ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью $Ox$, то её площадь равна $S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)\,dt$, где $t_1$ и $t_2$ определяются из уравнений $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$ ( $y(t)\ge 0$ на отрезке $[t_1,t_2]$ ).

Площадь криволинейного сектора (рис.4) $\alpha\le\varphi\le\beta$, $r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)$, где $r,\varphi$ - полярные координаты, равна $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi))\,d\varphi$.

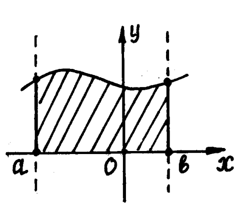



**Рис.3**

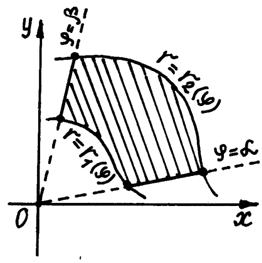



**Рис.4**

Длина дуги плоской кривой $y=f(x)$, $a\le x\le b$ равна

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(y'_x)^2}\;dx\,.$$

Длина дуги плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, равна $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$.

Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, равна:

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt .$$

Длина дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, равна $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2}\, d\varphi$.

Если $S = S(z)$ - площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси $Oz$, в точке с аппликатой $z$, то объём этого тела равен $V = \int\limits_a^b S(z)dz$, где $a$ и $b$ - аппликаты крайних сечений тела.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ плоской фигуры (рис.5) $a \le x \le b$, $0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x)$ равен $V_x = \pi \int\limits_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\, dx$.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ плоской фигуры (рис.6) $0 \le g_1(y) \le x \le g_2(y), c \le y \le d$, равен $V_y = \pi \int\limits_c^d [g_2^2(y) - g_1^2(y)]\, dy$.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры (рис.7) $0 \le a \le x \le b$, $0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x)$, равен $V_y = 2\pi \int\limits_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx$.

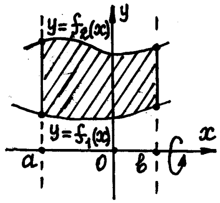



**Рис.5**

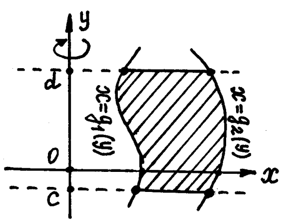



**Рис.6**

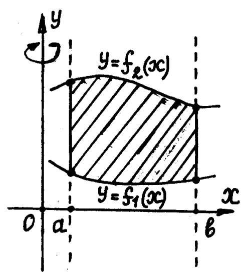



**Рис.7**

**<u>Приложения определенного интеграла к решению задач экономики.</u>**

Объём продукции $Q$, произведённой за отрезок времени $[t_1, t_2]$ при производительности $f(t)$, равен $Q = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Издержки производства $C$ при известной функции издержек $f(x)$ и заданном изменении объёма $x$ производства $x_1 \le x \le x_2$ равны $C = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

## Тема. <u>Несобственные интегралы</u>.

### Интегралы с бесконечными пределами.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то ***несобственным интегралом первого рода*** от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ называется $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, т.е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$.

Аналогично: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$.

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется равенством:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где $c \in R$ - произвольное число, причём интеграл в левой части равенства сходится, если сходятся оба интеграла в правой части.

### Интегралы от неограниченных функций.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема при $a \le x < b$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$, то ***несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Аналогично, в случае $a < x \le b$ и $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

## Тема. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где $y = y(x)$ - искомая функция, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка***. Функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество, называется ***решением*** уравнения, а график этой функции – ***интегральной кривой***. Если решение уравнения задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно обычно называется ***интегралом*** уравнения. Процесс нахождения решений называется ***интегрированием дифференциального уравнения***.

Уравнение вида $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ - заданная функция переменных $x$ и $y$, называется ***ДУ первого порядка, разрешённым относительно производной***. Эту форму записи ДУ называют ***нормальной.*** Учитывая, что $y' = dy/dx$, ДУ первого порядка, разрешённое относительно производной, можно всегда записать в ***дифференциальной форме***: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - заданные функции переменных $x$ и $y$.

Условие $y(x_0) = y_0$, где $x_0$, $y_0$ -заданные числа, называется ***начальным условием.*** Задача нахождения решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

***Общим решением*** ДУ первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C)$, зависящее от одной произвольной постоянной $C$, такое, из которого при надлежащем выборе значения постоянной $C = C_0$ можно получить решение $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, называется ***общим интегралом*** уравнения.

***Частным решением*** ДУ первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C_0)$, получаемое из общего при конкретном значении постоянной

$C = C_0$ (при этом не исключаются и значения $C = \pm\infty$). Частное решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называется ***частным интегралом*** уравнения.

Решение ДУ первого порядка, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется ***особым.*** Особое решение не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, включая $C = \pm\infty$. Особое решение всегда можно обнаружить в процессе построения общего решения (общего интеграла) данного ДУ. Это те решения, которые могут быть утеряны при преобразованиях данного уравнения, переводящих это уравнение в его общее решение (общий интеграл).

ДУ вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ называется уравнением ***с разделёнными переменными***. Его общий интеграл имеет вид $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$.

ДУ вида $y' = f(x)g(y)$ или $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ называется уравнением ***с разделяющимися переменными***. Его интегрирование, путём деления обеих частей уравнения на $g(y)$ или $Q_1(y) \cdot P_2(x)$, сводится (с учётом $y' = dy/dx$) к интегрированию уравнения с разделёнными переменными.

При выполнении деления возможна потеря решений, для которых $g(y) = 0$ или $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$. Потерянные решения или содержатся в формуле общего решения при каком-то конкретном значении произвольной постоянной (при этом не исключаются и значения $C = \pm\infty$) или являются особыми решениями.

Найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка – значит: **1)** найти его общее решение $y = \varphi(x, C)$ или общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$; **2)** найти то частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ (частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$) которое удовлетворяет заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f\left(y/x\right)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - однородные функции одинаковой степени, называется ***однородным***.

Функция $f(x, y)$, обладающая свойством $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$ при всех $\lambda > 0$, называется ***однородной функцией степени $\alpha$ .***

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $\boxed{y = xu}$, $y' = u + xu'$ или $dy = udx + xdu$, где $u = u(x)$ - новая неизвестная функция. Интегрируя ДУ с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$ и возвращаясь к искомой функции $y(x)$, находим общее решение исходного уравнения. Иногда целесообразно вместо подстановки $y = xu$, использовать подстановку $\boxed{x = yu}$, где $u = u(y)$ - новая неизвестная функция.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется ***линейным***. Уравнение $y' + p(x)y = 0$, в котором правая часть тождественно равна нулю, называется ***однородным линейным*** уравнением.

Общее решение неоднородного линейного уравнения находится подстановкой $\boxed{y = u \cdot v}$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - неизвестные функции от $x$. Уравнение тогда примет вид $[u' + p(x)u] \cdot v + u \cdot v' = q(x)$. Приравняв нулю выражение в скобках, получим уравнение с разделяющимися переменными $u' + p(x) \cdot u = 0$, из которого найдём $u(x)$ в виде его частного решения $u = e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная для $p(x)$. Подставив затем найденное выражение $u(x)$ в уравнение $[u' + p(x)u] \cdot v + u \cdot v' = q(x)$, получим уравнение с разделяющимися переменными $uv' = q(x)$, из которого найдём $v(x)$ в виде его общего решения. В результате найдём и общее решение исходного уравнения в виде $y = u \cdot v$.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли***. Решение уравнения Бернулли, также как и линейного, находится подстановкой $\boxed{y = u \cdot v}$.

## Тема. <u>Дифференциальные уравнения высших порядков.</u>

Уравнение вида $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где $y = y(x)$ - искомая функция, называется ***дифференциальным уравнением*** $n$***-го порядка***. Функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество, называется ***решением*** уравнения, а график этой функции – ***интегральной кривой***. Если решение уравнения задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется ***интегралом*** уравнения.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, называется уравнением, ***разрешённым относительно старшей производной***. Эту форму записи ДУ $n$-го порядка называют ***нормальной***.

Условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ - заданные числа, называются ***начальными условиями***.

Задача нахождения решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши.***

***Общим решением*** ДУ $n$-го порядка называется решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, зависящее от $n$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, такое, из которого при надлежащем выборе значений постоянных $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \dots, C_n = C_{n0}$ можно получить решение $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, называется ***общим интегралом*** уравнения.

***Частным решением*** ДУ $n$-го порядка называется решение $y = \varphi(x, C_{10}, \dots, C_{n0})$, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_{10}, \dots, C_n = C_{n0}$. Частное решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_{10}, \dots, C_{n0}) = 0$, называется ***частным интегралом.***

Если для искомого частного решения $y = \varphi(x, C_{10}, \dots, C_{n0})$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ заданы начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ и известно общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ уравнения, то значения $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$ произвольных постоянных определяются, если это возможно, из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y'_0 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ называется ***простейшим дифференциальным уравнением*** $n$***-го порядка***. Его общее решение находят, выполняя последовательно $n$ интегрирований, и записывают в виде

$$y = \underbrace{\int dx \int \dots \int f(x) dx}_{n \text{ раз}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n.$$

Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, $1 \le k < n$, не содержащее явно искомой функции $y(x)$, с помощью подстановки $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$ -

новая неизвестная функция, приводится к уравнению $(n-k)$ порядка $F(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)})=0$.

Функции $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$,..., $y_m=y_m(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на $(a,b)$, если существуют постоянные $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$, не все равные нулю, такие, что $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_m y_m=0$ для всех $x\in(a,b)$. Если равенство выполняется для всех $x\in(a,b)$ только при условии $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m$, то данные функции называются ***линейно независимыми*** на $(a,b)$.

Определитель $W(x)=W[y_1,y_2,\ldots,y_m]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$ называется ***определителем Вронского*** *(вронскианом)*.

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_m(x)$ линейно зависимы на $(a,b)$, то определитель Вронского $W(x)=W[y_1,y_2,\ldots,y_m]=0$ для всех $x\in(a,b)$ (***необходимое условие линейной зависимости***).

Если $W(x)=W[y_1,y_2,\ldots,y_m]\neq 0$ хотя бы в одной точке $x\in(a,b)$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_m(x)$ линейно независимы на $(a,b)$ (***достаточное условие линейной независимости***).

Уравнение вида $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$ называется ***линейным дифференциальным уравнением*** **(ЛДУ)** ***$n$-го порядка***, где коэффициенты $a_1,a_2,\ldots,a_n$- непрерывные функции или постоянные. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется ***однородным***. Однородное линейным уравнение $n$-го порядка имеет вид $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$.

Любая система из $n$ линейно независимых частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ однородного линейного уравнения называется ***фундаментальной системой*** его ***решений***.

Общее решение однородного линейного уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$ имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, где $y_1,y_2,\ldots,y_n$ - фундаментальная система его решений; $C_1,C_2,\ldots,C_n$ - произвольные постоянные .

Фундаментальная система решений $y_1,y_2,\ldots,y_n$ однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$ строится на основе характера корней ***характеристического уравнения*** $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$.

А именно: **1)** если $\lambda$ - действительный простой корень характеристического уравнения, то ему в ФСР соответствует частное решение $e^{\lambda x}$ дифференциального уравнения; **2)** если $\lambda$ - действительный корень кратности $k$, то ему в ФСР соответствует $k$ линейно независимых частных решений: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$; **3)** если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - пара простых комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения, то ей в ФСР соответствует два линейно независимых частных решения: $e^{\alpha x} cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$; **4)** если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - пара комплексно-сопряжённых корней кратности $k$, то ей в ФСР соответствует $2k$ линейно независимых частных решений: $e^{\alpha x} cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x} cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $\ldots$, $x^{k-1}e^{\alpha x} cos\beta x$, $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение неоднородного ЛДУ $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$, где $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения.

Частное решение $\tilde{y}$ уравнения с правой частью специального вида $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$ ищется ***методом неопределённых коэффициентов*** в виде $\tilde{y} = x^k e^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x]$, где $k = 0$, если число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и $k$ равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ в противном случае; $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - полные многочлены степени $N = \max\{m, l\}$ с неопределёнными коэффициентами. Примерами полных многочленов с неопределёнными коэффициентами степени $0, 1, 2, 3, \ldots$ соответственно являются: $A$, $Ax + B$, $Ax^2 + Bx + C$, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$,…. Для нахождения коэффициентов многочленов $S_N(x)$ и $T_N(x)$, надо подставить решение $\tilde{y}$ в неоднородное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим систему уравнений, решив которую, найдём значения коэффициентов.

Частное решение $\tilde{y}$ неоднородного ЛДУ с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ равно сумме частных решений $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ неоднородных уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, f_2$ (***принцип наложения решений***).

Частное решение $\tilde{y}$ уравнения с любой правой частью $f(x)$ может быть найдено ***методом вариации произвольных постоянных***. Для дифференциального уравнения второго порядка $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ метод состоит в следующем. Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2$ однородного уравнения $y''+a_1y'+a_2y=0$, то частное решение соответствующего неоднородного уравнения ищется в виде $\tilde{y}=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, где неизвестные функции $C_1(x), C_2(x)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2= & 0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'= & f(x) \end{cases}.$$

## Тема. <u>Системы дифференциальных уравнений.</u>

Система дифференциальных уравнений вида $\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n)$ $(i=1,2,\dots,n)$, где $y_i=y_i(x)$ - искомые функции, называется ***нормальной системой дифференциальных уравнений.*** Число $n$ **называется** ***порядком системы.*** Совокупность $n$ функций $y_1=\varphi_1(x), y_2=\varphi_2(x), \dots, y_n=\varphi_n(x)$ обращающих каждое уравнение системы в тождество, называется ***решением*** этой системы.

Условия $y_1(x_0)=y_{10}, y_2(x_0)=y_{20}, \dots, y_n(x_0)=y_{n0}$, где $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ - заданные числа, называются ***начальными условиями***. Задача нахождения решения нормальной системы уравнений, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

***Общим решением*** нормальной системы ДУ называется решение:

$$y_1=\varphi_1(x,C_1,\dots,C_n),\ y_2=\varphi_2(x,C_1,\dots,C_n), \dots, y_n=\varphi_n(x,C_1,\dots,C_n),$$

зависящее от $n$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, такое, из которого при надлежащем выборе значений постоянных $C_1=C_{10}, \dots, C_n=C_{n0}$ можно получить решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y_1(x_0)=y_{10}, \dots, y_n(x_0)=y_{n0}$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n)=C_i$, $(i=1,2,\dots,n)$ называется ***общим интегралом*** системы.

***Частным решением*** системы называется решение $y_1=\varphi_1(x,C_{10},\dots,C_{n0}), y_2=\varphi_2(x,C_{10},\dots,C_{n0}), \dots, y_n=\varphi_n(x,C_{10},\dots,C_{n0})$, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных

$C_1 = C_{10}, \ldots, C_n = C_{n0}$. Если для искомого частного решения системы заданы начальные условия $y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$ и известно общее решение $y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n)$ системы, то значения $C_{10}, \ldots, C_{n0}$ произвольных постоянных определяются, если это возможно, из системы уравнений $\begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_{10} \\ \cdots \\ \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_{n0} \end{cases}$.

Нормальные системы ДУ с небольшим числом уравнений решают ***методом исключения*** неизвестных функций приводя их к одному дифференциальному уравнению $n$-го порядка или к нескольким уравнениям порядка, меньшего чем $n$.

Для нахождения решения, например, нормальной системы двух уравнений $\frac{dx}{dt} = f(t, x, y)$, $\frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ - неизвестные функции независимой переменной $t$ поступают следующим образом. Сначала дифференцируют по $t$ первое из уравнений системы и получают уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f(t, x, y) + \frac{\partial f}{\partial y} g(t, x, y)$. Затем определяют $y$ из первого уравнения системы и подставляют найденное выражение $y = y(t, x, x'_t)$ в уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g$. В результате получают ДУ второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$, решая которое находят $x = \varphi(x, C_1, C_2)$, где $C_1$ и $C_2$ -произвольные постоянные. Подставляя $x = \varphi(t, C_1, C_2)$ в формулу $y = y(t, x, x'_t)$, определяют функцию $y = \psi(t, C_1, C_2)$. Совокупность функций $x = \varphi(t, C_1, C_2)$, $y = \psi(t, C_1, C_2)$ даёт общее решение системы.

## 6.3 Основные математические формулы.

**Формулы сокращённого умножения:**

**1.** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

**3.** $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

**4.** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

**Формулы тригонометрии:**

**1.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

**3.** $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha\,,$ **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha\,.$

**5.** $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

**6.** $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

**7.** $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

**9.** $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

**10.** $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2]$

**11.** $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

**12.** $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$

**13.** $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ **14.** $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

**Формулы приведения.**

| Функция | $\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ | $\beta = \pi \pm \alpha$ | $\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ | $\beta = 2\pi - \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\beta$ | $+\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| $\cos\beta$ | | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $+\cos\alpha$ |
| $tg\beta$ | $\mp ctg\alpha$ | $\pm tg\alpha$ | $\mp ctg\alpha$ | $-tg\alpha$ |
| $-tg\beta$ | $\mp tg\alpha$ | $\pm ctg\alpha$ | $\mp tg\alpha$ | $-ctg\alpha$ |

**Значения тригонометрических функций некоторых углов.**

| $\alpha$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | 0 | $-1$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | $-1/2$ | $-1$ | 0 | 1 |
| $tg\alpha$ | 0 | $1/\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | $-\sqrt{3}$ | 0 | $\infty$ | 0 |
| $ctg\alpha$ | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $1/\sqrt{3}$ | 0 | $-1/\sqrt{3}$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ |

## Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

| № п/п | $f(x)$ | $f'(x)$ | $df(x)$ |
|---|---|---|---|
| **1** | $x^{\alpha}\quad(\alpha\neq 0)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\alpha x^{\alpha-1}dx$ |
| **2** | $a^{x}\quad(a>0,\neq 1)$ | $a^{x}\ln a$ | $a^{x}\ln a dx$ |
| **3** | $e^{x}$ | $e^{x}$ | $e^{x}dx$ |
| **4** | $\log_a x\quad(a>0,\neq 1)$ | $\dfrac{1}{x\ln a}$ | $\dfrac{dx}{x\ln a}$ |
| **5** | $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\dfrac{dx}{x}$ |
| **6** | $\sin x$ | $\cos x$ | $\cos x dx$ |
| **7** | $\cos x$ | $-\sin x$ | $-\sin x dx$ |
| **8** | $tgx$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ |
| **9** | $ctgx$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ |
| **10** | $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| **11** | $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| **12** | $arctgx$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\dfrac{dx}{1+x^2}$ |
| **13** | $arcctgx$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ | $-\dfrac{dx}{1+x^2}$ |
| **14** | $chx$ | $shx$ | $shxdx$ |
| **15** | $shx$ | $chx$ | $chxdx$ |
| **16** | $thx$ | $\dfrac{1}{ch^2 x}$ | $\dfrac{dx}{ch^2 x}$ |
| **17** | $cthx$ | $-\dfrac{1}{sh^2 x}$ | $-\dfrac{dx}{sh^2 x}$ |

## Таблица основных неопределенных интегралов.

| № п/п | $\int f(x)dx$ | № п/п | $\int f(x)dx$ |
|---|---|---|---|
| **1** | $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$ <br> $(k \in R, k \neq -1)$ | **2** | $\int (x+a)^k dx = \frac{(x+a)^{k+1}}{k+1} + C$ <br> $(k \in R, k \neq -1)$ |
| **3** | $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ | **4** | $\int \frac{dx}{x+a} = \ln\lvert x+a\rvert + C$ |
| **5** | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ <br> $(a > 0,\ a \neq 1)$ | **6** | $\int e^x dx = e^x + C$ |
| **7** | $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | **8** | $\int \cos x dx = \sin x + C$ |
| **9** | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ | **10** | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ |
| **11** | $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$ | **12** | $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$ |
| **13** | $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$ | **14** | $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ |
| **15** | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ | **16** | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ |
| **17** | $\int shxdx = chx + C$ | **18** | $\int chxdx = shx + C$ |
| **19** | $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$ | **20** | $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$ |
| **21** | $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$ | | |
| **22** | $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \pm\frac{a^2}{2}\ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$ | | |

**6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

кафедра математики

# Контрольная работа

по дисциплине
«Интегралы и дифференциальные уравнения»

**Вариант № ____**
(номера выполняемых заданий: __________________________)

Выполнил: студент группы №_______
*Ф.И.О. студента*_________
зач. книжка - №_________
Проверил: преподаватель кафедры математики
*Ф.И.О. преподавателя*_____

Набережные Челны
20…

## 6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

| *Номер варианта* | *Номера выполняемых заданий в разделе I* | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| ***1*** | **1** | **11** | **21** | **31** | **41** | **51** | **61** | **71** | **81** | **91** |
| ***2*** | **2** | **12** | **22** | **32** | **42** | **52** | **62** | **72** | **82** | **92** |
| ***3*** | **3** | **13** | **23** | **33** | **43** | **53** | **63** | **73** | **83** | **93** |
| ***4*** | **4** | **14** | **24** | **34** | **44** | **54** | **64** | **74** | **84** | **94** |
| ***5*** | **5** | **15** | **25** | **35** | **45** | **55** | **65** | **75** | **85** | **95** |
| ***6*** | **6** | **16** | **26** | **36** | **46** | **56** | **66** | **76** | **86** | **96** |
| ***7*** | **7** | **17** | **27** | **37** | **47** | **57** | **67** | **77** | **87** | **97** |
| ***8*** | **8** | **18** | **28** | **38** | **48** | **58** | **68** | **78** | **88** | **98** |
| ***9*** | **9** | **19** | **29** | **39** | **49** | **59** | **69** | **79** | **89** | **99** |
| ***10*** | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** |
| ***11*** | **3** | **12** | **21** | **32** | **43** | **52** | **61** | **72** | **83** | **92** |
| ***12*** | **4** | **13** | **22** | **33** | **44** | **53** | **62** | **73** | **84** | **93** |
| ***13*** | **5** | **16** | **27** | **38** | **49** | **60** | **69** | **78** | **87** | **96** |
| ***14*** | **6** | **17** | **28** | **39** | **50** | **59** | **68** | **77** | **86** | **95** |
| ***15*** | **7** | **18** | **29** | **40** | **49** | **58** | **67** | **76** | **85** | **94** |
| ***16*** | **8** | **19** | **30** | **39** | **48** | **57** | **66** | **75** | **84** | **93** |
| ***17*** | **9** | **20** | **29** | **38** | **47** | **56** | **65** | **74** | **83** | **92** |
| ***18*** | **1** | **12** | **23** | **34** | **45** | **56** | **67** | **78** | **89** | **100** |
| ***19*** | **2** | **13** | **24** | **35** | **46** | **57** | **68** | **79** | **90** | **99** |
| ***20*** | **3** | **14** | **25** | **36** | **47** | **58** | **69** | **80** | **89** | **98** |
| ***21*** | **4** | **15** | **26** | **37** | **48** | **59** | **70** | **79** | **88** | **97** |
| ***22*** | **5** | **14** | **23** | **32** | **41** | **52** | **63** | **74** | **85** | **96** |
| ***23*** | **6** | **15** | **24** | **33** | **42** | **51** | **62** | **73** | **84** | **95** |
| ***24*** | **7** | **16** | **25** | **34** | **43** | **52** | **61** | **72** | **83** | **94** |
| ***25*** | **8** | **17** | **26** | **35** | **44** | **53** | **62** | **71** | **82** | **93** |
| ***26*** | **9** | **18** | **27** | **36** | **45** | **54** | **63** | **72** | **81** | **92** |
| ***27*** | **10** | **19** | **28** | **37** | **46** | **55** | **64** | **73** | **82** | **91** |
| ***28*** | **2** | **11** | **22** | **33** | **44** | **55** | **66** | **77** | **88** | **99** |
| ***29*** | **3** | **12** | **21** | **32** | **43** | **54** | **65** | **76** | **87** | **98** |
| ***30*** | **4** | **13** | **22** | **31** | **42** | **53** | **64** | **75** | **86** | **97** |

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

| *Номер варианта* | ***Номера выполняемых заданий в разделе II*** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *11* | *12* | *13* | *14* | *15* | *16* | *17* | *18* | *19* | *20* |
| ***1*** | **107** | **118** | **129** | **140** | **149** | **158** | **167** | **176** | **185** | **194** |
| ***2*** | **106** | **117** | **128** | **139** | **150** | **159** | **168** | **177** | **186** | **195** |
| ***3*** | **105** | **116** | **127** | **138** | **149** | **160** | **169** | **178** | **187** | **196** |
| ***4*** | **104** | **113** | **122** | **133** | **144** | **153** | **162** | **173** | **184** | **193** |
| ***5*** | **103** | **112** | **121** | **132** | **143** | **152** | **161** | **172** | **183** | **192** |
| ***6*** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** |
| ***7*** | **109** | **119** | **129** | **139** | **149** | **159** | **169** | **179** | **189** | **199** |
| ***8*** | **106** | **115** | **124** | **133** | **142** | **151** | **162** | **173** | **184** | **195** |
| ***9*** | **107** | **117** | **127** | **137** | **147** | **157** | **167** | **177** | **187** | **197** |
| ***10*** | **106** | **116** | **126** | **136** | **146** | **156** | **166** | **176** | **186** | **196** |
| ***11*** | **105** | **115** | **125** | **135** | **145** | **155** | **165** | **175** | **185** | **195** |
| ***12*** | **104** | **114** | **124** | **134** | **144** | **154** | **164** | **174** | **184** | **194** |
| ***13*** | **103** | **113** | **123** | **133** | **143** | **153** | **163** | **173** | **183** | **193** |
| ***14*** | **102** | **112** | **122** | **132** | **142** | **152** | **162** | **172** | **182** | **192** |
| ***15*** | **101** | **111** | **121** | **131** | **141** | **151** | **161** | **171** | **181** | **191** |
| ***16*** | **104** | **113** | **122** | **131** | **142** | **153** | **164** | **175** | **186** | **197** |
| ***17*** | **103** | **112** | **121** | **132** | **143** | **154** | **165** | **176** | **187** | **198** |
| ***18*** | **102** | **111** | **122** | **133** | **144** | **155** | **166** | **177** | **188** | **199** |
| ***19*** | **110** | **119** | **128** | **137** | **146** | **155** | **164** | **173** | **182** | **191** |
| ***20*** | **109** | **118** | **127** | **136** | **145** | **154** | **163** | **172** | **181** | **192** |
| ***21*** | **108** | **117** | **126** | **135** | **144** | **153** | **162** | **171** | **182** | **193** |
| ***22*** | **107** | **116** | **125** | **134** | **143** | **152** | **161** | **172** | **183** | **194** |
| ***23*** | **108** | **118** | **128** | **138** | **148** | **158** | **168** | **178** | **188** | **198** |
| ***24*** | **105** | **114** | **123** | **132** | **141** | **152** | **163** | **174** | **185** | **196** |
| ***25*** | **104** | **115** | **126** | **137** | **148** | **159** | **170** | **179** | **188** | **197** |
| ***26*** | **103** | **114** | **125** | **136** | **147** | **158** | **169** | **180** | **189** | **198** |
| ***27*** | **102** | **113** | **124** | **135** | **146** | **157** | **168** | **179** | **190** | **199** |
| ***28*** | **101** | **112** | **123** | **134** | **145** | **156** | **167** | **178** | **189** | **200** |
| ***29*** | **109** | **120** | **129** | **138** | **147** | **156** | **165** | **174** | **183** | **192** |
| ***30*** | **108** | **119** | **130** | **139** | **148** | **157** | **166** | **175** | **184** | **193** |

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

## С О Д Е Р Ж А Н И Е