

УДК 539.37

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА РАЗРЫВНЫХ ПРЕДОХРАНИТЕЛЬНЫХ МЕМБРАН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ

*М.С. Ганеева, В.Е. Моисеева, З.В. Скворцова*

*Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН,  
г. Казань, 420111, Россия*

### Аннотация

Численно исследовано нелинейное деформирование тонких сплюснутых эллипсоидальных сегментов под действием давления на их вогнутую поверхность нагретой или охлажденной рабочей среды. Анализ напряженно-деформированного состояния сегментов проведен с точки зрения применения их в качестве разрывных предохранительных мембран. Исследовано деформирование мембран в широком диапазоне температуры действующей среды. Рассмотрены конструктивные варианты мембраны без ограничения перемещения в полюсе и мембраны с разрывающим штоком, расположенным на некоторой высоте над полюсом недеформированного купола. Показано, что при отсутствии штока эллипсоидальный сегмент не отвечает условиям срабатывания предохранительных мембран. При наличии ограничения перемещения в полюсе сегмент может быть применен в качестве предохранительной мембраны взрывоопасного аппарата. Установлено, что с повышением температуры при неизменном положении разрывающего штока мембрана срабатывает при меньшем давлении. Проведено сравнение результатов, полученных для эллипсоидальных и сферических сегментов, имеющих одинаковые основания и высоту полюса над основанием. Установлено, что при одинаковой температуре технологической среды и одинаковом положении штока разрывное давление предохранительной мембраны, выполненной в виде эллипсоидального сегмента, значительно ниже по сравнению с разрывным давлением сферического сегмента близкой геометрии.

**Ключевые слова:** разрывные предохранительные мембраны, эллипсоидальный сегмент, давление, температура, нелинейный изгиб

### Введение

Для сброса избыточного давления в технологическом оборудовании, сосудах, трубопроводах используются плоские и предварительно выпученные предохранительные мембраны различных видов [1–3]. Выпученные разрывные мембраны выполняются в форме куполообразных сегментов и работают на разрыв под действием давления на вогнутую поверхность сегмента [1]. Для моделирования изгиба и срабатывания мембран необходима постановка задачи взаимодействия упругого элемента и жидкой (газообразной) среды. В работе [4] методом Бубнова – Галеркина решена задача устойчивости длинной пологой цилиндрической панели под действием давления жидкости при условии, что давление среды подчиняется адиабатическому закону. При таких же условиях в работах [3, 5] исследовалось деформирование сферических сегментов с позиций их применения в качестве предохранительных мембран. Известно, что в задачах прочности сферические оболочки

во многих случаях имеют преимущества по характеристикам нелинейного изгиба по отношению к другим оболочкам вращения [6]. Для предохранительных мембран важной является локализация их раскрытия в центральной части при определенном заданном давлении [1]. Актуальной задачей является выявление условий срабатывания мембран с формой купола, отличной от сферической, в частности эллипсоидальной. В обзоре [7] дан анализ литературы по статике, колебаниям и устойчивости эллипсоидальных оболочек. Процесс нелинейного изгиба оболочек, находящихся под действием давления среды и силовых нагрузок, усложняется при действии повышенной или пониженной температуры [2, 3, 8–13]. В работе [3] проведено исследование нелинейного деформирования сферического сегмента под действием давления охлажденной или нагретой сжимаемой среды на вогнутую поверхность. Показано, что при наличии ограничения перемещения в полюсе сегмент может быть применен в качестве предохранительной мембраны, причем давление срабатывания мембраны снижается с повышением температуры. Настоящая работа является продолжением [3] и посвящена исследованию нелинейного изгиба эллипсоидального сегмента по сравнению с изгибом сферического сегмента близкой формы, выявлению влияния отклонения формы купола от сферической на величину давления срабатывания.

### 1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается нелинейное осесимметричное деформирование тонкого сплюснутого эллипсоидального сегмента под действием давления охлажденной или нагретой сжимаемой среды на его вогнутую поверхность. Невесомая сжимаемая среда (газ) находится в герметически закрытой емкости с жесткими стенками. Давление в емкости создается медленной подачей газа. Оболочка в процессе деформации может взаимодействовать с цилиндрическим штоком радиуса  $r_0$ , расположенным на высоте  $d$  над полюсом недеформированной мембраны (рис. 1).

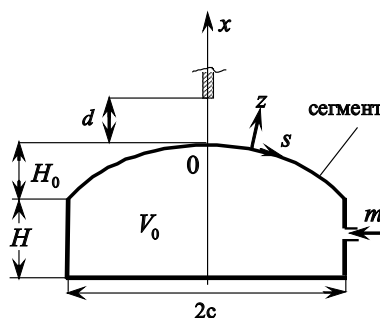


Рис. 1. Эллипсоидальный сегмент под действием давления газа

Характеристики эллипсоидального сегмента:  $a$ ,  $b$  – полуоси ( $b$  – полуось, направленная вдоль оси вращения  $x$ ),  $h$  – толщина,  $H_0$  – высота,  $c$  – радиус основания. Вводятся координатные линии: меридианы  $s$ ,  $0 \leq s \leq s_N$ , внешняя нормаль  $z$  к срединной поверхности,  $-h/2 \leq z \leq h/2$ ;  $R_1(s)$ ,  $R_2(s)$  – главные радиусы кривизны срединной поверхности;  $r = R_2 \sin \theta$  – радиус параллели,  $0 \leq \theta \leq \theta_N$  – угол между осью вращения  $x$  и нормалью  $z$ . Для газа приняты обозначения:  $M_0$  – масса,  $V_0$  – объем,  $p_0$  – давление,  $T_0$  – температура в ненапряженном состоянии сегмента;  $m$ ,  $V$ ,  $p$ ,  $T$  – масса дополнительно поданного в емкость газа, соответствующее изменение объема емкости и установившиеся в ней давление и температура соответственно. Температура сегмента совпадает с температурой газа. Принято,

что давление  $p$  в емкости в процессе всего нагружения изменяется по адиабатическому закону [4]  $p = p_0[(1 + m/M_0)/(1 + V/V_0)]^\gamma$ , где  $\gamma$  – коэффициент адиабаты.

Используемые соотношения для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких оболочек вращения под действием давления на оболочку  $P = p - p_0$  и разности температур  $T - T_0$  основаны на теории Кирхгофа–Лява с учетом геометрической нелинейности по теории среднего изгиба [10], физической нелинейности по теории малых упругопластических деформаций (материал сжимаем, разгрузка не учитывается) [14]. Влияние температуры учитывается по гипотезе Дюгамеля–Неймана [8]. При существенном отличии рабочих температур мембраны от начальной температуры  $T_0$  возникает необходимость учета зависимости упругих и теплофизических характеристик и диаграммы деформирования материала от температуры  $T$ . При этом в соотношениях термосилового задачи нужно использовать средний коэффициент линейного температурного расширения  $\tilde{\alpha}$  по интервалу  $[T_0, T]$  [8, 12, 13]. Материал оболочки следует закону линейного упрочнения с коэффициентом упрочнения  $\lambda$ , модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$ , пределом текучести  $\sigma_S$ , пределом прочности  $\sigma_B$ . В физических соотношениях задачи учтена зависимость характеристик материала от температур  $T_0, T$ :  $E = E(T)$ ,  $\sigma_S = \sigma_S(T)$ ,  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(T_0, T)$ . На основании оболочки  $s = s_N$  рассматриваются условия жесткой заделки.

В работах [2, 5] предложен алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи изгиба круглых пластин и оболочек вращения под действием давления сжимаемой среды и температуры на основе пошагового процесса по параметру массы подаваемой в емкость рабочей среды.

## 2. НДС эллипсоидального сегмента в зависимости от уровня температуры

Результаты вычислений получены при следующих значениях параметров:  $c = 100$  мм,  $a = 105.44$  мм,  $b = 0.5a$ ,  $h = 0.3$  мм,  $\bar{H}_0 = H_0/h = 120$ ,  $H = 2H_0$ ,  $\bar{s} = s/h$ ,  $\bar{s}_N = s_N/h = 366.17$ ,  $\gamma = 1.4$ ;  $E_0 = 2.03 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $T_0 = 20$  °С,  $p_0$  принимается равным атмосферному давлению. Механические и теплофизические характеристики материала оболочки представлены в табл. 1 [13, 15, 16].

В табл. 2 в зависимости от температуры для трех этапов деформирования при нарастании подачи газа  $m$  в емкость представлены безразмерные параметры нагрузки  $P$ , прогиба  $w$  в полюсе оболочки и наибольшей интенсивности напряжений  $\sigma_i = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22})^{0.5}$  в полюсе  $s = 0$  и на основании  $s = s_N$ . Далее используются безразмерные величины:  $\bar{m} = m/M_0$ ,  $\bar{P} = P/E_0$ ,  $\tilde{P} = 10^6 \cdot \bar{P}$ ,  $\bar{w} = w/h$ ,  $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/E_0$ ,  $\bar{\sigma}_{i,0} = 10^3 \cdot \bar{\sigma}_i$  при  $s = 0$ ,  $\bar{\sigma}_{i,N} = 10^3 \cdot \bar{\sigma}_i$  при  $s = s_N$ ,  $\bar{\sigma}_S = \sigma_S/E_0$ ,  $\bar{\sigma}_B = \sigma_B/E_0$ ,  $\bar{z} = z/h$ . Из табл. 2 видно, что на I этапе нагружения ( $\bar{P} = 7.8 \cdot 10^{-8}$ ), когда основное действие на НДС сегмента оказывает температура, у заделанного основания возникают напряжения, превышающие предел текучести, как при охлаждении, так и нагреве, за исключением диапазона температур 20–50 °С. При этом с уменьшением охлаждения величина  $\bar{\sigma}_i$  снижается до минимальных значений при температуре  $T_0$  и затем возрастает с ростом нагрева. Далее с ростом подачи газа (ростом нагружения) напряжения возрастают и остаются наибольшими у заделанного основания при –150 °С...100 °С. Видно, что на этапах нагружений II ( $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i = 2\bar{\sigma}_S$ ), III ( $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_B$ ) с ростом температуры  $T$  интенсивность напряжений  $\bar{\sigma}_i$  монотонно снижается. Известно [1], что при срабатывании разрывных мембран необходимо раскрытие их центральной части. За исключением диапазона рассмотренных повышенных температур 150–200 °С в данной задаче центральная

Табл. 1

Характеристики высоколегированной стали 12X18H10T

$T, ^\circ\text{C}$	-193	-103	-70	20	300	500
$E \cdot 10^{-5}, \text{МПА}$	2.12		2.09	2.03	1.74	1.53
$\sigma_S, \text{МПА}$	448		380	250		137
$\sigma_B, \text{МПА}$	1000			660		392
$\tilde{\alpha}(T_0, T) \cdot 10^5, 1/^\circ\text{C}$	1.32	1.49		1.58	1.72	1.79

Табл. 2

Три этапа деформирования эллипсоидального сегмента в зависимости от уровня температуры

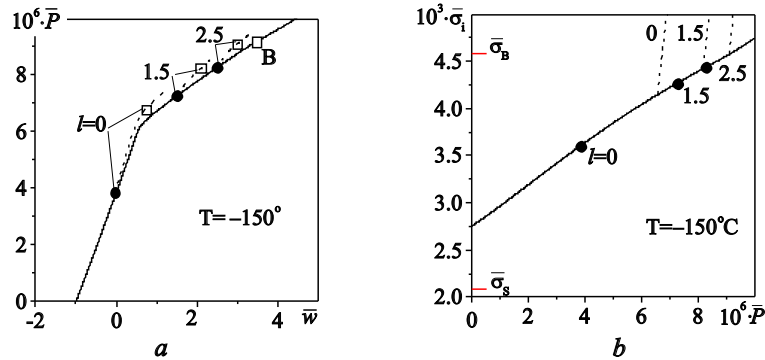
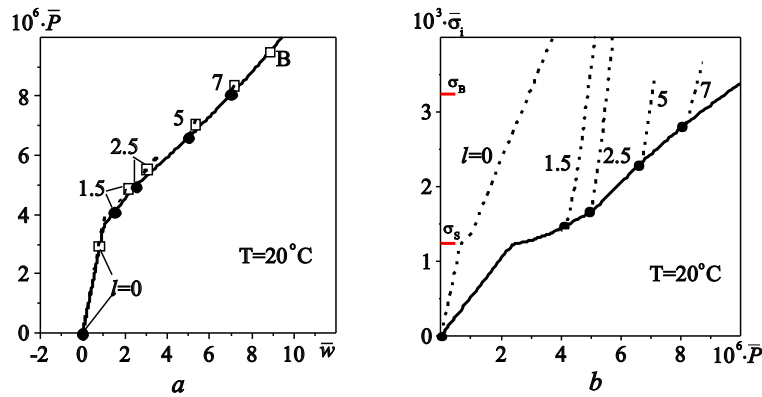
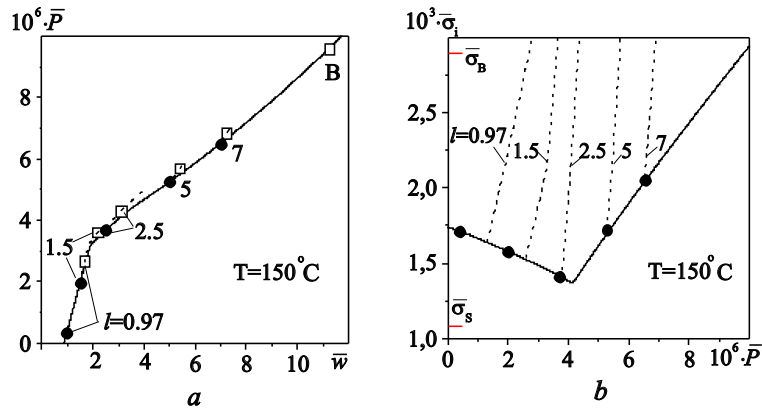
Этап	$T, ^\circ\text{C}$	-150	-100	-50	20	50	100	150	200
I	$\bar{P}$	0.078	0.078	0.077	0.076	0.078	0.078	0.077	0.078
	$10 \cdot \bar{m}$	1.100	1.100	1.100	1.100	1.140	1.150	1.150	1.18
	$\bar{w}$	-1.127	-0.836	-0.503	0.022	0.221	0.601	0.982	1.367
	$\bar{\sigma}_{i,0}$	0.027	0.027	0.027	0.024	0.027	0.028	0.030	0.028
	$\bar{\sigma}_{i,N}$	2.767	2.329	1.772	0.037	0.809	1.432	1.721	1.925
II	$\bar{P}$	6.752	8.107	8.506	7.066	7.368	7.230	6.851	6.464
	$10 \cdot \bar{m}$	59.00	68.20	71.00	61.66	63.81	63.00	60.50	57.90
	$\bar{w}$	-1.190	2.999	4.798	5.646	6.552	7.196	7.502	7.793
	$\bar{\sigma}_{i,0}$	2.237	2.592	2.668	2.217	2.292	2.279	2.162	2.046
	$\bar{\sigma}_{i,N}$	4.181	3.908	3.441	2.462	2.396	2.148	1.874	1.641
III	$\bar{P}$	9.173	9.479	9.870	9.515	9.751	10.03	9.606	9.139
	$10 \cdot \bar{m}$	75.00	77.10	79.80	77.95	79.56	81.50	78.96	76.10
	$\bar{w}$	3.453	4.691	6.549	8.842	9.635	10.85	11.24	11.57
	$\bar{\sigma}_{i,0}$	2.897	2.959	3.026	2.863	2.914	2.967	2.894	2.756
	$\bar{\sigma}_{i,N}$	4.588	4.194	3.802	3.251	3.169	3.031	2.723	2.414
$10^3 \cdot \bar{\sigma}_S$	2.091	1.954	1.720	1.231	1.198	1.139	1.081	1.023	
$10^3 \cdot \bar{\sigma}_B$	4.588	4.195	3.802	3.251	3.169	3.031	2.894	2.756	

часть сегмента не является наиболее напряженной, поэтому такой сегмент не отвечает условиям эксплуатации предохранительных мембран в широком диапазоне температур.

### 3. Изгиб сегмента с ограничением перемещения в полюсе

Ниже представлены результаты вычислений для нагретого или охлажденного сплюснутого эллипсоидального сегмента с ограничением перемещения в его полюсе, когда в процессе деформирования оболочка встречается со штоком радиуса  $\bar{r}_0 = r_0/a = 0.01$  на высоте  $l = d/h$  над полюсом [2, 3]. На рис. 2–4 даны результаты вычислений НДС для сегментов при температуре  $-150^\circ\text{C}$ ,  $20^\circ\text{C}$ ,  $150^\circ\text{C}$ .

На рис. 2–4,  $a$  сплошная линия отражает зависимость параметра нагрузки  $\bar{P}$  от прогиба  $\bar{w}$  в полюсе для оболочки без штока. На ней черными кружочками показаны моменты касания штоков  $0 \leq l \leq 7$ ,  $B$  – момент достижения  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_B$ . Расстояние  $l$  задается для  $T = 20^\circ\text{C}$ . Для охлажденного сегмента в начале процесса нагружения высота полюса над основанием меньше  $H_0$ , поэтому касание штока даже при  $l = 0$  происходит при ненулевом значении давления. Зависимости  $\bar{P}(\bar{w})$  при наличии штоков (штриховые линии) имеют ограниченную протяженность и мало отходят от зависимости для оболочки без штока для всех рассмотренных температур  $T$ . Белыми квадратиками на штриховых линиях отмечены моменты достижения  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_B$ . Видно, что для фиксированных значений  $l$

Рис. 2. Зависимости  $P(w)$  (a) и  $\sigma_i(P)$  (b) при  $T = -150^\circ\text{C}$ Рис. 3. Зависимости  $P(w)$  (a) и  $\sigma_i(P)$  (b) при  $T = 20^\circ\text{C}$ Рис. 4. Зависимости  $P(w)$  (a) и  $\sigma_i(P)$  (b) при  $T = 150^\circ\text{C}$ 

с ростом температуры снижается уровень давления, при котором достигается предел прочности материала предохранительной мембраны. На рис. 2–4, b приведены зависимости  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i$  от параметра нагрузки  $\bar{P}$ . Сплошная линия соответствует НДС сегментов без штока, в которых при температуре из диапазона  $-150^\circ\text{C} \dots 100^\circ\text{C}$  значения  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i$  наблюдаются у основания  $r = c$ , при этом при

Табл. 3

Сравнение деформирования эллипсоидального и сферического сегментов со штоками при достижении предела прочности материала при охлаждении и нагреве

Сегмент	$T, ^\circ\text{C}$	-150		20			150	
	$l$	1.50	2.5	0.0	1.5	2.5	1.5	2.5
Сферический $\bar{s}_N = 358.09$	$\bar{P}$	11.92	13.09	5.192	7.119	8.205	4.979	5.759
	$\bar{w}$	2.096	2.945	0.806	2.197	3.031	2.317	2.944
Эллипсоидальный $\bar{s}_N = 366.09$	$\bar{P}$	8.238	9.102	2.944	4.900	5.537	3.607	4.316
	$\bar{w}$	2.086	2.985	0.759	2.126	3.032	2.181	3.103

повышенных температурах  $T = 150^\circ\text{C}$ ,  $200^\circ\text{C}$  максимальная интенсивность напряжений с ростом нагружения перемещается к полюсу сегмента. После встречи сегмента со штоками напряженное состояние оболочки имеет сложный характер. При расположении штока непосредственно над сегментом ( $l = 0$ ) при неизменной температуре  $T = T_0 = 20^\circ\text{C}$  и у приподнятых штоков ( $l = 5, 7$ ) при повышенной температуре  $T = 150^\circ\text{C}$  значения  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i$  всегда наблюдаются у штока  $r = r_0$  (штриховые линии  $l = 0, T = 20^\circ\text{C}$ ;  $l = 5, 7, T = 150^\circ\text{C}$ ). Для штоков ( $0 \leq l \leq 2.5$  при  $T = -150^\circ\text{C}$ ,  $1.5 \leq l \leq 7$  при  $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $0.97 \leq l \leq 2.5$  при  $T = 150^\circ\text{C}$ ) максимальная интенсивность напряжений в момент касания (черные кружочки) наблюдается у основания и превосходит предел текучести. С нарастанием нагрузки  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i$  перемещается к штоку (штриховые линии  $0 \leq l \leq 2.5, T = -150^\circ\text{C}$ ;  $1.5 \leq l \leq 7, T = 20^\circ\text{C}$ ;  $0.97 \leq l \leq 2.5, T = 150^\circ\text{C}$ ). Предел прочности материала  $\bar{\sigma}_B = \max_{s,z} \bar{\sigma}_i$  достигается у штока. Из рис. 2-4, *b* видно, что контакт со штоками вызывает резкое возрастание напряжений в окрестности штоков.

На рис. 5-7 изображены эпюры прогиба  $\bar{w}$  и интенсивности напряжений  $\bar{\sigma}_i$  по меридиану для ряда значений параметра нагрузки  $\bar{P}_i$  при температурах  $T = -150^\circ\text{C}$ ,  $20^\circ\text{C}$ ,  $150^\circ\text{C}$ . При этом штриховые линии соответствуют эпюрам для оболочек со штоком при достижении предела прочности  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_B$ , сплошные – для оболочек без штока, для которых  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_B$  достигается при  $\bar{P} = 9.17 \cdot 10^{-6}$  ( $T = 150^\circ\text{C}$ ),  $\bar{P} = 9.51 \cdot 10^{-6}$  ( $T = 20^\circ\text{C}$ ),  $\bar{P} = 9.61 \cdot 10^{-6}$  ( $T = 150^\circ\text{C}$ ). Из рис. 5-7, *a* видно, что при отсутствии штока  $\max_s \bar{w}$  наблюдается в полюсе, при наличии штоков – на некотором удалении от штоков. При взаимодействии оболочки со штоком (рис. 5-7, *b*) возникает значительная концентрация напряжений в малой окрестности  $\bar{r} = \bar{r}_0$  как при неизменной температуре, так при нагреве и охлаждении.

В табл. 3 приведены сравнительные данные НДС для эллипсоидального и сферического сегментов, имеющих одинаковые основания, высоту полюса над основаниями и высоту разрывающих штоков. Представлены значения нагрузки достижения предела прочности материала  $\max_{s,z} \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_B$  и соответствующего прогиба при температуре  $T = -150^\circ\text{C}$ , для которой  $\bar{\sigma}_B = 4.588 \cdot 10^{-3}$ ;  $T = 20^\circ\text{C}$ , для которой  $\bar{\sigma}_B = 3.251 \cdot 10^{-3}$ , и  $T = 150^\circ\text{C}$ , для которой  $\bar{\sigma}_B = 2.894 \cdot 10^{-3}$ . Из табл. 3 видно, что различия значений параметров нагрузки сферического и эллипсоидального сегментов с ограничением перемещения в полюсе достигают 43% ( $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $l = 0$ ), а для прогибов не превышают 6%.

### Заключение

Таким образом, численно исследовано нелинейное деформирование эллипсоидального сегмента под действием давления охлажденной или нагретой сжимаемой среды на его вогнутую поверхность. Показано, что при отсутствии ограничения

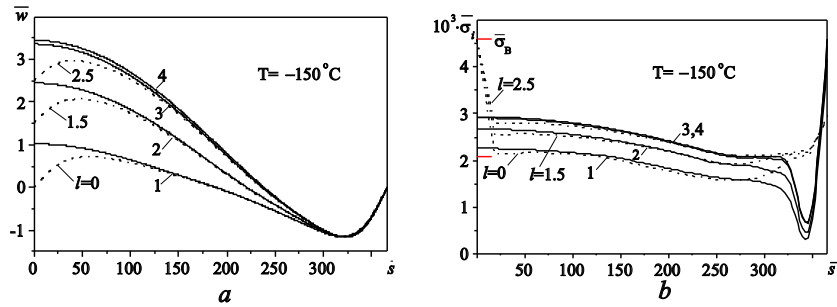


Рис. 5. Эпюры прогиба (а) и интенсивности напряжений (б) по меридиану при  $T = -150^\circ\text{C}$  для ряда значений параметра нагружения: 1 –  $\bar{P} = 6.76 \cdot 10^{-6}$ ; 2 –  $\bar{P} = 8.24 \cdot 10^{-6}$ ; 3 –  $\bar{P} = 9.10 \cdot 10^{-6}$ ; 4 –  $\bar{P} = 9.17 \cdot 10^{-6}$

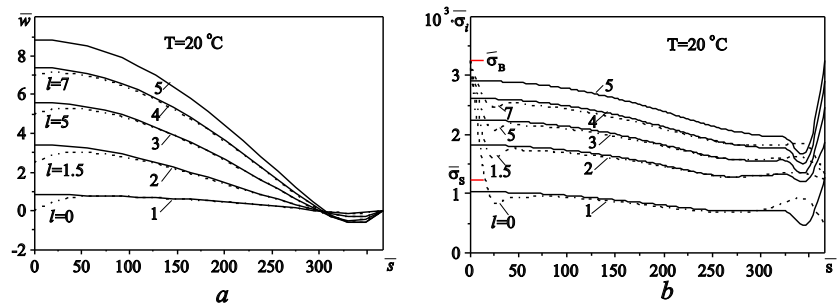


Рис. 6. Эпюры прогиба (а) и интенсивности напряжений (б) по меридиану при  $T = 20^\circ\text{C}$  для ряда значений параметра нагружения: 1 –  $\bar{P} = 2.94 \cdot 10^{-6}$ ; 2 –  $\bar{P} = 5.54 \cdot 10^{-6}$ ; 3 –  $\bar{P} = 7.06 \cdot 10^{-6}$ ; 4 –  $\bar{P} = 8.37 \cdot 10^{-6}$ ; 5 –  $\bar{P} = 9.51 \cdot 10^{-6}$

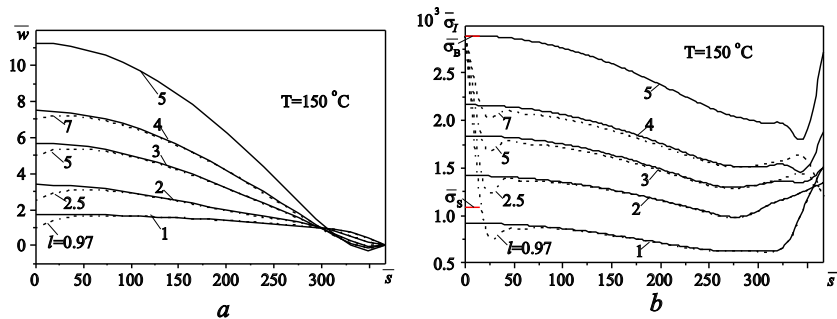


Рис. 7. Эпюры прогиба (а) и интенсивности напряжений (б) по меридиану при  $T = 150^\circ\text{C}$  для ряда значений параметра нагружения: 1 –  $\bar{P} = 2.68 \cdot 10^{-6}$ ; 2 –  $\bar{P} = 4.32 \cdot 10^{-6}$ ; 3 –  $\bar{P} = 5.63 \cdot 10^{-6}$ ; 4 –  $\bar{P} = 6.85 \cdot 10^{-6}$ ; 5 –  $\bar{P} = 9.61 \cdot 10^{-6}$

в полюсе сегмент не отвечает условиям срабатывания предохранительных мембран в широком диапазоне рабочих температур. Установлено, что при наличии ограничения перемещения в полюсе сегмент может быть применен в качестве предохранительной мембраны защищаемого аппарата. Показано, что с повышением температуры при фиксированной высоте разрывающего штока предохранительная мембрана срабатывает при меньшем давлении. Установлено, что при одинаковой температуре технологической среды и неизменной высоте штока разрывное давление мембраны, выполненной в виде эллипсоидального сегмента, значительно ниже по сравнению с разрывным давлением сферического сегмента близкой геометрии.

**Литература**

1. *Ольховский Н.Е.* Предохранительные мембраны. – М: Химия, 1976. – 149 с.
2. *Ганеева М.С., Ильгамов М.А., Моисеева В.Е.* Нелинейный изгиб плоских предохранительных мембран под действием давления жидкости и температуры // Изв. Уфим. научного центра РАН. – 2014. – № 2. – С. 41–47.
3. *Ганеева М.С., Моисеева В.Е., Скворцова З.В.* Нелинейный изгиб разрывных сферических предохранительных мембран под действием давления и температуры // Экол. вестн. науч. центров Черноморского экон. сотрудничества. – 2016. – № 2. – С. 37–45.
4. *Ильгамов М.А.* Статические задачи гидроупругости. – Казань: Ин-т механики и машиностроения КазНЦ РАН, 1994. – 208 с.
5. *Ганеева М.С., Ильгамов М.А., Моисеева В.Е.* Устойчивость сферического сегмента, нагруженного давлением сжимаемой жидкости // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – Вып. 71. – С. 71–76.
6. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. – М.: Физматлит, 1978. – 360 с.
7. *Krivoshapko S.N.* Research on general and axisymmetric ellipsoidal shells used as domes, pressure vessels, and tanks // Appl. Mech. Rev. – 2007. – V. 60, No 6. – P. 336–355. – doi: 10.1115/1.2806278.
8. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.
9. *Thornton E.A.* Thermal buckling of plates and shells // Appl. Mech. Rev. – 1993. – V. 46, No 10. – P. 485–506. – doi: 10.1115/1.3120310.
10. *Ганеева М.С.* Термосиловая задача в геометрически и физически нелинейной теории нетонких и тонких оболочек. – Казань, 1985. – 126 с. Деп. в ВИНТИ 24.06.85, № 4459-85Деп.
11. *Капустин С.А.* Численный анализ упруговязкопластических процессов деформирования и разрушения конструкций при квазистатических силовых, тепловых и радиационных воздействиях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 4. – С. 146–157.
12. *Ганеева М.С., Косолапова Л.А.* О соотношениях закона Гука в температурной задаче упругого твердого тела // Труды XVII Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1996. – Т. 1. – С. 33–37.
13. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
14. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч. I: Уругопластические деформации. – М.; Л: Гостехтеориздат, 1948. – 376 с.
15. *Солнцев Ю.П., Ермаков Б.С., Слепцов О.И.* Материалы для низких и криогенных температур. Энцикл. справочник. – СПб.: Химиздат, 2008. – 770 с.
16. *Новицкий Л.А., Кожеевников И.Г.* Теплофизические свойства материалов при низких температурах. Справочник. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.

Поступила в редакцию  
13.03.18



**Ганеева Музайна Сайтгареевна**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН  
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия  
E-mail: [ganeeva@kfti.knc.ru](mailto:ganeeva@kfti.knc.ru)

**Моисеева Валерия Евгеньевна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН  
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия  
E-mail: [moiseeva@kfti.knc.ru](mailto:moiseeva@kfti.knc.ru)

**Скворцова Зара Владимировна**, кандидат физико-математических наук, ученый секретарь

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН  
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия  
E-mail: [zara-skvortsova@yandex.ru](mailto:zara-skvortsova@yandex.ru)

---

---

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 4, pp. 670–680

---

---

## Numerical Analysis of Nonlinear Bending of the Safety Bursting Disks Subjected to the Pressure and Temperature of the Operating Medium

*M.S. Ganeeva\**, *V.E. Moiseeva\*\**, *Z.V. Skvortsova\*\*\**

*Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center,  
Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia*

E-mail: *\*ganeeva@kfti.knc.ru*, *\*\*moiseeva@kfti.knc.ru*, *\*\*\*zara-skvortsova@yandex.ru*

Received March 13, 2018

### Abstract

Nonlinear straining of thin ellipsoidal segments being under the pressure of the heated or cooled operating medium on their concave surfaces has been numerically studied. The analysis of the segments stress-strain state has been performed in terms of their use as bursting safety disks. Deformation of the disks has been studied in a wide temperature range for different constructive options, such as the absence of limited displacement in a segment pole and the presence of bursting rod above the pole of unstrained dome. It has been shown that the ellipsoidal segment fails to meet the conditions of actuation of the safety disks in the absence of a bursting rod. A segment can be used as a safety bursting disk of the dangerously explosive apparatuses if there is a limited displacement in the segment pole. It has been found that the segment is actuated at a lower pressure with increasing temperature at a constant position of a bursting rod. The results obtained for ellipsoidal and spherical segments having the same bases and the height of the pole above the base have been compared. It has been revealed that the bursting pressure of the ellipsoidal segment is significantly lower than the bursting pressure of a spherical segment of similar geometry at the same process medium temperature and rod location.

**Keywords:** safety bursting disks, ellipsoidal segment, pressure, temperature, nonlinear bending

## Figure Captions

- Fig. 1. Ellipsoidal segment under the action of gas pressure.
- Fig. 2. Relations  $P(w)$  (a) and  $\sigma_i(P)$  (b) at  $T = -150^\circ\text{C}$ .
- Fig. 3. Relations  $P(w)$  (a) and  $\sigma_i(P)$  (b) at  $T = 20^\circ\text{C}$ .
- Fig. 4. Relations  $P(w)$  (a) and  $\sigma_i(P)$  (b) at  $T = 150^\circ\text{C}$ .
- Fig. 5. Diagrams of deflection (a) and stress intensity (b) on the meridian at temperature  $T = -150^\circ\text{C}$ . for a number of values of the loading parameter: 1 –  $\bar{P} = 6.76 \cdot 10^{-6}$ ; 2 –  $\bar{P} = 8.24 \cdot 10^{-6}$ ; 3 –  $\bar{P} = 9.10 \cdot 10^{-6}$ ; 4 –  $\bar{P} = 9.17 \cdot 10^{-6}$ .
- Fig. 6. Diagrams of deflection (a) and stress intensity (b) on the meridian at  $T = 20^\circ\text{C}$ . for a number of values of the loading parameter: 1 –  $\bar{P} = 2.94 \cdot 10^{-6}$ ; 2 –  $\bar{P} = 5.54 \cdot 10^{-6}$ ; 3 –  $\bar{P} = 7.06 \cdot 10^{-6}$ ; 4 –  $\bar{P} = 8.37 \cdot 10^{-6}$ ; 5 –  $\bar{P} = 9.51 \cdot 10^{-6}$ .
- Fig. 7. Diagrams of deflection (a) and stress intensity (b) on the meridian at  $T = 150^\circ\text{C}$ . for a number of values of the loading parameter: 1 –  $\bar{P} = 2.68 \cdot 10^{-6}$ ; 2 –  $\bar{P} = 4.32 \cdot 10^{-6}$ ; 3 –  $\bar{P} = 5.63 \cdot 10^{-6}$ ; 4 –  $\bar{P} = 6.85 \cdot 10^{-6}$ ; 5 –  $\bar{P} = 9.61 \cdot 10^{-6}$ .

## References

1. Ol'khovskii N.E. *Predokhranitel'nye membrany* [Safety Disks]. Moscow, Khimiya, 1976. 149 p. (In Russian)
2. Ganeeva M.S., Il'gamov M.A., Moiseeva V.E. Nonlinear bending of plane safety membranes under the action of liquid pressure and temperature. *Izv. Ufim. Nauchn. Tsentra Ross. Akad. Nauk*, 2014, no. 2, pp. 41–47. (In Russian)
3. Ganeeva M.S., Moiseeva V.E., Skvortsova Z.V. Nonlinear bending and stability of ellipsoidal reverse buckling disks being under the liquid pressure and temperature. *Ekol. Vestn. Nauchn. Tsentrov Chernomorsk. Ekon. Sotr.*, 2016, no. 2, pp. 37–45. (In Russian)
4. Il'gamov M.A. *Staticheskie zadachi gidrouprugosti* [Static Problems of Hydroelasticity]. Kazan, Inst. Mekh. Mashinostr. KazNTs Ross. Akad. Nauk, 1994. 208 p. (In Russian)
5. Ganeeva M.S., Il'gamov M.A., Moiseeva V.E. Stability of a spherical segment loaded by the pressure of a compressible liquid. *Probl. Prochn. Plast.*, 2009, vol. 71, pp. 71–76. (In Russian)
6. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustoichivost' obolochek* [Stability of Shells]. Moscow, Fizmatlit, 1978. 360 p. (In Russian)
7. Krivoshapko S.N. Research on general and axisymmetric ellipsoidal shells used as domes, pressure vessels, and tanks. *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, no. 6, pp. 336–355. doi: 10.1115/1.2806278.
8. Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti* [Basics of Thermoelasticity]. Kiev, Naukova Dumka, 1970. 307 p. (In Russian)
9. Thornton E.A. Thermal buckling of plates and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 1993, vol. 46, no. 10, pp. 485–506. doi: 10.1115/1.3120310.
10. Ganeeva M.S. The thermal and force problem in the geometrically and physically nonlinear theory of non-thin and thin shells. Kazan, 1985. 126 p. Dep. VINITI on June 24, 1985, no. 4459-85Dep. (In Russian)
11. Kapustin S.A. Numerical analysis of elastic-viscoplastic deformation and failure processes in structures under quasistatic force, thermal and radiation effects. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2010, vol. 152, no. 4, pp. 146–157. (In Russian)

12. Ganeeva M.S., Kosolapova L.A. On Hooke's relations in the temperature problem of an elastic solid body. *Trudy XVII Mezhdunar. konf. po teorii obolochek i plastin* [Proc. of the XII Int. Conf. on the Theory of Shells and Plates] Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1996, vol. 1, pp. 33–37. (In Russian)
13. Bezuhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblatt I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschetny na prochnost', ustoychivost' i kolebaniya v usoviyakh vysokikh temperatur* [The Calculations for Strength, Stability, and Oscillations in High Temperature Conditions]. Moscow, Mashinostroenie, 1965. 567 p. (In Russian)
14. Il'yushin A.A. *Plastichnost'* [Plasticity]. Pt. I: Elastic-plastic deformations. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1948. 376 p. (In Russian)
15. Solntsev Yu.P., Ermakov B.S., Sleptsov O.I. *Materialy dlya nizkikh i kriogennykh temperatur. Entsikl. spravochnik* [Materials for Low and Cryogenic Temperatures. Encyclopedic Reference Book]. St. Petersburg, Khimizdat, 2008. 770 p. (In Russian)
16. Novitskii L.A., Kozhevnikov I.G. *Termofizicheskie svoystva materialov pri nizkikh temperaturakh. Spravochnik* [Thermophysical Properties of Materials at Low Temperatures. Handbook]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 216 p. (In Russian)

---

*Для цитирования:* Ганеева М.С., Моисеева В.Е., Скворцова З.В. Численное исследование нелинейного изгиба разрывных предохранительных мембран под действием давления и температуры рабочей среды // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 670–680.

*For citation:* Ganeeva M. S., Moiseeva V.E., Skvortsova Z.V. Numerical analysis of nonlinear bending of the safety bursting disks subjected to the pressure and temperature of the operating medium. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 670–680. (In Russian)