

УДК 514.762.33

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ НА ТЕНЗОРНОМ
РАССЛОЕНИИ ТИПА (2,0) НАД ГРУППОЙ ЛИ

Н.А. Опокина

Аннотация

В статье построены вертикальный и горизонтальный лифты левоинвариантных векторных полей. Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы горизонтальный лифт левоинвариантных векторных полей был левоинвариантным. Построены левоинвариантные вертикальное и горизонтальное распределения, а также левоинвариантная метрика g на T_0^2G из левоинвариантной метрики на базе G .

Ключевые слова: левоинвариантная метрика, тензорное расслоение над группой Ли, вертикальный и горизонтальный лифты, вертикальное и горизонтальное распределения.

1. Внутренние связности на T_0^2G

Пусть G – группа Ли размерности n . Мы будем использовать способ индексации компонент тензоров, введённый Б.Н. Шапуковым [1]. Пространство T_0^2 отождествляется с векторным пространством F размерности n^2 с помощью линейного изоморфизма $J : T_0^2 \rightarrow F$. Выбрав в F некоторый базис $\{e_\alpha\}$, положим $Je_{ij} = J_{ij}^\alpha e_\alpha$. Тогда в координатах

$$T^\alpha = J_{ij}^\alpha T^{ij}.$$

Здесь J_{ij}^α – некоторые константы, зависящие от выбора базисов и образующие невырожденную n^2 -матрицу, где α означает номер строки, а совокупность индексов ij , занумерованных в некотором порядке, – номер столбца. С помощью обратной матрицы $J^{-1} = (J_\alpha^{ij})$ получим $T^{ij} = J_\alpha^{ij} T^\alpha$. При этом выполняются соотношения

$$J_{ij}^\alpha J_\beta^{ij} = \delta_\beta^\alpha, \quad J_\alpha^{ij} J_{km}^\alpha = \delta_k^i \delta_m^j.$$

Вследствие этого тензорное расслоение T_0^2M можно отождествить с векторным $E(M)$ с помощью линейного изоморфизма J над M

$$x^i = x^i, \quad T^\alpha = J_{ij}^\alpha T^{ij}. \quad (1)$$

Компоненты x^i, T^α образуют на расслоенном многообразии *адаптированные координаты* $(X^A) = (x^i, T^\alpha)$, где индексы пробегают следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{базисные } i, j, k, \dots &= 1, \dots, n; \\ \text{слоевые } \alpha, \beta, \gamma, \dots &= n+1, \dots, N = n+n^2; \\ \text{тотальные } A, B, C, \dots &= 1, \dots, N = n+n^2. \end{aligned}$$

Пусть G – группа Ли с умножением

$$(x, y) \rightarrow z = f(x, y) = xy, \quad (2)$$

(U, Ψ) – карта в окрестности единичного элемента e группы Ли, в которой e имеет нулевые координаты, x^i – координаты точки $x \in U$. Если $x, y, z \in U$, то в этой окрестности групповую операцию (2) можно записать в координатах:

$$z^i = f^i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n).$$

Здесь f^i являются аналитическими функциями своих аргументов. Функции $f^i(x, y)$ называются *групповыми функциями*. Они удовлетворяют очевидным соотношениям

$$f^i(x, e) = x^i, \quad f^i(e, y) = y^i, \quad \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)_e = \left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \right)_e = \delta_j^i.$$

Обозначим через $L(x) : G \rightarrow G$ и $R(x) : G \rightarrow G$ соответственно левый и правый сдвиги на группе G , порожденные элементом x .

Рассмотрим тензорное расслоение типа $(2, 0)$ над группой Ли G с проекцией $\pi : T_0^2 G \rightarrow G$. Многообразию $T_0^2 G$ является группой Ли с умножением [2]

$$(x, T_x) \circ (y, T_y) = (xy, L_*(x)T_y + R_*(y)T_x). \quad (3)$$

В координатной записи

$$z^k = f^k(x^i, y^j), \quad T_z^{ij} = L_k^i(x)L_m^j(x)T_y^{km} + R_k^i(y)R_m^j(y)T_x^{km}, \quad (4)$$

где $(L_i^j(x)) = (\partial_{y^j} f^i(x, y))$ – матрица дифференциала левого сдвига, применённого к элементу $y \in G$, $(R_i^j(y)) = (\partial_{x^j} f^i(x, y))$ – матрица дифференциала правого сдвига, применённого к элементу $x \in G$. Используя введенный способ индексации, положим

$$L_\beta^\alpha(x) = J_{km}^\alpha L_i^k(x)L_j^m(x)J_\beta^{ij}, \quad R_\beta^\alpha(x) = J_{km}^\alpha R_i^k(x)R_j^m(x)J_\beta^{ij}. \quad (5)$$

Тогда операция умножения (3) примет вид:

$$z^k = f^k(x^i, y^j), \quad T_z^\alpha = L_\beta^\alpha(x)T_y^\beta + R_\beta^\alpha(y)T_x^\beta. \quad (6)$$

Из (3) следует, что дифференциал левого действия на $T_0^2 G$ в натуральном поле реперов имеет вид:

$$L_*(X) = \begin{pmatrix} L_*(x) & 0 \\ \partial_y(R_*(y) \otimes R_*(y))_e T_x & L_*(x) \otimes L_*(x) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $L_*(x)$, $R_*(x)$ – дифференциалы левого и правого действия на группе G соответственно. Каждый из ненулевых блоков матрицы (7) имеет следующий координатный вид [2]

$$\begin{aligned} L_*(x) &= (L_j^i(x)), \\ (\partial_y(R_*(y) \otimes R_*(y))_e T_x &= J_{km}^\alpha (\delta_j^m \partial_i L_s^k(x) + \delta_i^k \partial_j L_s^m(x)) T_x^{ij} \equiv L_{\beta s}^\alpha(x) T_x^\beta, \\ L_*(x) \otimes L_*(x) &= (L_\alpha^\beta(x)). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим проекцию $p : T_0^2 M \rightarrow M$. Тогда её дифференциал $p_* : T(T_0^2 M) \rightarrow TM$ есть морфизм касательных расслоений, который всякому вектору U в точке $X \in T_0^2 M$ ставит в соответствие вектор $u = p_* U$ в точке $p(X)$. Возникает *вертикальное подрасслоение*

$$V(T_0^2 M) = \ker p_* \subset T(T_0^2 M)$$

размерности m^2 , сечения которого называются *вертикальными векторными полями* на $T_0^2 M$. Вертикальные подпространства образуют инволютивное распределение на многообразии $T_0^2 M$.

Определение 1. Говорят, что расслоение T_0^2M снабжено внутренней связностью, если на расслоенном многообразии задано гладкое распределение $H(T_0^2M)$, дополнительное к вертикальному.

Указанное распределение принято называть горизонтальным [1]. Таким образом,

$$T(T_0^2M) = H(T_0^2M) \oplus V(T_0^2M).$$

Построим горизонтальное распределение $H(T_0^2G)$ на расслоении T_0^2G . Локально его можно задать проектируемыми векторными полями

$$\partial_i^H = \partial_i - \Gamma_i^\alpha(X)\partial_\alpha,$$

π -связанными с векторами ∂_i натурального поля реперов на базе, где $X \in T_0^2G$. Вместе с вертикальными векторными полями $\partial_\alpha = J_\alpha^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$ они образуют адаптированное поле реперов на T_0^2G [3]. Двойственным образом это распределение задается базисом линейных форм

$$\omega^\alpha = d\Gamma^\alpha + \Gamma_i^\alpha(X)dx^i,$$

которые вместе с 1-формами dx^i образуют *адаптированное поле кореперов*. В том случае, когда функции $\Gamma_i^\alpha(X)$ линейно и однородно зависят от слоевых координат T^α , то есть

$$\Gamma_i^\alpha(x^k, T_x^\beta) = \Gamma_{i\gamma}^\alpha(x^k)T^\gamma,$$

говорят, что внутренняя связность линейна. Таким образом, внутренняя связность задается функциями $\Gamma_{i\gamma}^\alpha(x)$ – компонентами внутренней связности [3].

Рассмотрим группу Ли G . На всякой группе Ли, поскольку она является параллелизуемым многообразием, существуют канонические линейные связности. Рассмотрим левую связность $\tilde{\nabla}$, относительно которой абсолютно параллельны левоинвариантные векторные поля. Левая связность имеет нулевую кривизну, но ненулевое кручение [4]. Коэффициенты левой связности имеют вид

$$\hat{\Gamma}_{ij}^k(x) = -\tilde{L}_j^s(x)\partial_i L_s^k(x) = L_s^k(x)\partial_i \tilde{L}_j^s(x), \quad (9)$$

где $(L_j^s(x))$ – матрица дифференциала левого сдвига на $L_*(x)$ на группе Ли G , $(\tilde{L}_j^s(x))$ – матрица, обратная к матрице $(L_j^s(x))$.

Известно, что левая связность группы G однозначно определяет на расслоении T_0^2G внутреннюю связность с компонентами [5]

$$\hat{\Gamma}_{kpq}^{ij}(x) = \delta_p^i \hat{\Gamma}_{kq}^j(x) + \delta_q^j \hat{\Gamma}_{kp}^i(x). \quad (10)$$

С учётом обозначений, введённых ранее, величины (10) можно записать также в виде

$$\hat{\Gamma}_{k\beta}^\alpha(x) = J_{ij}^\alpha \hat{\Gamma}_{kpq}^{ij}(x) J_\beta^{pq}, \quad (11)$$

где J_β^{pq} – компоненты обратной матрицы J^{-1} .

Рассмотрим правую связность $\tilde{\nabla}$ на группе Ли G , относительно которой абсолютно параллельны правоинвариантные векторные поля. Правая связность имеет нулевую кривизну, но ненулевое кручение [4].

Известно [6], что правая связность на группе Ли является взаимной к левой связности. Пусть $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ – коэффициенты правой связности в натуральном поле реперов. Тогда

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x) = \hat{\Gamma}_{ji}^k(x), \quad (12)$$

откуда коэффициенты правой связности в натуральном поле реперов равны

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x) = -\tilde{L}_i^s(x)\partial_j L_s^k(x). \quad (13)$$

Вычислим коэффициенты внутренней связности на T_0^2G , используя формулу (10). Имеем

$$\tilde{\Gamma}_{i\beta}^\alpha = J_{km}^\alpha J_\beta^{ps} (\delta_p^k \tilde{\Gamma}_{is}^m + \delta_s^m \tilde{\Gamma}_{ip}^k). \quad (14)$$

Тогда, учитывая (12) и (10), получим

$$\tilde{\Gamma}_{i\beta}^\alpha = J_{km}^\alpha J_\beta^{ps} (\delta_p^k \tilde{\Gamma}_{is}^m + \delta_s^m \tilde{\Gamma}_{ip}^k) = J_{km}^\alpha J_\beta^{ps} (\delta_p^k \hat{\Gamma}_{si}^m + \delta_s^m \hat{\Gamma}_{pi}^k) = \hat{\Gamma}_{\beta i}^\alpha.$$

Отсюда следует

Предложение 1. *Внутренняя связность на T_0^2G , построенная из правой связности на базе G , является взаимной к внутренней связности (10), построенной из левой связности на G .*

2. Горизонтальный и вертикальный лифты векторных полей

Рассмотрим вертикальное распределение на тензорном расслоении T_0^2G . Для него верно следующее предложение.

Предложение 2. *Вертикальное распределение $V(T_0^2G) \subset T_0^2G$ левоинвариантно.*

Доказательство. Возьмём произвольный вектор $U \in V_E(T_0^2G)$ и применим к нему дифференциал левого сдвига (7). Тогда

$$U(X) = L_*(X)U = L_\beta^\alpha(x)U^\beta \partial_\alpha,$$

откуда следует, что $U(X) \in V_X(T_0^2G)$, то есть вертикальное распределение $V(T_0^2G) \subset T_0^2G$ левоинвариантно. \square

Пусть $E_i(X) = e_i^H(X)$ – горизонтальный лифт левоинвариантного векторного поля $e_i(x)$ на G . Отображение горизонтального лифта, то есть линейный изоморфизм $H : T_xG \rightarrow H_X(T_0^2G)$, перестановочно с дифференциалом левого сдвига:

$$E_i(X) = e_i^H(X) = (L_*(x)\partial_i)^H = L_*(X)\partial_i^H.$$

Найдём условие, при котором $\{E_i\}$ являются левоинвариантными векторными полями. Условие левоинвариантности E_i

$$E_i(AX) = L_*(A)E_i(X), \quad (15)$$

где $A \in T_0^2G$. В координатах относительно натурального поля реперов E_i условие левоинвариантности имеет вид

$$E_i(X) = L_i^k(x)(\partial_k - \Gamma_{k\alpha}^\beta(x)T_x^\alpha \partial_\beta).$$

Тогда

$$L_*(A)E_i(X) = L_j^k(a)L_i^j(x)\partial_k - (L_{\beta j}^\alpha(a)T_a^\beta L_i^j(x) + L_\beta^\alpha(a)L_i^k(x)\Gamma_{k\gamma}^\beta(x)T_x^\gamma)\partial_\alpha. \quad (16)$$

С другой стороны,

$$E_i(AX) = L_i^k(ax)(\partial_k - \Gamma_{k\beta}^\alpha(ax)T_{ax}^\beta \partial_\alpha). \quad (17)$$

Заметим, что в силу формулы (3)

$$T_{ax}^\beta = L_\gamma^\beta(a)T_x^\gamma + R_\gamma^\beta(x)T_a^\gamma.$$

Вследствие этого

$$E_i(AX) = L_i^k(ax)\partial_k - (L_i^k(ax)\Gamma_{k\beta}^\alpha(ax)L_\gamma^\beta(a)T_x^\gamma + L_i^k(ax)\Gamma_{k\beta}^\alpha(ax)R_\gamma^\beta(x)T_a^\gamma)\partial_\alpha. \quad (18)$$

Полагая в формулах (16) и (18) $X = E = (e, 0)$ и сравнивая их, получим:

$$L_{\gamma i}^\alpha(a)T_a^\gamma = L_i^k(a)\Gamma_{k\gamma}^\alpha(a)T_a^\gamma,$$

откуда

$$\begin{aligned} \Gamma_{i\gamma}^\alpha(a) &= -\tilde{L}_i^k(a)L_{\gamma k}^\alpha(a) = -\tilde{L}_i^k(a)J_{sm}^\alpha(\delta_q^m\partial_p L_k^s(a) + \delta_p^s\partial_q L_k^m(a))J_\gamma^{pq} = \\ &= J_{sm}^\alpha J_\gamma^{pq}(-\delta_q^m\tilde{L}_i^k(a)\partial_p L_k^s(a) - \delta_p^s\tilde{L}_i^k(a)\partial_q L_k^m(a)) \end{aligned}$$

Учитывая формулы (13) и (14), имеем

$$\Gamma_{i\gamma}^\alpha(a) = J_{sm}^\alpha J_\gamma^{pq}(\delta_q^m\tilde{\Gamma}_{ip}^s(a) + \delta_p^s\tilde{\Gamma}_{iq}^m(a)) = \tilde{\Gamma}_{i\gamma}^\alpha(a), \quad (19)$$

где $\tilde{\Gamma}_{ij}^k(a)$ – коэффициенты правой связности на группе Ли G , $\tilde{\Gamma}_{i\gamma}^\alpha(a)$ – коэффициенты внутренней связности на группе Ли T_0^2G . Получили следующий результат.

Теорема 1. *Для того чтобы горизонтальные лифты левоинвариантных векторных полей являлись левоинвариантными, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты внутренней связности совпадали с коэффициентами внутренней связности $\tilde{\Gamma}_{i\gamma}^\alpha$, задаваемыми (14).*

Следствие 1. *Поле реперов E_i образует левоинвариантное поле реперов горизонтального распределения $H(T_0^2G)$.*

Для горизонтального распределения на тензорном расслоении T_0^2G верна следующая

Теорема 2. *Горизонтальное распределение $H(T_0^2G)$, определяемое связностью с коэффициентами $\tilde{\Gamma}_{i\beta}^\alpha$ (14), является левоинвариантным.*

Доказательство. Пусть $U \in H_E(T_0^2G)$, то есть $U = U^i\partial_i^H(E)$. Заметим, что

$$\partial_i^H(E) = \partial_i(E) - \Gamma_i^\alpha(E)\partial_\alpha(E) = \partial_i(E),$$

так как коэффициенты линейной связности Γ_i^α в единице $E = (e, 0) \in T_0^2G$ равны нулю. Действуя на вектор U дифференциалом левого сдвига (7), получим

$$U(X) = L_*(X)U = L_j^i(x)U^j\partial_i + L_{\beta j}^\alpha(x)T_x^\beta U^j\partial_\alpha.$$

С учетом формулы (9) и предложения 1 получим

$$\begin{aligned} L_{\beta s}^\alpha(x)T_x^\beta &= J_{km}^\alpha(\partial_p L_s^k(x)T_x^{pm} + \partial_q L_s^m(x)T_x^{kq}) = \\ &= J_{km}^\alpha(\delta_q^m\partial_p L_s^k(x) + \delta_p^k\partial_q L_s^m(x))T_x^{pq} = -J_{km}^\alpha(\hat{\Gamma}_{pi}^k(x)L_s^i(x)\delta_q^m + \hat{\Gamma}_{qj}^m(x)L_s^j(x)\delta_p^k)T_x^{pq} = \\ &= -J_{km}^\alpha(\hat{\Gamma}_{pj}^k(x)\delta_q^m + \hat{\Gamma}_{qj}^m(x)\delta_p^k)L_s^j(x)T_x^{pq} = -L_s^j(x)\hat{\Gamma}_{\beta j}^\alpha(x)T_x^\beta = -L_s^j(x)\tilde{\Gamma}_{j\beta}^\alpha(x)T_x^\beta. \end{aligned}$$

Тогда

$$U(X) = L_j^i(x)U^j(\partial_i - \tilde{\Gamma}_{i\gamma}^\alpha(x)T_x^\beta\partial_\alpha) = L_j^i(x)U^j\partial_i^H = U^j E_j.$$

Отсюда следует, что вектор $U(X) \in H_X(T_0^2G)$. Значит, горизонтальное распределение левоинвариантно. \square

Определим вертикальные векторные поля

$$E_\alpha(X) = J_\alpha^{ij} e_i(x) \otimes e_j(x). \quad (20)$$

В координатах они имеют вид $E_\alpha(X) = L_\alpha^\beta(x) \partial_\beta$.

Теорема 3. *Вертикальные векторные поля E_α , определённые формулой (20), являются левоинвариантными.*

Доказательство. Возьмём вертикальные вектора $E_\alpha(X) \in V_X(T_0^2G)$ и применим к ним дифференциал левого сдвига (7). В результате получим

$$L_*(A)E_\alpha(X) = L_\gamma^\beta(a)L_\alpha^\gamma(x)\partial_\beta = L_\alpha^\beta(ax)\partial_\beta = E_\alpha(AX).$$

□

Следствие 2. *Поле реперов E_α образует левоинвариантное поле реперов вертикального распределения $V(T_0^2G)$.*

Итак, мы построили левоинвариантное и адаптированное поле реперов $\{E_A = (E_i, E_\alpha)\}$, где

$$E_i(X) = L_i^j(x)\partial_j^H, \quad E_\alpha(X) = L_\alpha^\beta(x)\partial_\beta. \quad (21)$$

Найдём структурные уравнения. Рассмотрим сначала коммутатор $[E_\alpha, E_\beta]$. Учитывая определение коммутатора и вид базиса (21), получим

$$[E_\alpha, E_\beta] = [L_\alpha^\gamma(x)\partial_\gamma, L_\beta^\delta(x)\partial_\delta] = L_\alpha^\gamma(x)(\partial_\gamma L_\beta^\delta(x))\partial_\delta - L_\beta^\delta(x)(\partial_\delta L_\alpha^\gamma(x))\partial_\gamma = 0.$$

Вычислим коммутатор $[E_i, E_\alpha]$:

$$\begin{aligned} [E_i, E_\alpha] &= [L_i^j(x)\partial_j^H, L_\alpha^\beta(x)\partial_\beta] = \\ &= L_i^j(x)(\partial_j^H L_\alpha^\beta(x))\partial_\beta - L_\alpha^\beta(x)(\partial_\beta L_i^j(x))\partial_j^H + L_i^j(x)L_\alpha^\beta(x)[\partial_j^H, \partial_\beta] = \\ &= L_i^j(x)(\partial_j L_\alpha^\beta(x))\partial_\beta + L_i^j(x)L_\alpha^\beta(x)[\partial_j^H, \partial_\beta]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$[\partial_j^H, \partial_\beta] = [\partial_j - \tilde{\Gamma}_{j\alpha}^\gamma(x)T^\alpha\partial_\gamma, \partial_\beta] = \partial_\beta(\tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\gamma(x)T^\alpha)\partial_\gamma = \tilde{\Gamma}_{j\beta}^\gamma(x)\partial_\gamma.$$

Учитывая последнее выражение, имеем

$$[E_i, E_\alpha] = L_i^j(x)(\partial_j L_\alpha^\beta(x))\partial_\beta + L_i^j(x)L_\alpha^\beta(x)\tilde{\Gamma}_{j\beta}^\gamma(x)\partial_\gamma. \quad (22)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [E_i, E_\alpha] &= C_{i\alpha}^j E_j + C_{i\alpha}^\beta E_\beta = C_{i\alpha}^j L_j^k(x)\partial_k^H + C_{i\alpha}^\beta L_\beta^\gamma(x)\partial_\gamma = \\ &= C_{i\alpha}^j L_j^k(x)(\partial_j - \tilde{\Gamma}_{k\delta}^\gamma(x)T^\delta\partial_\gamma) + C_{i\alpha}^\beta L_\beta^\gamma(x)\partial_\gamma = \\ &= C_{i\alpha}^j L_j^k(x)\partial_j - C_{i\alpha}^j L_j^k(x)\tilde{\Gamma}_{k\delta}^\gamma(x)T^\delta\partial_\gamma + C_{i\alpha}^\beta L_\beta^\gamma(x)\partial_\gamma. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с (22), имеем

$$C_{i\alpha}^j L_j^k(x) = 0,$$

$$C_{i\alpha}^j L_j^k(x)\tilde{\Gamma}_{k\delta}^\gamma(x)T^\delta + C_{i\alpha}^\beta L_\beta^\gamma(x) = L_i^j(x)(\partial_j L_\alpha^\gamma(x)) + L_i^j(x)L_\alpha^\beta(x)\tilde{\Gamma}_{j\beta}^\gamma(x),$$

откуда $C_{i\alpha}^j = 0$ и

$$C_{i\alpha}^\beta L_\beta^\gamma(x) = L_i^j(x)(\partial_j L_\alpha^\gamma(x)) + L_i^j(x)L_\alpha^\beta(x)\tilde{\Gamma}_{j\beta}^\gamma(x). \quad (23)$$

Полагая в (23) $X = E$, получим

$$C_{i\alpha}^\beta = (\partial_i L_\alpha^\beta(x))_e + \tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\beta(e).$$

Вычислим структурные константы $C_{i\alpha}^\beta$

$$(\partial_i L_\alpha^\beta(x))_e = J_{ps}^\beta J_\alpha^{km}((\partial_i L_k^p(x))_e \delta_m^s + (\partial_i L_m^s(x))_e \delta_k^p);$$

и

$$\tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\beta(e) = J_{ps}^\beta J_\alpha^{km}(\tilde{\Gamma}_{ik}^p(e) \delta_m^s + \tilde{\Gamma}_{im}^s(e) \delta_k^p) = J_{ps}^\beta J_\alpha^{km}(-(\partial_k L_i^p(x))_e \delta_m^s - (\partial_m L_m^i(x))_e \delta_k^p).$$

Складывая $(\partial_i L_\alpha^\beta(x))_e$ и $\tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\beta(e)$, получим

$$\begin{aligned} C_{i\alpha}^\beta &= J_{ps}^\beta J_\alpha^{km}((\partial_i L_k^p(x))_e \delta_m^s + (\partial_i L_m^s(x))_e \delta_k^p - \\ &\quad - (\partial_k L_i^p(x))_e \delta_m^s - (\partial_m L_m^i(x))_e \delta_k^p) = J_{ps}^\beta J_\alpha^{km}(c_{ik}^p \delta_m^s + c_{im}^s \delta_k^p) = c_{i\alpha}^\beta. \end{aligned}$$

Вычислим последний коммутатор

$$\begin{aligned} [E_i, E_j] &= [L_i^k(x)\partial_k^H, L_j^m(x)\partial_m^H] = \\ &= L_i^k(x)(\partial_k^H L_j^m(x))\partial_m^H - L_j^m(x)(\partial_m^H L_i^k(x))\partial_k^H + L_i^k(x)L_j^m(x)[\partial_k^H, \partial_m^H] = \\ &= L_i^k(x)(\partial_k L_j^m(x))\partial_m^H - L_j^m(x)(\partial_k L_i^m(x))\partial_m^H + L_i^k(x)L_j^m(x)[\partial_k^H, \partial_m^H] = \\ &= c_{ij}^k L_m^k(x)\partial_m^H + L_i^k(x)L_j^m(x)[\partial_k^H, \partial_m^H] = c_{ij}^k E_k + L_i^k(x)L_j^m(x)[\partial_k^H, \partial_m^H]. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} [\partial_k^H, \partial_m^H] &= [\partial_k - \tilde{\Gamma}_{k\beta}^\alpha T^\beta \partial_\alpha, \partial_m - \tilde{\Gamma}_{m\delta}^\gamma T^\delta \partial_\gamma] = \\ &= -(\partial_k \tilde{\Gamma}_{m\delta}^\gamma) T^\delta \partial_\gamma + \tilde{\Gamma}_{k\beta}^\alpha T^\beta \partial_\alpha (\tilde{\Gamma}_{m\delta}^\gamma T^\delta) \partial_\gamma + (\partial_m \tilde{\Gamma}_{k\beta}^\alpha) T^\beta \partial_\alpha - \tilde{\Gamma}_{m\delta}^\gamma T^\delta \partial_\gamma (\tilde{\Gamma}_{k\beta}^\alpha T^\beta) \partial_\alpha = \\ &= (\partial_m \tilde{\Gamma}_{k\beta}^\alpha - \partial_k \tilde{\Gamma}_{m\beta}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{k\beta}^\gamma \tilde{\Gamma}_{m\gamma}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{m\beta}^\gamma \tilde{\Gamma}_{k\gamma}^\alpha) T^\beta \partial_\alpha = \tilde{R}_{\beta mk}^\alpha T^\beta \partial_\alpha. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{R}_{\beta mk}^\alpha$ – компоненты тензора кривизны внутренней связности (14), построенной из коэффициентов правой связности на базе [7]. Так как $\tilde{R}_{\beta mk}^\alpha = 0$, то

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k.$$

Таким образом, установлен следующий результат

Предложение 3. Коммутаторы векторных полей (21) имеют следующий вид:

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \quad [E_i, E_\alpha] = c_{i\alpha}^\beta E_\beta, \quad [E_\alpha, E_\beta] = 0. \quad (24)$$

Из первого соотношения вытекает, что горизонтальное распределение инвариантно [7]. Тогда, используя теорему Фробениуса [7], получим

Предложение 4. Левоинвариантное горизонтальное распределение $H(T_0^2G)$, определяемое связностью с коэффициентами $\tilde{\Gamma}_{i\beta}^\alpha$ (14), является вполне интегрируемым.

3. Левоинвариантная метрика на тензорных расслоениях типа (2,0) групп Ли

Пусть $\{\partial_i\}$ – поле натуральных реперов на группе Ли G . Тогда векторные поля $e_i(x) = L_*(x)\partial_i$ образуют левоинвариантное поле реперов на G .

Определение 2. (Псевдо)риманова метрика \widehat{g} произвольной сигнатуры на группе Ли G называется левоинвариантной, если она инвариантна при левых сдвигах, то есть если

$$L^*(x)\widehat{g}(u_y, v_y) = \widehat{g}(L_*^{-1}(x)u_{xy}, L_*^{-1}(x)v_{xy}), \quad (25)$$

где $u_y, v_y \in T_yG$ [8].

Чтобы задать левоинвариантную метрику \widehat{g} , достаточно задать ее в единице группы, то есть в формуле (25) положить $y = e$. Тогда в любой точке $x \in G$ её компоненты в натуральном поле реперов равны [9]

$$\widehat{g}_{ij}(x) = \widehat{g}_{km}(e)\widetilde{L}_i^k(x)\widetilde{L}_j^m(x), \quad (26)$$

где $(\widetilde{L}_i^k(x))$ – матрица, обратная к матрице дифференциала левого сдвига на группе G . В левоинвариантном поле реперов $\{e_i(x)\}$ левоинвариантная метрика имеет постоянные компоненты, которые определяются следующим образом:

$$\widehat{g}_{ij} = (e_i, e_j).$$

Тогда в этом поле реперов левоинвариантная метрика имеет вид

$$\widehat{g} = \widehat{g}_{ij}d\omega^i d\omega^j,$$

где $\omega^i = \widetilde{L}_*(x)dx^i$ образуют базис левоинвариантных 1-форм на G .

Определим скалярное произведение на левоинвариантном горизонтальном распределении $H(T_0^2G)$:

$$(E_i(X), E_j(X)) = (e_i^H(X), e_j^H(X)) = (e_i(x), e_j(x)) \circ \pi(X) = \widehat{g}_{ij}. \quad (27)$$

Мы построили метрику на горизонтальном распределении, которая является горизонтальным лифтом метрики \widehat{g} . Будем её обозначать как \widehat{g}^H .

Теперь определим скалярное произведение на левоинвариантном вертикальном распределении $V(T_0^2G)$:

$$\begin{aligned} (E_\alpha(X), E_\beta(X)) &= J_\alpha^{ij} J_\beta^{km} (e_i(x) \otimes e_j(x), e_k(x) \otimes e_m(x)) = \\ &= J_\alpha^{ij} J_\beta^{km} (e_i(x), e_k(x))(e_j(x), e_m(x)) = J_\alpha^{ij} J_\beta^{km} \widehat{g}_{ik} \widehat{g}_{jm}. \end{aligned} \quad (28)$$

Мы построили метрику на вертикальном распределении, которая является вертикальным лифтом метрики \widehat{g} . Будем её обозначать как \widehat{g}^V .

Пусть $(E_i, E_\alpha) = 0$, то есть горизонтальное и вертикальное распределения ортогональны. Построим метрику g на тензорном расслоении T_0^2G следующим образом:

$$g = \begin{pmatrix} \widehat{g}^H & 0 \\ 0 & \widehat{g}^V \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Таким образом, на основе метрики \widehat{g} построена метрика g на тензорном расслоении, которая в левоинвариантном адаптированном поле реперов (21) имеет постоянные компоненты

$$g = \begin{pmatrix} \widehat{g}_{ij} & 0 \\ 0 & \widehat{g}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Эта метрика на тензорном расслоении T_0^2G в левоинвариантном адаптированном поле реперов (21) имеет вид

$$g = \widehat{g}_{ij} d\Omega^i d\Omega^j + \widehat{g}_{\alpha\beta} d\Omega^\alpha d\Omega^\beta, \quad (31)$$

где $\Omega^i = \widetilde{L}_j^i(x) dx^j$, $\Omega^\alpha = \widetilde{L}_\beta^\alpha(x) (dT^\beta + \widehat{\Gamma}_{\gamma i}^\beta(x) T_x^\gamma dx^i)$ – левоинвариантные 1-формы. Из способа построения этой метрики вытекает

Теорема 4. *Метрика (31) является левоинвариантной.*

Подставим левоинвариантные формы Ω^i, Ω^α в (31). Тогда получим

$$\begin{aligned} g &= \widehat{g}_{ij} \widetilde{L}_k^i(x) \widetilde{L}_m^j(x) dx^k dx^m + \\ &+ \widehat{g}_{\alpha\beta} \widetilde{L}_\gamma^\alpha(x) \widetilde{L}_\delta^\beta(x) (dT^\gamma + \widehat{\Gamma}_{\omega k}^\gamma(x) T_x^\omega dx^k) (dT^\delta + \widehat{\Gamma}_{\eta m}^\delta(x) T_x^\eta dx^m) = \\ &= (\widehat{g}_{ij} \widetilde{L}_k^i(x) \widetilde{L}_m^j(x) + \widehat{g}_{\alpha\beta} \widetilde{L}_\gamma^\alpha(x) \widetilde{L}_\delta^\beta(x) \widehat{\Gamma}_{\omega k}^\gamma(x) \widehat{\Gamma}_{\eta m}^\delta(x) T_x^\omega T_x^\eta) dx^k dx^m + \\ &+ 2\widehat{g}_{\alpha\beta} \widetilde{L}_\gamma^\alpha(x) \widetilde{L}_\delta^\beta(x) \widehat{\Gamma}_{\omega k}^\gamma(x) T_x^\omega dx^k dT^\delta + \widehat{g}_{\alpha\beta} \widetilde{L}_\gamma^\alpha(x) \widetilde{L}_\delta^\beta(x) dT^\gamma dT^\delta. \end{aligned}$$

Из определения левоинвариантной метрики следует, что

$$\widehat{g}_{ij} \widetilde{L}_k^i(x) \widetilde{L}_m^j(x) = \widehat{g}_{ij}(x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{\alpha\beta} \widetilde{L}_\gamma^\alpha(x) \widetilde{L}_\delta^\beta(x) &= J_\alpha^{ij} J_\beta^{km} \widehat{g}_{ik} \widehat{g}_{jm} J_{ps}^\alpha J_\gamma^{tq} L_t^p(x) L_q^s(x) J_{cd}^\beta J_\delta^{lr} L_l^c(x) L_r^d(x) = \\ &= J_\gamma^{tq} J_\delta^{lr} \widehat{g}_{ik} L_t^i(x) L_l^k(x) \widehat{g}_{jm} L_q^j(x) L_r^m(x) = J_\gamma^{tq} J_\delta^{lr} \widehat{g}_{il}(x) \widehat{g}_{qr}(x) = \widehat{g}_{\gamma\delta}(x). \end{aligned}$$

Значит, левоинвариантная метрика (31) в натуральном поле реперов имеет вид

$$\begin{aligned} g &= (\widehat{g}_{ij}(x) + \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) \widehat{\Gamma}_{\omega i}^\gamma(x) \widehat{\Gamma}_{\eta j}^\delta(x) T_x^\omega T_x^\eta) dx^i dx^j + \\ &+ 2\widehat{g}_{\alpha\beta}(x) \widehat{\Gamma}_{\gamma i}^\alpha(x) T_x^\gamma dx^i dT^\beta + \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) dT^\alpha dT^\beta. \end{aligned}$$

Summary

N.A. Opokina. Left-Invariant Metrics on a Tensor Bundle of Type (0,2) over a Lie Group.

In this paper, we construct vertical and horizontal lifts of left-invariant vector fields. We establish necessary and sufficient conditions for the horizontal lift of a left-invariant vector field to be a left-invariant field. From a left-invariant metric on G , we build a left-invariant metric on T_0^2G .

Key words: left-invariant metric, tensor bundle over a Lie group, vertical and horizontal lifts, left-invariant vertical and horizontal distributions.

Литература

1. Шапужов Б.Н. Тензорные расслоения // Памяти Лобачевского посвящается: Сб. науч. ст. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – С. 104–125.
2. Опокина Н.А. Касательные и тензорные расслоения типа (2,0) над группой Ли // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147, кн. 1. – С. 138–147.
3. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 4. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1988 – 496 с.

4. *Шапужов Б.Н.* Задачи по группам Ли и их приложениям. – М.: НИИЦ «РХД», 2002. – 256 с.
5. *Опокина Н.А.* Левая связность на тензорном расслоении типа $(2,0)$ над группой Ли // Изв. вузов. Матем. – 2006. – № 11. – С. 77–82.
6. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: Едиториал УРПС, 2004. – 362 с.
7. *Кобалси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. – 344 с.
8. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр 5. Риманова геометрия. – М.: Факториал, 1998. – 496 с.
9. *Гаврилов С.П.* Геодезические левоинвариантных метрик на связной двумерной неабелевой группе Ли // Гравитация и теория относительности: Сб. ст. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981. – Вып. 18. – С. 28–44.

Поступила в редакцию
18.06.12

Опокина Надежда Анатольевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и экономической информатики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: opnadin@mail.ru