

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Региональный научно-образовательный математический центр КФУ
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ - 2019

**Сборник трудов
Международной научной конференции
Казань, 4 – 7 сентября 2019 г.**



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2019

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9

ББК 22.15

С56

Международная конференция «Современная геометрия и её приложения - 2019»: сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2019. – 170 с.

ISBN 978-5-00130-198-1

В сборнике трудов опубликованы 0 статьи, посвященные современным проблемам геометрии и её приложений.

Материалы сборника предназначены для научных сотрудников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области геометрии и ее приложений.

УДК 512.54+514.1+514.7+514.8+515.1+517.5+517.9

ББК 22.15

ISBN 978-5-00130-198-1

СОДЕРЖАНИЕ

<i>А.В. Аминова, М.Н. Сабитова.</i> О проективных движениях псевдоримановых многообразий	6
<i>А.В. Аминова, Д.Р. Хакимов.</i> О проективных движениях жестких h -пространств	6
<i>А. Артикбаев.</i> Пятая геометрия на плоскости	7
<i>А.В. Багаев, Н.И. Жукова.</i> Характеристика Эйлера–Сатаки компактных аффинных орбифолдов	9
<i>Л.Н. Бакирова, В.В. Шурыгин (мл.).</i> Симметрии уравнения Блэка–Шоулза–Мертон для европейских опционов	16
<i>В.В. Балащенко.</i> Канонические почти симплектические структуры на однородных Φ -пространствах	18
<i>М.Б. Банару, Г.А. Банару.</i> О почти контактной метрической структуре косимплектического типа на гиперповерхности келерова многообразия	22
<i>К.В. Башашина.</i> Ассоциированные проективная, центропроективная, аффинно-групповая, линейная и аффинная связности	26
<i>О.О. Белова.</i> Редукция связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей	30
<i>V.N. Berestovskii, Yu.G. Nikonorov.</i> Finite homogeneous metric spaces	33
<i>А.И. Булыгин.</i> Геометрия подобно однородных \mathbb{R} -деревьев	42
<i>С.В. Галаев.</i> Плоские полу-метрические кососимметрические связности на субримановых многообразиях	46
<i>Т.А. Гончар, Е.И. Яковлев.</i> О геометрии расслоенных псевдоримановых многообразий	50
<i>V.S. Dryuma.</i> On 3D-manifolds determined by the second order ODE's	55
<i>Н.М. Ибодуллаева.</i> Обобщенная условная кривизна поверхности	60
<i>Ю.Г. Игнатьев.</i> Метод самосогласованного поля и макроскопические уравнения Эйнштейна для ранней Вселенной со скалярным полем	62
<i>Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина.</i> Дифференциальная геометрия кривых в системе компьютерной математики MAPLE	68
<i>М.О. Katanaev, B.O. Volkov.</i> Point disclinations in the Chern–Simons geometric theory of defects	71
<i>П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов.</i> Однородные инвариантные солитоны Риччи на трехмерных группах Ли с векторным кручением	72
<i>С.В. Клепикова, О.П. Хромова.</i> Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля	74
<i>С.Б. Климентов.</i> Изгибания поверхностей рода $p \geq 0$	76
<i>А. Kocherova, I. Zhdanovskiy.</i> Geometry of commutators	81
<i>А.В. Кулешов.</i> О геометрии орбит пространства центропроективных реперов .	84
<i>М.В. Куркина, В.В. Славский.</i> Преобразование Лежандра конформно-выпуклых функций	88
<i>Л.П. Ладыненко.</i> Геометрическая характеристика специальных почти геодезических отображений пространств аффинной связности с кручением	91

<i>Д.С. Лисенков, Н.Р. Хуснутдинов, А.А. Попов.</i> Поляризация вакуума квантованного скалярного поля при ненулевой температуре на фоне кротовой норы с бесконечно короткой горловиной	93
<i>М.Х. Люлинский.</i> Клиффордовы трюки в дифференциальных уравнениях . . .	95
<i>Й. Микеш, И. Гинтерлейтнер, Н.И. Гусева.</i> Конформные отображения n -мерных пространств Эйнштейна с n полными изотропными геодезическими	97
<i>А.А. Малюгина, В.В. Шурьгин.</i> Псевдогруппа голономии многообразия над алгеброй дуальных чисел и некоторые ее применения	99
<i>А.В. Марьин, А.А. Попов.</i> Решения с плоской симметрией в $f(R)$ гравитации с дополнительными измерениями	101
<i>О.И. Мохов.</i> Метрики диагональной кривизны и их приложения	107
<i>А.Р. Нурбаев.</i> Индикатриса поверхностей в четырехмерном галилеевом пространстве	111
<i>О.М. Омелян.</i> О пучке связностей 4-го типа, индуцированного композиционным оснащением распределения плоскостей	114
<i>А.А. Роров.</i> Evolution of subspaces in $f(R)$ multidimensional gravity.	117
<i>Ю.И. Попов.</i> Дифференциально-геометрические структуры многообразия $P_n^0(\mathbb{H})$	118
<i>А.М. Pupasov-Maksimov.</i> Coupling and decoupling of matrix Schrödinger-Hill operators by isospectral flows	120
<i>А.К. Рыбников, К.В. Семенов.</i> О геометрических структурах, ассоциированных с дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка	124
<i>Н.А. Рязанов.</i> Новый вывод дифференциальных уравнений тензоров кривизны фундаментально-групповой и аффинной связностей	127
<i>А.А. Сабыканов, Й. Микеш, П. Пешка.</i> О рекуррентных проективно евклидовых пространствах, отличных от полусимметрических.	129
<i>Г.А. Серякин.</i> О проективных движениях четырехмерных многообразий специального вида	132
<i>Е.Н. Синюкова.</i> Элементы геометрии касательного расслоения пространства аффинной связности, индуцированной теорией приближений базового пространства	133
<i>В.В. Славский, В.А. Самарин, О.В. Самарина.</i> Круговая три-ткань цифрового изображения и её инварианты	135
<i>Ж.А. Собиров, Т.Н. Сафаров.</i> Внутренняя геометрия поверхности в галилеевом пространстве	139
<i>Е.Н. Сосов.</i> О действиях с сохранением пучка прямых на пространстве Лобачевского групп вещественных чисел	140
<i>И.С. Стрельцова.</i> Проективные инварианты прямолинейных 3-тканей	142
<i>В.И. Субботин.</i> О перечислении выпуклых многогранников с правильными гранями и ромбическими вершинами	145
<i>А.Я. Султанов.</i> О максимальной размерности алгебр Ли аффинных векторных полей вещественных реализаций голоморфных линейных связностей на касательных расслоениях произвольного порядка	147
<i>Б.М. Султанов.</i> Исследование параболических точек поверхности в галилеевом пространстве	149

<i>Г.А. Султанова.</i> Об условиях интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений с несимметрической связностью полного лифта	151
<i>П.И. Трошин.</i> О регулярном замощении плоскости Лобачевского	155
<i>Е.В. Тюриков.</i> Геометрический критерий квазикорректности для одного класса граничных задач мембранной теории выпуклых оболочек	158
<i>А.М. Филин.</i> Локальная геометрия пространства Громова–Хаусдорфа и вполне несимметричные конечные метрические пространства	161
<i>Ю.И. Шевченко, Е.В. Скрьдлова.</i> Интерпретация связности Картана с помощью двухъярусной главной связности	166

УДК 514.763

О ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙА.В. Аминова¹, М.Н. Сабитова²¹ asya.aminova@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет² asya.aminova@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Получено решение уравнения Эйзенхарта на псевдоримановых многообразиях (M^n, g) произвольной сигнатуры и любой размерности, тем самым найдены псевдоримановы h -пространства (т. е. пространства, допускающие нетривиальные решения $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта) всех возможных типов, определяемых характеристикой Сегре χ билинейной формы h . Указаны необходимые и достаточные условия существования инфинитезимального проективного преобразования в (M^n, g) . Вычислена 2-форма кривизны (жесткого) h -пространства типа $\chi = \{r_1, \dots, r_k\}$ и найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы это пространство имело постоянную кривизну.

Ключевые слова: проективное преобразование, псевдориманово многообразие, уравнение Эйзенхарта

ON THE PROJECTIVE MOTIONS OF PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

A.V. Aminova, M.N. Sabitova

The solution of the Eisenhart equation on pseudo-Riemannian manifolds (M^n, g) of an arbitrary signature and of any dimension is obtained. Thus, pseudo-Riemannian h -spaces are found (that is, spaces that allow nontrivial solutions of the $h \neq cg$ Eisenhart equation) of all possible types defined by the Segre characteristic χ of the bilinear form h . The necessary and sufficient conditions for the existence of an infinitesimal projective transformation in (M^n, g) are indicated. Calculated The 2-form curvature of a (rigid) h -space of type $\chi = \{r_1, \dots, r_k\}$ and necessary and sufficient conditions are found for this space to have constant curvature.

Keywords: projective transformation, pseudo-Riemannian manifold, Eisenhart equation

УДК 514.763

О ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖЕСТКИХ H -ПРОСТРАНСТВА.В. Аминова¹, Д.Р. Хакимов²¹ asya.aminova@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет² dzhamoliddink@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В данной работе с помощью метода косономального репера (Аминова) определяются пятимерные жесткие h -пространства типов $\{221\}$, $\{32\}$, $\{41\}$, $\{5\}$ и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования проективных движений тех же типов.

Ключевые слова: пятимерное псевдориманово многообразие, проективное преобразование, h -пространства типов $\{221\}$, $\{32\}$, $\{41\}$, $\{5\}$

ON PROJECTIVE MOTIONS OF RIGID H -SPACES

A.V. Aminova, D.R. Khakimov

In this paper, the five-dimensional rigid h -spaces of types {221}, {32}, {41}, {5} are determined using the method of the cosonormal frame (Aminova) and establishes necessary and sufficient conditions for the existence of projective motions of the same types.

Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, projective transformation, h -spaces of type {221}, {32}, {41}, {5}

УДК 514.126

ПЯТАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

А. Артикбаев¹

¹ aartykbaev@mail.ru; Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта

В работе приводится определение геометрии Галилея, которая является проективно двойственной с нормой вектора определяемой как площадь треугольника с двумя отмеченными вершинами.

Ключевые слова: точка, прямая, плоскость, Эрлангенская программа, геометрия Галилея, проективно двойственная геометрия, площадь треугольника, норма вектора

Развитие геометрии как науки берет начало от Евклида (III век до н.э.). Появление идей Лобачевского (1826 г.) стало революционным развитием в геометрии и породило понятие «неевклидовой геометрии». Хотя сферической геометрией, то есть геометрией на сфере занимались издавна, она не считалась неевклидовой. Идеи Римана превратили её в обычную двумерную эллиптическую геометрию.

Эрлангенская программа Феликса Клейна, в которой объектами изучения геометрии являются инварианты преобразований пространства, дало точное число двумерных геометрий. В рамках этого подхода в n -мерном случае существует 3^n различных геометрий.

Девять геометрий, классифицированных по Клейну, можно легко представить в следующей таблице, предложенной Б.А.Розенфельдом [1].

Расстояние Углы	E	P	G
E	S_2	R_2	1S_2
P	${}^1R_2^*$	Γ_2	1R_2
G	${}^1S_2^*$	${}^1R_2^*$	S_2^*

В этой таблице E - эллиптическая, P - параболическая и G - гиперболическая мера расстояние между двумя точками и угла между прямыми. Также S_2 – эллиптическая, R_2 - евклидова геометрии, 1S_2 - геометрия Лобачевского, 1R_2 - геометрия Минковского в двумерном случае и (*) - отмечены их проективно двойственные образы.

Напомним, что меняя местами основные понятия «точка» и «прямая» получаем проективно двойственную геометрию.

По Риману вообще все двумерные пространства считаются плоскими, а эти девять плоскости имеют меру, то есть расстояние между точками и угол между прямыми, сохраняющуюся при линейных преобразованиях.

Геометрии двумерных пространств (и их двойственные образы) $R_2, S_2, {}^1S_2, {}^1R_2$ - достаточно глубоко изучены и применяются в различных отраслях естествознания.

Если считать проективную двойственную геометрию к рассматриваемой геометрии не новой, то для двумерных пространств имеется четыре геометрии, применяемые в научных исследованиях.

Наконец девятая в приведённой выше таблице геометрия Γ_2 , называемая Галилеевой, остаётся забытой двумерной геометрией, которой мало уделяется внимание исследователей.

Подробно о геометрии Галилея написано в популярной книге А.В.Хачатуряна [2].

Геометрия Галилея является самодвойственной, то есть проективная двойственная геометрия также Галилеева.

Мы приводим здесь определение двойственной Галилеевой геометрии.

Пусть на плоскости π задана обычная Декартова система координат Oxy и $\{\vec{i}; \vec{j}\}$ единичные векторы, направленные по оси Ox и Oy соответственно. Отмечаем точки $F_1(0; 1)$ и $F_2(0; -1)$ на оси Oy . Рассмотрим вектор $\vec{OA} = \vec{X}(x_1, y_1)$ и треугольник с вершинами A, F_1 и F_2 . Площадь S треугольника AF_1F_2 вычисляется по формуле $P(S) = x_1$.

Основные понятия геометрии: точка и прямая, понимаем по Евклиду.

Определение. Двумерную плоскость π , для которой норма вектора $|\vec{X}|$ определяется равной площади треугольника $S(AF_1F_2)$, называем Галилеевой плоскостью.

Изучение геометрии Галилея на плоскости заслуживает научный интерес не только с геометрической, но и с алгебраической точки зрения, так как группа движений Галилеевой плоскости не является симметричной. Она также не ортогональна и имеет определитель равный единице.

Матрица группы движений Галилеевой плоскости представляет собой элемент группы Гейзенберга [3] и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

Геометрия Галилея - это пятая геометрия, похожая на геометрию Евклида на плоскости.

Литература

[1] Artykbaev A. *Recovering convex surfaces from the extrinsic curvature in Galilean space*, Mat. Sb. (N.S.), 1982, Volume 119 (161), Number 2 (10), 204-224.

[2] Хачатурян А.В. *Геометрия Галилея*, М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2005.

[3] Tomter P. *Constant mean curvature surface in the Heisenberg group*, Proceedings of symposia in pure mathematics. Volume 54 (1993), part 1, 485-495.

THE FIFTH GEOMETRY IN THE PLANE

A. Artykbaev

The thesis provides a definition of Galilean geometry, which is projective dual, where the vector norm is defined as the area of a triangle with marked two vertices.

Keywords: point, line, plane, Erlangen program, Galilean geometry, projective dual geometry, area of a triangle, norm of a vector

УДК 514.7

**ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЙЛЕРА–САТАКИ КОМПАКТНЫХ АФФИННЫХ
ОРБИФОЛДОВ**А.В. Багаев¹, Н.И. Жукова²

¹ *a.v.bagaev@gmail.com*; Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева

² *nina.i.zhukova@yandex.ru*; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Согласно гипотезе Черна характеристика Эйлера замкнутого аффинного многообразия должна обращаться в ноль. Нами доказана эквивалентность этой гипотезы Черна следующей гипотезе для орбифолдов: характеристика Эйлера–Сатаки компактного аффинного орбифолда равна нулю. Найдены условия, при выполнении которых компактный аффинный орбифолд имеет нулевую характеристику Эйлера–Сатаки. Построены примеры.

Ключевые слова: аффинный орбифолд, характеристика Эйлера–Сатаки орбифолда

1. Введение

Многообразия, имеющие плоскую линейную связность без кручения, называются аффинными. Аффинные многообразия можно рассматривать как (X, G) -многообразия, где $X = \mathbb{R}^n$, а G — группа аффинных преобразований \mathbb{R}^n .

Развитие геометрии аффинных многообразий связано прежде всего с гипотезами Черна, Маркуса и Ауслендера.

В 1955 году Черн высказал гипотезу, согласно которой любое замкнутое аффинное многообразие имеет нулевую характеристику Эйлера. Таким образом, нетривиальность характеристики Эйлера можно рассматривать как топологическое препятствие к существованию аффинной структуры на компактном многообразии.

Поскольку любое нечетномерное компактное многообразие имеет нулевую эйлерову характеристику, гипотеза Черна доказывается только для четномерных аффинных многообразий. Разными авторами получены различные достаточные условия выполнения гипотезы Черна, однако в целом она остается открытой проблемой. Известно выполнение гипотезы Черна для комплексных аффинных многообразий. Б. Костант и Д. Сулливан [1] доказали гипотезу Черна для полных аффинных многообразий. Как показано Ж. П. Бензекри [2], гипотеза Черна верна для замкнутых

поверхностей, среди которых только тор и бутылка Клейна допускают аффинную структуру.

Аффинное n -мерное многообразие, группа голономии которого принадлежит специальной линейной группе $SL(n, \mathbb{R})$, называется *специальным*. Аффинное многообразие является специальным тогда и только тогда, когда оно допускает параллельную форму объема. Специальные аффинные многообразия определяют достаточно большой класс аффинных многообразий, включающий в себя плоские псевдоримановы многообразия произвольной сигнатуры, плоские симплектические многообразия.

Значительным продвижением в доказательстве гипотезы Черна является недавняя работа Б. Клиггера [3], в которой доказано, что характеристика Эйлера замкнутого специального аффинного многообразия равна нулю.

Другие достаточные условия, при которых гипотеза Черна верна, найдены М. Хиршем и У. Терстоном [4], У. Гольдманом и М. Хиршем [5] (см. обзор в [3]).

Гладкие орбифолды можно рассматривать как естественное обобщение гладких многообразий: в качестве модельного пространства берется не \mathbb{R}^n , а факторпространство \mathbb{R}^n/Γ , где Γ — конечная группа диффеоморфизмов \mathbb{R}^n , при этом группа Γ не является фиксированной и может меняться при переходе от одной окрестности орбифолда к другой.

Понятие орбифолда введено И. Сатаки [6] под названием V -многообразия. Сам термин орбифолд предложен У. Терстоном [7].

Орбифолды естественным образом возникают и используются в различных областях математики и теоретической физики: в теории слоений, в симплектической геометрии, в теории струн, в деформационном квантовании (обзор можно найти, например, в [8]).

Многие понятия и теоремы геометрии гладких многообразий такие, как когомологии Де Рама, характеристические классы, теорема Гаусса–Бонне, теорема Пуанкаре–Хопфа были распространены И. Сатаки [6, 9] на орбифолды. У. Терстон [7] применил классификацию компактных двумерных римановых орбифолдов постоянной кривизны к классификации замкнутых трехмерных многообразий. Группам автоморфизмов геометрических структур на орбифолдах посвящены работы [10, 11, 12].

Сформулируем аналог гипотезы Черна для орбифолдов:

Характеристика Эйлера-Сатаки компактного аффинного орбифолда равна нулю.

Целью данной работы является доказательство и применение эквивалентности гипотезы Черна для аффинных многообразий его аналогу для орбифолдов.

Основная теорема. *Аналог гипотезы Черна для компактных аффинных орбифолдов эквивалентен гипотезе Черна для компактных аффинных многообразий, то есть если верна одна из этих гипотез, то верна и другая.*

Поскольку компактные аффинные орбифолды включают в себя компактные аффинные многообразия, то в одну сторону это утверждение заведомо выполняется.

Ключевым результатом, используемым в доказательстве основной теоремы, является теорема 1, согласно которой любой компактный аффинный орбифолд — очень хороший.

Нами найдены также достаточные условия для выполнения аналога гипотезы Черна (теоремы 2–5). Построен пример (пример 1), показывающий отсутствие прямых аналогов с гипотезой Черна для топологической и орбифолдной эйлеровых характеристик компактных аффинных орбифолдов.

Кроме того, как следует из примера 2, аналог гипотезы Черна, как и сама гипотеза Черна, остается открытым.

2. Орбифолды и их характеристика Эйлера–Сатаки

Гладкие орбифолды Пусть \mathcal{N} — связное паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство, n — натуральное число. Пусть \tilde{U} — связное открытое подмножество \mathbb{R}^n , Γ_U — конечная группа диффеоморфизмов \tilde{U} , $\varphi_U: \tilde{U} \rightarrow \mathcal{N}$ — Γ_U -инвариантное отображение, индуцирующее гомеоморфизм q_U из \tilde{U}/Γ_U на открытое подмножество $U = \varphi_U(\tilde{U})$ в \mathcal{N} . Тройка $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ называется картой с координатной окрестностью U .

Пусть $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ и $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$ — две карты с координатными окрестностями U и V , причем $U \subset V$. Вложением карты $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ в карту $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$ называется гладкое вложение $\varphi_{VU}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$, удовлетворяющее равенству $\varphi_V \circ \varphi_{VU} = \varphi_U$.

Атласом на \mathcal{N} называется семейство карт $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)\}$, покрывающих \mathcal{N} и локально согласованных в следующем смысле: для любых двух карт $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ и $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$ с координатными окрестностями U и V и любой точки $x \in U \cap V$ существуют открытая окрестность $W \subset U \cap V$ точки x , карта $(\tilde{W}, \Gamma_W, \varphi_W)$ с координатной окрестностью W и вложения карт $\varphi_{UW}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{U}$ и $\varphi_{VW}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{V}$.

Связное паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство \mathcal{N} , снабженное максимальным (по включению) атласом \mathcal{A} , называется n -мерным орбифолдом и обозначается через \mathcal{N} .

Для карт $(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)$ и $(\tilde{V}, \Gamma_V, \varphi_V)$ из атласа \mathcal{A} с координатными окрестностями, содержащими $x \in \mathcal{N}$, подгруппы изотропии $(\Gamma_U)_y$ и $(\Gamma_V)_z$ точек $y \in \varphi_U^{-1}(x)$ и $z \in \varphi_V^{-1}(x)$ изоморфны. Таким образом, для каждой точки $x \in \mathcal{N}$ определена единственная с точностью до изоморфизма группа $\Gamma_{(x)}$, называемая орбифолдной группой в x . Точка x орбифолда \mathcal{N} называется регулярной, если ее орбифолдная группа $\Gamma_{(x)}$ тривиальна; в противном случае, точка x называется сингулярной.

Характеристика Эйлера–Сатаки орбифолда Известно, что гладкий компактный орбифолд \mathcal{N} допускает такую конечную триангуляцию, что орбифолдные группы точек внутренности любого симплекса одинаковы. Пусть \mathcal{K} — такая триангуляция компактного орбифолда \mathcal{N} . Характеристика Эйлера–Сатаки компактного орбифолда \mathcal{N} задается формулой [7, 9]:

$$\chi^{ES}(\mathcal{N}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}} (-1)^{\dim \sigma} \frac{1}{|\Gamma_{\sigma}|},$$

где Γ_{σ} — орбифолдная группа произвольно фиксированной точки внутренности симплекса σ , а $|\Gamma_{\sigma}|$ — ее порядок.

И. Сатаки [9] ввел понятие индекса векторного поля на компактном орбифолде \mathcal{N} и доказал аналог теоремы Пуанкаре–Хопфа, согласно которому для любого векторного поля X с особенностями в точках x_1, \dots, x_k на компактном орбифолде \mathcal{N} имеет место формула

$$\chi^{ES}(\mathcal{N}) = \sum_{i=1}^k I_{x_i}(X),$$

где $I_{x_i}(X)$ — индекс векторного поля X в x_i , $i = 1, \dots, k$. Таким образом, последнюю формулу можно рассматривать как определение характеристики Эйлера–Сатаки для гладкого компактного орбифолда \mathcal{N} .

Отметим, что характеристика Эйлера–Сатаки $\chi^{ES}(\mathcal{N})$ не является, вообще говоря, целым числом и совпадает с общепринятой характеристикой Эйлера для \mathcal{N} в случае, когда \mathcal{N} является многообразием.

Напомним, что орбифолд \mathcal{N} называется *очень хорошим* [7], если существуют такие многообразие M и конечная группа G диффеоморфизмов M , что $\mathcal{N} = M/G$.

Пусть G — конечная группа диффеоморфизмов компактного многообразия M , тогда $\mathcal{N} = M/G$ — очень хороший орбифолд. В этом случае для орбифолда $\mathcal{N} = M/G$ имеет место равенство

$$\chi^{ES}(\mathcal{N}) = \frac{1}{|G|} \chi(M), \quad (1)$$

где $\chi(M)$ — характеристика Эйлера многообразия M [13].

3. Компактные аффинные орбифолды

Пусть n -мерный орбифолд \mathcal{N} задан атласом $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}, \Gamma_U, \varphi_U)\}$, где \tilde{U} — открытое подмножество аффинного пространства A^n , причем диффеоморфизмы группы Γ_U являются ограничениями на \tilde{U} аффинных преобразований из аффинной группы $Aff(A^n)$. Если каждое вложение карт $\varphi_{VU}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$, удовлетворяющее равенству $\varphi_V \circ \varphi_{VU} = \varphi_U$, является ограничением аффинного преобразования A^n , то \mathcal{N} называется *аффинным орбифолдом*.

Следующие утверждения доказаны нами в [13].

Теорема 1. *Любой компактный аффинный орбифолд является очень хорошим.*

Из теоремы 1 и формулы (1) вытекает основная теорема.

Основная теорема. *Аналог гипотезы Черна для компактных аффинных орбифолдов эквивалентен гипотезе Черна для компактных аффинных многообразий.*

Используя расслоение линейных реперов над n -мерным аффинным орбифолдом \mathcal{N} , в [13] нами введено понятие группы голономии орбифолда \mathcal{N} как подгруппы общей линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$. Оно является естественным обобщением понятия группы голономии n -мерного аффинного многообразия. Так как группа голономии аффинного орбифолда определена однозначно с точностью до сопряженности в группе $GL(n, \mathbb{R})$, а сопряженные матрицы имеют один и тот же определитель, то корректно следующее определение.

Определение 1. Если группа голономии аффинного орбифолда \mathcal{N} является подгруппой специальной линейной группы $SL(n, \mathbb{R})$, то \mathcal{N} называется специальным аффинным орбифолдом.

С применением основной теоремы нами доказана следующая теорема, распространяющая результат Б. Клиггера [3] на орбифолды.

Теорема 2. Характеристика Эйлера–Сатаки компактного специального аффинного орбифолда равна нулю.

Псевдориманов орбифолд (\mathcal{N}, g) называется плоским, если кривизна его связности Леви–Чивита равна нулю. Симплектический орбифолд (\mathcal{N}, ω) называется плоским, если он допускает плоскую симплектическую связность.

Поскольку плоские псевдоримановы и плоские симплектические орбифолды являются специальными аффинными орбифолдами, то, применяя теорему 2, нами получены следующие два утверждения.

Теорема 3. Если (\mathcal{N}, g) — компактный плоский псевдориманов орбифолд произвольной сигнатуры, то его характеристика Эйлера–Сатаки равна нулю.

Теорема 4. Пусть компактный симплектический орбифолд (\mathcal{N}, ω) является плоским. Тогда \mathcal{N} имеет нулевую характеристику Эйлера–Сатаки.

Следующая теорема распространяет результат Б. Костанта и Д. Сулливана [1] на орбифолды.

Теорема 5. Компактный полный аффинный орбифолд имеет нулевую характеристику Эйлера–Сатаки.

С использованием основной теоремы мы также получаем, что характеристика Эйлера–Сатаки компактных комплексных аффинных орбифолдов и двумерных компактных аффинных орбифолдов равна нулю.

4. Замечания и примеры

Заметим, что существуют различные (не эквивалентные) подходы к понятию характеристики Эйлера для орбифолдов.

Пусть \mathcal{N} — компактный орбифолд. Характеристика Эйлера подлежащего топологического пространства орбифолда \mathcal{N} называется топологической характеристикой Эйлера и обозначается через $\chi(\mathcal{N})$.

В [14] для очень хорошего орбифолда $\mathcal{N} = M/G$ определена орбифолдная характеристика Эйлера $\chi^{orb}(\mathcal{N})$. Пусть $[g]$ — класс сопряженности элемента $g \in G$, т.е. $[g] = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$, $C(g)$ — централизатор элемента g в G , M^g — множество точек в M , неподвижных относительно g . Согласно [15], орбифолдная характеристика Эйлера $\chi^{orb}(\mathcal{N})$ может быть определена равенством

$$\chi^{orb}(\mathcal{N}) = \sum_{[g]} \chi(M^g/C(g)),$$

где $\chi(M^g/C(g))$ — топологическая характеристика Эйлера фактор-многообразия $M^g/C(g)$.

Отметим, что в случае, когда орбифолд \mathcal{N} — многообразие, все три характеристики совпадают: $\chi(\mathcal{N}) = \chi^{orb}(\mathcal{N}) = \chi^{ES}(\mathcal{N})$. В отличие от характеристики

Эйлера–Сатаки, топологическая и орбифолдная характеристики Эйлера всегда являются целыми числами.

Обобщенные характеристики Эйлера для орбифолдов определены в [16, 17].

Пример 1 («Биллиардный стол»). Пусть группа G порождена отражениями аффинной плоскости A^2 относительно прямых $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Группа G сохраняет аффинную структуру плоскости A^2 и изоморфна произведению бесконечных диэдральных групп $D_\infty \times D_\infty$, где $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Фактор-пространство $\mathcal{N} = A^2/G$ является компактным полным аффинным орбифолдом, который можно рассматривать как квадрат на плоскости, при этом его вершины — сингулярные точки с группой орбифолдности, изоморфной $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, его стороны (не включая вершины) состоят из сингулярных точек с группой орбифолдности, изоморфной \mathbb{Z}_2 , а его внутренность составляют регулярные точки. Такой орбифолд называется биллиардным столом. Непосредственные вычисления показывают, что $\chi(\mathcal{N}) = 1$, $\chi^{orb}(\mathcal{N}) = 9$. Согласно теореме 5 выполняется равенство $\chi^{ES}(\mathcal{N}) = 0$. Таким образом, все три характеристики $\chi^{ES}(\mathcal{N})$, $\chi(\mathcal{N})$ и $\chi^{orb}(\mathcal{N})$ компактного аффинного орбифолда \mathcal{N} попарно различны.

Этот пример показывает, что не существует прямых аналогов гипотезы Черна для топологической характеристики Эйлера $\chi(\mathcal{N})$ и орбифолдной характеристики Эйлера $\chi^{orb}(\mathcal{N})$ компактного аффинного орбифолда \mathcal{N} .

Пример 2. Зафиксируем $\lambda \in (0, 1)$ и зададим гомотетию $\varphi: A^4 \setminus \{0\} \rightarrow A^4 \setminus \{0\}$ равенством $\varphi(x) = \lambda x$, $x \in A^4 \setminus \{0\}$. Группа Φ , порожденная гомотетией φ , действует на $A^4 \setminus \{0\}$ свободно и собственнo разрывно. Следовательно, фактор-отображение $\nu: A^4 \setminus \{0\} \rightarrow A^4 \setminus \{0\}/\Phi$ является регулярным накрытием, а фактор-пространство $M = A^4 \setminus \{0\}/\Phi$ имеет структуру компактного 4-мерного аффинного многообразия, диффеоморфного $S^3 \times S^1$. Используя мультипликативность характеристики Эйлера и равенство $\chi(S^1) = 0$, будем иметь $\chi(M) = \chi(S^3 \times S^1) = \chi(S^3)\chi(S^1) = 0$.

Так как $A^4 \setminus \{0\}$ не является полным аффинным многообразием, то аффинное фактор-многообразие M также не полное. Поскольку гомотетия φ не сохраняет форму объема, то M не является специальным аффинным многообразием.

Пусть аффинное преобразование $\tilde{\gamma}: A^4 \setminus \{0\} \rightarrow A^4 \setminus \{0\}$ задано формулой $\tilde{\gamma}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, x_3, x_4)$, где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A^4 \setminus \{0\}$. Поскольку $\tilde{\gamma} \circ \varphi = \varphi \circ \tilde{\gamma}$, то $\tilde{\gamma}$ определяет такой автоморфизм γ аффинного многообразия M , что $\gamma \circ \nu = \nu \circ \tilde{\gamma}$. Пусть Γ — группа, порожденная γ , при этом $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$. Так как Γ — группа автоморфизмов аффинного многообразия M , то фактор-пространство $\mathcal{N} = M/\Gamma$ допускает структуру компактного 4-мерного аффинного орбифолда.

Согласно формуле (1) имеем $\chi^{ES}(\mathcal{N}) = \chi(M)/|\Gamma| = 0$. Таким образом, \mathcal{N} — компактный аффинный орбифолд, не являющийся ни полным, ни специальным и имеющий нулевую характеристику Эйлера–Сатаки.

Этот пример показывает, что для выполнения аналога гипотезы Черна для компактных аффинных орбифолдов условие полноты, как и условие быть специальным, являются достаточными, но не являются необходимыми условиями. Таким образом, аналог гипотезы Черна для орбифолдов является открытой проблемой.

Благодарности. Доказательство основной теоремы, теорем 1-2 и теоремы 5 поддержано грантом № 17-11-01041 Российского Научного Фонда; утверждения

теорем 3 и 4 получены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

Литература

1. Kostant B., Sullivan D. *The Euler characteristic of an affine space form is zero* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 81. – № 5. – P. 937–938.
2. Benzécri J.P. *Variétés localement affines*, Thesis, Princeton University, 1955.
3. Klingler B. *Chern’s conjecture for special affine manifolds* // Ann. of Math. – 2017. – V. 186. – № 1. – P. 69–95.
4. Hirsch M., Thurston W. *Foliated bundles, invariant measures and at manifolds* // Ann. Math. – 1975. – V. 101. – P. 369–390.
5. Goldman W., Hirsch M.W. *Flat bundles with solvable holonomy* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. V. 82. – № 3. – P. 491–494.
6. Satake I. *On a generalization of the notion of manifold* // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1956. – V. 42. – № 6. – P. 359–363.
7. Thurston W.P. *The geometry and topology of three-manifolds*. – Princeton Univ. Math. Dept., Lecture Notes, 1979.
8. Adem A., Leida J., and Y. Ruan *Orbifolds and stringy topology*. – Cambridge Tracts in Mathematics, V. 171. – New York: Cambridge University Press, 2007.
9. Satake I. *The Gauss–Bonnet theorem for V-manifolds* // J. Math. Soc. Japan – 1957. – V. 9. – P. 464–492.
10. Багаев А.В., Жукова Н.И. *Группы автоморфизмов G-структур конечного типа на орбиобразиях* // Сиб. Мат. Журнал. – 2003. – Т. 44. – № 2. – С. 263–278.
11. Багаев А.В., Жукова Н.И. *Группы изометрий римановых орбифолдов* // Сиб. Мат. Журнал. – 2007. – Т. 48. – № 4. – С. 723–741.
12. Zhukova N.I. *Automorphism groups of elliptic G-structures on orbifolds* // Journal of Geometry and Physics. – 2018. – V. 132. – P. 146–154.
13. Bagaev A.V., Zhukova N.I. *An analog of Chern’s conjecture for the Euler-Satake characteristic of affine orbifolds* // Journal of Geometry and Physics. – 2019. – V. 142. – P. 80–91.
14. Dixon L., Harvey J. A., Vafa C., Witten E. *Strings on orbifolds* // Nuclear Phys. B. – 1985. – V. 261. – P. 678–686.
15. Hirzebruch F., Höfer T. *On the Euler number of an orbifold* // Math. Ann. – 1990. – V. 286. – № 1–3. – P. 255–260.
16. Farsi C., Seaton C. *Generalized orbifold Euler characteristics for general orbifolds and wreath products* // Algebraic & Geometric Topology. – 2011. – V. 11. – P. 523–551.
17. Гусейн-Заде С.М. *Эквивариантные аналоги эйлеровой характеристики и формулы типа Макдональда* // УМН. – 2017. – Т. 72. – № 1. – С. 3–36.

THE EULER–SATAKE CHARACTERISTIC OF COMPACT AFFINE ORBIFOLDS

A.V. Bagaev, N.I. Zhukova

According to Chern’s conjecture, the Euler characteristic of a closed affine manifold must be zero. We prove the equivalence of this Chern conjecture to the following conjecture for orbifolds: the Euler–Satake characteristic of a compact affine orbifold is zero. We found the conditions under which the

Euler–Sataki characteristic of a compact affine orbifold vanishes. Examples are constructed.

Keywords: Affine orbifold, Euler–Satake characteristic of an orbifold

УДК 514.763.85

СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА–ШОУЛЗА–МЕРТОНА ДЛЯ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ

Л.Н. Бакирова¹, В.В. Шурыгин (мл.)²

¹ lbakir@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² vshjr@yandex.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе полностью найдена алгебра Ли симметрий уравнения Блэка–Шоулза–Мертонна для европейских опционов со стохастической волатильностью.

Ключевые слова: уравнение Блэка–Шоулза–Мертонна, симметрии уравнений в частных производных, финансовая математика

Одной из классических моделей ценообразования европейских опционов является модель Блэка–Шоулза–Мертонна [1, 2, 3]. Классическое уравнение Блэка–Шоулза–Мертонна имеет вид

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0.$$

В последние годы ряд работ посвящен нахождению алгебры Ли симметрий различных уравнений, являющихся обобщениями этой модели. В работе [4] рассматривается так называемое уравнение Блэка–Шоулза–Мертонна для европейских опционов в случае стохастической волатильности. Оно имеет вид

$$\frac{1}{2}f^2(y)x^2 u_{xx} + \rho\beta x f(y) u_{xy} + \frac{1}{2}\beta^2 u_{yy} + rxu_x + \left(\alpha(m-y) - \beta\rho \frac{\mu-r}{f(y)}\right) u_y - ru + u_t = 0. \quad (1)$$

Здесь $f(y)$ — произвольная гладкая функция, а $r, \rho, \alpha, \beta, \mu$ — вещественные параметры, удовлетворяющие условиям $|\rho| < 1$, и $\alpha\beta \neq 0$. Авторами была найдена алгебра Ли симметрий этого уравнения для случая $f = \text{const}$. В настоящей работе мы дополняем их результат.

Теорема. Алгебра Ли симметрий уравнения (1) для произвольной функции $f(y)$ есть прямая сумма трехмерной подалгебры с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = u \frac{\partial}{\partial u},$$

и бесконечномерной подалгебры, состоящей из симметрий вида

$$X_b = b(x, y, t) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $b(x, y, t)$ — произвольное решение уравнения (1), во всех случаях, кроме двух нижеприведенных.

1) Если $f = \text{const}$, то конечномерная подалгебра имеет размерность 6, а ее базис составляют симметрии X_1, X_2, X_3 и

$$X_4 = e^{-\alpha t} \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = f^2 (\rho^2 + \alpha t) x \frac{\partial}{\partial x} + f \rho \beta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \alpha (-2tr + t f^2 + 2 \ln x) u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_6 = e^{\alpha t} \left(2\beta f^2 \rho x \frac{\partial}{\partial x} + \beta^2 f \frac{\partial}{\partial y} - 2(\alpha f(m-y) + \beta \rho(r-\mu)) u \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

2) Если

$$f = \frac{k}{y-m}, \quad k = \text{const},$$

и $\gamma = 2 \left(\alpha + \frac{\rho \beta (\mu - r)}{k} \right)$, то конечномерная подалгебра имеет размерность 5, а ее базис при $\gamma \neq 0$ составляют симметрии X_1, X_2, X_3 и

$$X'_4 = e^{-\gamma t} \left(r x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \gamma (m-y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} + u r \frac{\partial}{\partial u} \right),$$

$$X'_5 = e^{\gamma t} \left(\left(\frac{\rho \gamma k}{\beta} + r \right) x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \gamma (m-y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\beta^2} (\gamma^2 (m-y)^2 + \beta^2 (2r-\gamma)) u \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

При $\gamma = 0$ базис пятимерной подалгебры составляют симметрии X_1, X_2, X_3 и

$$X''_4 = \frac{1}{2\beta} (\rho k + 2\beta r t) x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y-m}{2} \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t} + r t u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X''_5 = \frac{x t}{\beta} (\rho k + \beta r t) \frac{\partial}{\partial x} - t(m-y) \frac{\partial}{\partial y} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{2\beta^2} ((m-y)^2 + \beta^2 t(2r-1)) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Литература

1. Black F., Scholes M. *The valuation of option contracts and a test of market efficiency.* // J. Financ. – 1972. – V. 27. – Pp. 399–417.
2. Black F., Scholes M. *The pricing of options and corporate liabilities.* // J. Political Econ. – 1973. – V. 81. – Pp. 637–659.
3. Merton R.C. *On the pricing of corporate data: The risk structure of interest rates.* // J. Financ. – 1974. – V. 29. – Pp. 449–470.
4. Paliathanasis A., Krishnakumar K., Tamizhmani K.M., Leach P. *Lie Symmetry Analysis of the Black-Scholes-Merton Model for European Options with Stochastic Volatility.* // Mathematics (Special Issue: Mathematical Finance). – 2016. – Vol. 4(2). – № 28. – doi:10.3390/math4020028.

SYMMETRIES OF THE BLACK-SCHOLES-MERTON EQUATION FOR EUROPEAN OPTIONS

L.N. Bakirova, V.V. Shurygin, jr.

We give the complete description of the Lie symmetry algebra of the Black-Scholes-Merton equation for European options with stochastic volatility.

Keywords: Black-Scholes-Merton equation, Lie symmetry algebra, financial mathematics

УДК 514.765

КАНОНИЧЕСКИЕ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Φ -ПРОСТРАНСТВАХ

В.В. Балащенко¹

¹ balashchenko@bsu.by; vitbal@tut.by; Белорусский государственный университет

В этой статье мы строим набор так называемых канонических почти симплектических структур на римановых однородных k -симметрических пространствах. Этот результат основан на полном описании всех канонических почти комплексных структур на таких пространствах, полученном ранее. Некоторые факты были доказаны для более общего случая регулярных Φ -пространств.

Ключевые слова: почти симплектическая структура, однородное Φ -пространство, каноническая аффинорная структура, однородное k -симметрическое пространство.

1. Почти симплектические структуры. Если на гладком многообразии M размерности $2n$ задана невырожденная 2-форма Ω , то Ω называется *почти симплектической структурой* на M . Многообразие (M, Ω) в этом случае называется почти симплектическим или почти гамильтоновым многообразием, а для замкнутой формы Ω ($d\Omega = 0$) M называют симплектическим или гамильтоновым многообразием. Роль симплектических структур исключительно важна в проблемах механики и интегрируемости гамильтоновых систем (см., например, [1], [2] и др.). В последнее время установлена важность наличия двух согласованных симплектических структур (бипуассонова геометрия) в исследовании бигамильтоновых систем [3], [4]. Однако случай почти симплектических структур при $d\Omega \neq 0$ также оказался содержательным и интересным во многих отношениях, в частности, при описании гамильтоновых векторных полей на почти симплектических многообразиях [5], [6].

Почти симплектические структуры возникают естественным образом на почти эрмитовых многообразиях. Напомним в связи с этим, что на (псевдо)римановом многообразии (M, g) , наделенном почти комплексной структурой J ($J^2 = -id$), пара (g, J) называется *почти эрмитовой структурой*, если $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для всех гладких векторных полей X и Y на M . Отсюда следует, что тензорное поле $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$ кососимметрично, т.е. (M, Ω) является почти симплектическим многообразием. При этом 2-форму Ω обычно называют *фундаментальной формой* (келеровой формой) почти эрмитовой структуры (g, J) на M . Если $d\Omega = 0$, то почти эрмитова структура (g, J) называется *почти келеровой* (*almost Kähler*).

Среди дифференциально-геометрических структур важную роль играют инвариантные структуры на однородных многообразиях $M = G/H$ групп Ли. Пусть теперь $M = G/H$ — редуктивное однородное пространство группы Ли G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли \mathfrak{g} . Как обычно, отождествим \mathfrak{m} с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Пусть далее g — инвариантная (псевдо)риманова метрика на G/H , J — инвариантная почти комплексная структура. Если (g, J) — инвариантная почти эрмитова структура, то формула $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$ определяет инвариантную почти симплектическую структуру на G/H .

Основная цель статьи — предъявить серию инвариантных почти симплектических структур на однородных многообразиях. Оказалось, что обширный ресурс таких структур может быть получен в рамках теории канонических структур на однородных k -симметрических пространствах. Решающую роль при этом играет обнаруженный ранее запас канонических почти комплексных структур на таких пространствах.

2. Канонические структуры на однородных k -симметрических пространствах. Пусть G/H — однородное Φ -пространство, определяемое автоморфизмом Φ группы Ли G , т.е. для замкнутой подгруппы Ли H в G выполняется условие $G_o^\Phi \subset H \subset G^\Phi$, где G^Φ — подгруппа неподвижных точек автоморфизма Φ , G_o^Φ — связная компонента единицы e подгруппы G^Φ [7], [8]. Однородные Φ -пространства содержат однородные симметрические пространства ($\Phi^2 = id$) и, более общо, *однородные Φ -пространства порядка k* ($\Phi^k = id$), в иной терминологии — *однородные k -симметрические пространства*.

Для любого однородного Φ -пространства G/H формула $S_o(xH) = \Phi(x)H$ задает отображение S_o , которое является аналитическим диффеоморфизмом G/H [9]. Обычно S_o называют "симметрией" многообразия G/H в точке $o = H$. Очевидно, что в силу однородности можно определить "симметрию" S_p в произвольной точке $p \in G/H$.

Обозначим далее через \mathfrak{g} и \mathfrak{h} алгебры Ли, соответствующие группам Ли G и H . Пусть теперь $A = \varphi - id$, где $\varphi = d\Phi_e$ — соответствующий автоморфизм алгебры Ли \mathfrak{g} . Однородное Φ -пространство G/H называется *регулярным Φ -пространством*, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A\mathfrak{g}$ (см. [9], [8]). Это разложение алгебры Ли \mathfrak{g} также является редуктивным и называется *каноническим редуктивным разложением* [9] регулярного Φ -пространства G/H . При этом каноническое редуктивное дополнение $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$ является φ -инвариантным подпространством в \mathfrak{g} . Сужение φ на \mathfrak{m} будем обозначать через θ . Важно отметить, что все однородные k -симметрические пространства регулярны [9].

Напомним, что инвариантная аффинорная структура F на регулярном Φ -пространстве G/H называется *канонической* [7], если ее значение в точке o является полиномом от θ : $F = F(\theta)$. Известно [7], что все канонические структуры образуют коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\theta)$ в алгебре \mathcal{A} всех инвариантных аффинорных структур на однородном пространстве G/H . При этом все структуры алгебры $\mathcal{A}(\theta)$ на G/H инвариантны не только относительно действующей группы Ли G , но и всех обобщенных "симметрий" S_p .

Замечательной особенностью алгебры $\mathcal{A}(\theta)$ является наличие в ней значительного запаса структур классического типа (почти произведения, почти комплексные, f -структуры и др.), которые были полностью описаны (см., например, [7], [8]). Более того, для однородных k -симметрических пространств были предъявлены точные вычислительные формулы. Приведем здесь результат, описывающий все канонические почти комплексные структуры J .

Теорема 1. [7], [8] Пусть $-1 \notin \text{spec } \theta$. Все канонические почти комплексные структуры на однородном k -симметрическом пространстве G/H могут быть заданы следующими полиномами:

$$J = \frac{2}{k} \sum_{m=1}^u \left(\sum_{j=1}^u \zeta_j \sin \frac{2\pi m j}{k} \right) (\theta^m - \theta^{k-m}),$$

где $\zeta_j \in \{-1; 1\}$, $j = 1, 2, \dots, u$; числа ζ_j принимают значения из множества $\{-1; 1\}$.

3. Канонические структуры и инвариантные метрики. Пусть G/H — регулярное Φ -пространство, на котором задана (псевдо)риманова метрика, порождаемая симметрической билинейной формой $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на $m \times m$ и инвариантная относительно подгруппы $Ad_G(H)$ и оператора θ . Такая метрика инвариантна не только относительно группы G , но и обобщенных симметрий S_p однородного Φ -пространства G/H . В случае полупростой группы Ли G классическим примером метрики g с указанными свойствами является стандартная метрика, индуцированная формой Киллинга алгебры Ли \mathfrak{g} .

Теорема 2. [8] Пусть $(G/H, g)$ — (псевдо)риманово регулярное Φ -пространство. Предположим, что метрика g инвариантна относительно группы G и "симметрий" $\{S_p\}$. Пусть далее каноническая структура J на G/H такова, что соответствующий ей многочлен $J(\theta)$ удовлетворяет условию $J(\theta) = -J(\theta^{-1})$. Тогда (g, J) является почти эрмитовой структурой.

Из теорем 1 и 2 следует, что на однородном k -симметрическом пространстве $(G/H, g)$ все канонические почти комплексные структуры J являются почти эрмитовыми структурами относительно указанной метрики g .

4. Канонические почти симплектические структуры.

Будем предполагать далее, что рассматриваемая инвариантная метрика g с указанными свойствами на регулярных Φ -пространствах является собственно римановой. Пусть теперь J — такая каноническая почти комплексная структура на регулярном Φ -пространстве G/H , что пара (g, J) есть инвариантная почти эрмитова структура. Почти симплектическую структуру на G/H , построенную по правилу $\Omega_J(X, Y) = g(X, JY)$, будем называть канонической почти симплектической структурой.

Такое название оправдано следующими свойствами этой структуры:

Теорема 3. Пусть $(G/H, g)$ — риманово регулярное Φ -пространство, где метрика g инвариантна относительно группы G и "симметрий" $\{S_p\}$. Если на G/H имеется каноническая почти комплексная структура J , удовлетворяющая условию $J(\theta) = -J(\theta^{-1})$, то каноническая почти симплектическая структура $\Omega_J(X, Y) = g(X, JY)$ на G/H инвариантна относительно группы G и "симметрий" $\{S_p\}$.

Для регулярных Φ -пространств число построенных таким способом канонических почти симплектических структур Ω_J не вполне ясно, поскольку неизвестно, какие из канонических почти комплексных структур удовлетворяют условию $J(\theta) = -J(\theta^{-1})$ (хотя примеры таких структур имеются). Однако для однородных k -симметрических пространств можно получить точный ответ и указать дополнительные свойства канонических структур Ω_J .

Теорема 4. Пусть $(G/H, g)$ — риманово однородное k -симметрическое пространство, причем $-1 \notin \text{spec } \theta$, а риманова метрика g инвариантна относительно G и $\{S_p\}$. Обозначим через s число различных пар комплексно сопряженных корней степени k из

1, входящих в спектр оператора θ . Тогда на G/H имеется 2^{s-1} различных (с точностью до знака) канонических почти симплектических структур, инвариантных как относительно группы G , так и относительно "симметрий" $\{S_p\}$. При этом каждая из таких структур Ω_J инвариантна относительно всех канонических почти комплексных структур и всех канонических структур почти произведения на G/H .

В качестве одного из важнейших примеров, реализующих теорему 4, отметим обширный класс римановых однородных 3-симметрических пространств, которые обладают канонической почти комплексной структурой $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2)$ [7], [8]. Широким классом однородных многообразий, обладающих двумя различными инвариантными почти симплектическими структурами, являются однородные римановы 5-симметрические пространства, у которых спектр оператора θ максимален. На таких пространствах имеются две (с точностью до знака) канонические почти комплексные структуры J_1 и J_2 (см. [7], [8]), по которым указанным выше способом строятся канонические почти симплектические структуры Ω_{J_1} и Ω_{J_2} .

Следует отметить, что многие известные однородные римановы многообразия (ряд флаговых многообразий компактных групп Ли, пространства Леджера-Обаты, некоторые нильпотентные группы Ли) являются однородными k -симметрическими пространствами, обладающими каноническими почти комплексными структурами. Поэтому предлагаемый подход позволяет эффективно строить на таких однородных многообразиях канонические почти симплектические структуры.

Работа выполнена при частичной поддержке государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция-2020" (2016–2020), подпрограмма "Методы математического моделирования сложных систем проект "Геометрические структуры на алгебраических, топологических, гладких многообразиях и группах Ли".

Литература

1. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
2. Фоменко А. Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*. – М.: Изд-во Московского университета, 1988. – 413 с.
3. Bolsinov A. V., Zhang P. *Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras* // Transformation Groups. – 2016. – V. 21. – No. 1. – P. 51–86.
4. Bolsinov A. V., Izosimov A. M., Tsonev D. M. *Finite-dimensional integrable systems: a collection of research problems* // J. of Geom. and Phys. – 2017. – V. 115. – P. 2–15.
5. Fasso F., Sansonetto N. *Integrable almost-symplectic Hamiltonian systems* // Journal of Mathematical Physics. – 2007. – V. 48. – No. 9. – 092902. – 13 p.
6. Vaisman I. *Hamiltonian vector fields on almost symplectic manifolds* // Journal of Mathematical Physics. – 2013. – V. 54. – No. 9. – 092902. – 11 p.
7. Балащенко В. В., Степанов Н. А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах* // Мат. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.
8. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. *Однородные пространства: теория и приложения: монография*. – Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. – 280 с.

9. Степанов Н. А. Основные факты теории φ -пространств // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.

CANONICAL ALMOST SYMPLECTIC STRUCTURES ON HOMOGENEOUS Φ -SPACES

V.V. Balashchenko

In this paper, we construct a collection of so-called canonical almost symplectic structures on Riemannian homogeneous k -symmetric spaces. This result is based on a full description of all canonical almost complex structures on these spaces obtained earlier. Some facts were proved for a more general case of regular Φ -spaces.

Keywords: almost symplectic structure, homogeneous Φ -space, canonical affinor structure, homogeneous k -symmetric space.

УДК 514.76

О ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ КОСИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ТИПА НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ КЕЛЕРОВА МНОГООБРАЗИЯ

М.Б. Банару¹, Г.А. Банару²

¹ mihail.banaru@yahoo.com; Смоленский государственный университет

² mihail.banaru@yahoo.com; Смоленский государственный университет

Установлены критерии минимальности гиперповерхности келерова многообразия, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура косимплектического типа.

Ключевые слова: келерово многообразие, почти контактная метрическая структура, структура косимплектического типа, минимальная гиперповерхность, вторая квадратичная форма

1. Почти контактные метрические структуры относятся к числу важнейших дифференциально-геометрических структур. Напомним, что под почти контактной метрической структурой на многообразии N мы понимаем систему тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются такие условия [1]:

$$\eta(\xi) = 1; \Phi(\xi) = 0; \eta \circ \Phi = 0; \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1, 1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\mathfrak{X}(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N .

Известно, что многообразии, допускающие почти контактную метрическую структуру, является нечетномерным и ориентируемым. Важнейшими примерами почти контактной метрической структуры являются косимплектическая структура, слабо косимплектическая структура (или структура Эндо), а также структуры Сасаки и Кенмоцу [1]. Эти структуры, а также их многочисленные обобщения, служат предметом многочисленных исследований, проводимых как геометрами, так и специалистами в области теоретической физики.

В работе [2] В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев ввели в рассмотрение новый тип почти контактных метрических структур — структуру косимплектического типа. Она определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой контактной формой. Основным свойством почти контактной метрической структуры косимплектического типа является ее инвариантность относительно канонических конформных преобразований [2]. Тривиальным примером структуры косимплектического типа служит, разумеется, косимплектическая структура, а важнейшим нетривиальным примером — структура Кенмоцу [1], [3], [4], которая вместе с ее различными обобщениями является, пожалуй, самой популярной темой исследований в области почти контактных метрических структур на многообразиях.

2. Самыми известными примерами почти контактных метрических структур являются структуры на пространствах так называемых главных T^1 -расслоений над почти эрмитовыми многообразиями, а также на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий [3].

В статьях [5] и [6] авторами рассматривалась первая группа структурных уравнений почти контактной метрической структуры на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta} \omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta} \omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega &= -i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + i\sigma_{n\beta} \omega \wedge \omega^\beta - i\sigma_n^\beta \omega \wedge \omega_\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Через $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ обозначены компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$); $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в келерово многообразие M^{2n} , $n \geq 3$; здесь и далее $\omega_\alpha = \omega^{\hat{\alpha}}$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$; $a, b, c = 1, \dots, n$; $\hat{a} = a + n$.

Теорема 1. Матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности N^{2n-1} , на которой индуцирована почти контактная метрическая структура косимплектического типа, в келерово многообразии M^{2n} , $n \geq 3$, имеет вид:

$$(\sigma_{ps}) = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hline 0 \dots 0 & \sigma_{nn} & 0 \dots 0 \\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \end{pmatrix}, \quad p, s = 1, \dots, 2n-1.$$

Доказательство. В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев показали [2], что выполнение равенства

$$d\omega = 0,$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы почти контактная метрическая структура оказалась структурой косимплектического типа. Поэтому, принимая

во внимание (1), мы можем сделать следующий вывод: выполнение равенств

$$1) \sigma_{\beta}^{\alpha} = 0; 2) \sigma_n^{\beta} = 0; 3) \sigma_{n\beta} = 0$$

является критерием того, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести была структурой косимплектического типа. Отличными от нуля могут быть лишь компоненты вида $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ и σ_{nn} , что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Гиперповерхность N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} , $n \geq 3$, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура косимплектического типа, минимальна в том и только том случае, когда $\sigma(\xi, \xi) = 0$.*

Доказательство. Критерием (иногда — определением) минимальности гиперповерхности является условие [7]

$$g^{ps}\sigma_{ps} = 0.$$

Матрица контравариантного метрического тензора гиперповерхности N^{2n-1} имеет вид [3]:

$$(g_{ps}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & I_{n-1} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \hline I_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad p, s = 1, \dots, 2n-1.$$

Следовательно, для гиперповерхности с почти контактной метрической структурой косимплектического типа N^{2n-1} келерова подмногообразия M^{2n} , $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} g^{ps}\sigma_{ps} &= g^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + g^{\hat{\alpha}\beta}\sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}}\sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{nn}\sigma_{nn} \\ &= g^{\hat{\alpha}\beta}\sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}}\sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{nn}\sigma_{nn} = \sigma_{nn}. \end{aligned}$$

Поэтому $g^{ps}\sigma_{ps} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{nn} = 0$. Последнее равенство означает, что

$$\sigma(\xi, \xi) = 0.$$

Итак, сасакиева гиперповерхность N эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ минимальна тогда и только тогда, когда $\sigma(\xi, \xi) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Типовое число t гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} , $n \geq 3$, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура косимплектического типа, является четным в том и только том случае, если гиперповерхность N^{2n-1} является минимальной.*

Доказательство. Напомним, что под типовым числом поверхности риманова многообразия понимают ранг ее второй квадратичной формы. Пусть N^{2n-1} — минимальная гиперповерхность косимплектического типа келерова многообразия

размерности не ниже шести. Тогда, в силу доказанных Теорем 1 и 2, матрица второй квадратичной формы гиперповерхности имеет вид:

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} & \sigma_{\alpha\hat{\beta}} \\ \hline 0\dots 0 & 0 & 0\dots 0 \\ \hline \sigma_{\hat{\alpha}\beta} & \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} & \mathbf{0} \end{array} \right). \quad (2)$$

Поскольку $\sigma_{\hat{\alpha}\beta} = \overline{\sigma_{\alpha\hat{\beta}}}$, получим, что $rank(\sigma_{ps}) = 2rank(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$. Следовательно, $t = rank(\sigma_{ps})$ — число четное, что и требовалось доказать.

Литература

1. Кириченко В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* – Одесса: Печатный дом, 2013.
2. Кириченко В. Ф., Ускорев И. В. *Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур* // Математические заметки. – 2008. – Т. 84. – №6. С. 838–850.
3. Кириченко В. Ф., Банару М. Б., *Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. – 2014. – Т. 127. – С. 5–40.
4. Pitiş Gh., *Geometry of Kenmotsu manifolds* – Braşov: Publ. House of Transilvania Univ., 2007.
5. Степанова Л. В., Банару Г. А., Банару М. Б. *О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий* // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2016. – №1. – С. 86–89.
6. Банару М. Б. *О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий* // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55. – №4. – С. 719–723.
7. Норден А. П. *Теория поверхностей* – М.: ГИТТЛ, 1956.

ON THE ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURE OF COSYMPLECTIC TYPE ON A HYPERSURFACE OF A KÄHLERIAN MANIFOLD

M.B. Banaru, G.A. Banaru

Some criteria of minimality of a hypersurfaces of a Kähler manifold, equipped with an almost contact metric structure of cosymplectic type, are established.

Keywords: Kähler manifold, almost contact metric structure, structure of cosymplectic type, minimal hypersurface, second fundamental form

УДК 514.765

АССОЦИИРОВАННЫЕ ПРОЕКТИВНАЯ, ЦЕНТРОПРОЕКТИВНАЯ, АФФИННО-ГРУППОВАЯ, ЛИНЕЙНАЯ И АФФИННАЯ СВЯЗНОСТИ

К.В. Башашина¹

¹ *baschaschina@mail.ru*; Балтийский федеральный университет им. И. Канта

В статье приведена иерархия связностей в многомерном проективном пространстве. Для этого рассмотрены 4 семейства плоскостей, в роли образующих элементов которых выступают плоскость с общим положением точек, центрированные, гиперцентрированные и плоскости с фиксированными центром и гиперцентром. Связности в расслоениях, ассоциированных с перечисленными семействами, задаются способом Лаптева–Лумисте с помощью совокупности функций Γ . В каждом из рассматриваемых расслоений функции Γ задаются по-разному, однако во всей работе с целью удобства использован только этот символ при обозначении объектов связности. Доказана тензорность кривизн проективной, центропроективной, аффинно-групповой и линейной связностей и выделены соответствующие подтензоры.

Ключевые слова: проективное пространство, семейство плоскостей, центрированная плоскость, гиперцентрированная плоскость, тензор кривизны, ассоциированное расслоение

1. Структурные уравнения проективной группы. Отнесем n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, J, \dots = \overline{1, n}$), инфинитезимальные перемещения которого определяются деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega^J_I A_J + \omega_I A,$$

где форма θ играет роль множителя пропорциональности, а структурные формы $\omega^I, \omega^I_J, \omega_I$ проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют уравнениям Картана

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J, \quad d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \delta^I_J \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \quad d\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J.$$

2. Общая проективная связность. В пространстве P_n рассмотрим семейство B_r m -мерных плоскостей L_m [1] ($1 \leq m < n, 1 \leq r < (m+1)(n-m)$). Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершины $\{A, A_a\}$ на плоскость L_m ; здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $a, b, c = \overline{1, m}; \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}; i, j, k = \overline{1, r}$.

Система уравнений семейства B_r в параметрической форме имеет вид:

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i, \quad \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i, \tag{1}$$

где формы Пфаффа θ^i являются структурными формами r -мерного гладкого многообразия V_r и удовлетворяют уравнениям

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \tag{2}$$

Продолжая систему уравнений (1), получим

$$\Delta \Lambda_i^\alpha - \Lambda_{ai}^\alpha \omega^a = \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j, \quad \Delta \Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_i^\alpha \omega_a = \Lambda_{aij}^\alpha \theta^j,$$

дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta \Lambda_{ai}^\alpha = d\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_{aj}^\alpha \theta_i^j - \Lambda_{bi}^\alpha \omega_a^b + \Lambda_{ai}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^j\}$ является фундаментальным объектом первого порядка семейства B_r .

С семейством B_r ассоциированно главное расслоение $G_s(B_r)$ со структурными уравнениями (2) и следующими:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^b \wedge \omega_b^a + \theta^i \wedge \omega_i^a, \quad d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + (\delta_b^a \omega_c + \delta_c^a \omega_b) \wedge \omega^c + \theta^i \wedge \omega_{bi}^a, \\ d\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai}, \quad d\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \omega_a \wedge \omega^a + \theta^i \wedge \omega_{\beta i}^\alpha, \\ d\omega_\alpha^a &= \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \omega_\alpha \wedge \omega^a, \quad d\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta, \end{aligned}$$

где $\omega_i^a = \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha^a$, $\omega_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha \omega_\alpha^a - \delta_b^a \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha$, $\omega_{ai} = \Lambda_{ai}^\alpha \omega_\alpha$, $\omega_{\beta i}^\alpha = -\Lambda_{ai}^\alpha \omega_\beta^a - \Lambda_i^\gamma (\delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta)$.

Фундаментально-групповую связность в ассоциированном расслоении зададим способом Лаптева-Лумисте с помощью новых слоевых форм

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^a &= \omega^a - \Gamma_i^a \theta^i, \quad \tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \theta^i, \quad \tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai} \theta^i, \quad \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta i}^\alpha \theta^i, \\ \tilde{\omega}_\alpha &= \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha i} \theta^i, \quad \tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha i}^a \theta^i. \end{aligned}$$

Связность $\Gamma = \{\Gamma_i^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}, \Gamma_{\alpha i}^a\}$ содержит подобъект общей проективной связности $\Gamma_0 = \{\Gamma_i^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}\}$:

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{bi}^a + \delta_b^a (\Gamma_{ci} \omega^c - \Gamma_i^c \omega_c) + \Gamma_{bi} \omega^a - \Gamma_i^a \omega_b + \omega_{bi}^a &= \Gamma_{bij}^a \theta^j, \\ \Delta \Gamma_i^a - \Gamma_{bi}^a \omega^b + \omega_i^a &= \Gamma_{ij}^a \theta^j, \quad \Delta \Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^b \omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij} \theta^j. \end{aligned}$$

Выпишем структурные уравнения форм проективной связности

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^a &= \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + R_{ij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \quad d\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + R_{aij} \theta^i \wedge \theta^j, \\ d\tilde{\omega}_b^a &= \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + \delta_b^a \tilde{\omega}_c \wedge \tilde{\omega}^c + \tilde{\omega}_b \wedge \tilde{\omega}^a + R_{bij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \end{aligned}$$

где компоненты объекта кривизны проективной связности имеют вид:

$$R_{ij}^a = \Gamma_{[ij]}^a - \Gamma_{b[i} \Gamma_{j]}^b, \quad R_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{c]j}^a - \delta_b^a \Gamma_{c[i} \Gamma_{j]}^c, \quad R_{aij} = \Gamma_{a[ij]} - \Gamma_{a[i}^b \Gamma_{b]j}$$

и удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм θ^i : $\Delta R_{ij}^a - R_{bij}^a \omega^b \equiv 0$, $\Delta R_{bij}^a - R_{ij}^a \omega_b + R_{bij} \omega^a \equiv 0$, $\Delta R_{aij} + R_{aij}^b \omega_b \equiv 0$.

Следовательно, объект кривизны общей проективной связности является тензором.

3. Центропроективная связность. В рассматриваемом проективном пространстве P_n зададим семейство B_r^* центрированных m -мерных плоскостей L_m^* ($1 \leq m < n, 1 \leq r < m(n-m) + n$). Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершину A в центр плоскости L_m^* , а вершины $\{A_a\}$ на эту плоскость. В работе [2] проведено подробное исследование семейств B_r^* . В частности

нас интересует задание центропроективной связности в фактор-расслоении ассоциированного расслоения $G_S(B_r^*)$. Выпишем дифференциальные уравнения объекта $\{\Gamma_{ai}, \Gamma_{bi}^a\}$, задающего эту связность:

$$\Delta \Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a = \Gamma_{bij}^a \theta^j, \quad \Delta \Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^b \omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij} \theta^j.$$

Структурные уравнения форм связности имеют вид:

$$d\tilde{\omega}_b^a = \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + R_{bij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \quad d\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + R_{aij} \theta^i \wedge \theta^j,$$

где компоненты объекта кривизны центропроективной связности выражаются по формулам:

$$R_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{cj]}^a, \quad R_{aij} = \Gamma_{a[ij]} - \Gamma_{a[i}^b \Gamma_{bj]}$$

и удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям: $\Delta R_{bij}^a \equiv 0$, $\Delta R_{aij} + R_{aij}^b \omega_b \equiv 0$.

Таким образом, показано, что объект кривизны центропроективной связности является тензором, содержащим подтензор кривизны линейной связности.

4. Аффинно-групповая связность. Для описания аффинно-групповой связности необходимо рассмотреть r -мерное семейство \bar{B}_r ($1 \leq r < m(n-m) + n$), образующим элементом которого является гиперцентрированная плоскость P_m^{m-1} . Воспользуемся важными для настоящего исследования результатами работы [3]. Приведем структурные уравнения форм аффинно-групповой связности

$$d\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + R_{ij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \quad d\tilde{\omega}_b^a = \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + R_{bij}^a \theta^i \wedge \theta^j.$$

Они содержат компоненты объекта кривизны аффинно-групповой связности, которые выражаются через компоненты объекта связности $\{\Gamma_i^a, \Gamma_{bi}^a\}$ и их пфаффовы производные

$$R_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{cj]}^a, \quad R_{ij}^a = \Gamma_{[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{cj]}^a,$$

причем $\Delta \Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a = \Gamma_{bij}^a \theta^j$, $\Delta \Gamma_i^a - \Gamma_{bi}^a \omega^b + \omega_i^a = \Gamma_{ij}^a \theta^j$.

С помощью этих уравнений и их продолжений, получаем доказательство тензорности объекта аффинно-групповой связности $\Delta R_{bij}^a \equiv 0$, $\Delta R_{ij}^a - R_{bij}^a \omega^b \equiv 0$. Полученный тензор содержит подтензор кривизны линейной связности.

5. Линейная связность. В этом пункте будем рассматривать случай, когда фиксирована и точка, и гиперплоскость в образующей плоскости P_m . Семейство таких элементов будем обозначать \bar{B}_r^* . В параметрической форме семейство \bar{B}_r^* имеет уравнения (при соответствующей адаптации):

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i, \quad \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i, \quad \omega^a = \Lambda_i^a \theta^i, \quad \omega_a = \Lambda_{ai} \theta^i.$$

Совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha, \Lambda_i^a, \Lambda_{ai}\}$ образует фундаментальный тензор семейства \bar{B}_r^* :

$$\Delta \Lambda_i^\alpha - \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j, \quad \Delta \Lambda_{ai}^\alpha = \Lambda_{aij}^\alpha \theta^j, \quad \Delta \Lambda_i^a - \Lambda_i^\alpha \omega_a^\alpha = \Lambda_{ij}^a \theta^j, \quad \Delta \Lambda_{ai} + \Lambda_{ai}^\alpha \omega_\alpha = \Lambda_{aij} \theta^j.$$

С семейством \bar{B}_r^* ассоциировано главное расслоение $G_S(\bar{B}_r^*)$ со структурными уравнениями:

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i, \quad d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \theta^i \wedge \omega_{bi}^a, \quad d\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \theta^i \wedge \omega_{\beta i}^\alpha, \\ d\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \theta^i \wedge \omega_{\alpha i}^a, \quad d\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \theta^i \wedge \omega_{\alpha i},$$

где формы $\omega_{bi}^a, \omega_{\beta i}^\alpha, \omega_{\alpha i}^a, \omega_{\alpha i}$ являются линейными комбинациями слоевых форм $\omega_b^a, \omega_\beta^\alpha, \omega_\alpha^a, \omega_\alpha$ с коэффициентами $\Lambda_i^a, \Lambda_i^\alpha, \Lambda_{\alpha i}^a, \Lambda_{\alpha i}$. Аналогично пункту 2, зададим фундаментально-групповую связность в ассоциированном расслоении путем преобразования слоевых форм:

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \theta^i, \quad \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta i}^\alpha \theta^i, \quad \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha i} \theta^i, \quad \tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha i}^a \theta^i.$$

Связность $\Gamma = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}, \Gamma_{\alpha i}^a\}$ содержит подобъект линейной связности Γ_{bi}^a :

$$\Delta \Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a = \Gamma_{bij}^a \theta^j.$$

Структурные уравнения форм линейной связности представим в виде

$$d\tilde{\omega}_b^a = \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + R_{bij}^a \theta^i \wedge \theta^j,$$

где компоненты объекта кривизны линейной связности выражаются по формулам:

$$R_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{c]j}^a.$$

Дифференциальные сравнения на его компоненты имеют следующий вид: $\Delta R_{bij}^a \equiv 0$.

Значит, объект кривизны линейной связности является тензором.

Теорема. Тензор кривизны общей проективной связности, ассоциированной с семейством плоскостей в проективном пространстве не имеет подтензоров. Если образующая плоскость центрирована, то проективная связность становится центропроективной, а тензор центропроективной связности содержит подтензор линейной связности. Аналогично, если образующая плоскость гиперцентрирована, то проективная связность превращается в так называемую аффинно-групповую связность, тензор кривизны которой содержит подтензор линейной связности. Наконец, если образующая плоскость двойственно центрирована, т.е. обладает центром и гиперцентром, которые не инцидентны, то центропроективная и аффинно-групповая связности вырождаются в линейную связность.

Замечание. Если размерность семейства двойственно центрированных плоскостей равна размерности образующей плоскости, то линейная связность превращается в аффинную связность или аффинную связность без кручения в случае, когда образующие плоскости являются касательными плоскостями к поверхности, описанной центрами плоскостей.

Литература

1. Шевченко Ю. И. Об оснащении многообразий плоскостей в проективном пространстве // Дифф. геом. многообр. фиг. – 1978. – Вып. 9. – С. 124–133.
2. Кулешов А. В. Связности второго порядка на семействе центрированных плоскостей в проективном пространстве // Дифф. геом. многообр. фиг. – 2012. – Вып. 43. – С. 50–62.
3. Башашина К. В. Фундаментально-групповые связности, ассоциированные с семейством гиперцентрированных плоскостей в проективном пространстве // Тезисы Межд. конф. Дни геометрии в Новосибирске. – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2016. – С. 33–35.

ASSOCIATED PROJECTIVE, CENTROPROJECTIVE, AFFINE-GROUP, LINEAR AND AFFINE CONNECTIONS

K.V. Bashashina

The article presents a hierarchy of connections in projective space. Four plane families are considered, generating elements of which are the plane with general position of its points, centered, hypercentered, and planes with fixed center and hypercenter. Connections in bundles associated with the families are defined by the Laptev-Lumiste method using different sets of functions. The curvature tensority of projective, center-projective, affine-group and linear connections are proved and corresponding subtensors are distinguished. The study uses the Cartan-Laptev method, based on the calculus of external differential forms.

Keywords: projective space, plan families, centered plane, hypercentered plane, curvature tensor, associated bundle

УДК 514.76

РЕДУКЦИЯ СВЯЗНОСТЕЙ ГРАССМАНОПОДОБНОГО МНОГООБРАЗИЯ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

О.О. Белова¹

¹ *olgaobelova@mail.ru*; Балтийский федеральный университет имени И. Канта, Институт физико-математических наук и ИТ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено грассманоподобное многообразие $Gr^(m, n)$ центрированных плоскостей. В главном расслоении задана групповая связность, которая неоднозначно индуцируется нормализацией многообразия $Gr^*(m, n)$. Исследована динамика изменений объекта групповой связности при переходе от исходного грассманоподобного многообразия к нормализованному многообразию.*

Ключевые слова: метод Картана – Лаптева, грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, нормализация, редукция, связность

В работе используется метод Картана — Лаптева, обобщающий метод внешних форм и подвижного репера.

Определение. Грассманоподобным многообразием $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей называется многообразие m -мерных плоскостей n -мерного проективного пространства P_n , проходящих через фиксированную точку [3].

При отнесении проективного пространства P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ и его специализации грассманоподобное многообразие можно задать уравнениями $\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha$, $I, \dots = 1, n$; $a, \dots = 1, \dots, m$; $\alpha, \dots = m + 1, \dots, n$ (см. [3]), где $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ — фундаментальный объект. Специализация подвижного репера для многообразия $Gr^*(m, n)$ приводит к главному расслоению $G(Gr^*(m, n))$, типовым слоем которого является подгруппа G стационарности центрированной плоскости, а базой — грассманоподобное многообразие.

В главном расслоении зададим фундаментально-групповую связность способом Лаптева — Лумисте (см. [1, с. 62], [2])

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{ba}^a \omega^\alpha - L_{ba}^{ac} \omega_c^\alpha, & \tilde{\omega}_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - L_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma, & \tilde{\omega}_\alpha^a &= \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - L_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \\ \tilde{\omega}_a &= \omega_a - L_{a\alpha} \omega^\alpha - \Pi_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha, & \tilde{\omega}_\alpha &= \omega_\alpha - L_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta. \end{aligned}$$

Компоненты объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{ba}^a, L_{ba}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, L_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{\alpha\beta}^a, L_{\alpha\beta}^{ab}, L_{a\alpha}, \Pi_{a\alpha}^b, L_{\alpha\beta}, \Pi_{\alpha\beta}^a\}$ удовлетворяют следующим сравнениям по модулю базисных форм $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$ (см. [5]):

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{ba}^a + L_{ba}^{ac} \omega_c - \omega_{ba}^a &\equiv 0, & \Delta L_{ba}^{ac} - \omega_{ba}^{ac} &\equiv 0, & \Delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + L_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a - \omega_{\beta\gamma}^\alpha &\equiv 0, \\ \Delta L_{\beta\gamma}^{\alpha a} - \omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} &\equiv 0, & \Delta \Gamma_{\alpha\beta}^a + L_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b + (\delta_b^a \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \delta_\alpha^\gamma \Gamma_{b\beta}^a) \omega_\gamma^b - \omega_{\alpha\beta}^a &\equiv 0, \\ \Delta L_{\alpha\beta}^{ab} + (\delta_c^a L_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma L_{c\beta}^{ab}) \omega_\gamma^c - \omega_{\alpha\beta}^{ab} &\equiv 0, \\ \Delta L_{a\alpha} + (\Pi_{a\alpha}^b + \Gamma_{a\alpha}^b) \omega_b &\equiv 0, & \Delta \Pi_{a\alpha}^b + L_{a\alpha}^{cb} \omega_c + \delta_a^b \omega_\alpha &\equiv 0, \\ \Delta L_{\alpha\beta} + (\Pi_{\alpha\beta}^a + \Gamma_{\alpha\beta}^a) \omega_a - L_{\alpha\beta} \omega_\alpha^a + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma &\equiv 0, & \Delta \Pi_{\alpha\beta}^a + L_{\alpha\beta}^{ba} \omega_b - \Pi_{b\beta}^a \omega_\alpha^b + L_{\alpha\beta}^{\gamma a} \omega_\gamma &\equiv 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{ba}^a &= \delta_b^a \Lambda_\alpha^c \omega_c + \delta_b^a \omega_\alpha + \Lambda_\alpha^a \omega_b, & \omega_{ba}^{ac} &= \delta_b^a \Lambda_\alpha^{ec} \omega_e - \delta_b^c \omega_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ac} \omega_b, \\ \omega_{\beta\gamma}^\alpha &= \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^a \omega_a + \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta, & \omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} &= \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{ba} \omega_b + \delta_\gamma^a \omega_\beta^\alpha, & \omega_{\alpha\beta}^a &= \Lambda_\beta^a \omega_\alpha, & \omega_{\alpha\beta}^{ab} &= \Lambda_\beta^{ab} \omega_\alpha, \end{aligned}$$

а дифференциальный оператор Δ действует по закону: $\Delta \Gamma_{ba}^a = d\Gamma_{ba}^a + \Gamma_{ba}^c \omega_c^a - \Gamma_{ca}^a \omega_b^c - \Gamma_{b\beta}^a \omega_\alpha^\beta$.

Теорема. *Объект связности Γ является квазитензором и содержит четыре простых подобъекта $\Gamma_1 = \{\Gamma_{ba}^a, L_{ba}^{ac}\}$, $\Gamma_2 = \{\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, L_{\beta\gamma}^{\alpha a}\}$, $\Gamma_3 = \{\Gamma_1, L_{a\alpha}, \Pi_{a\alpha}^b\}$, $\Gamma_4 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{\alpha\beta}^a, L_{\alpha\beta}^{ab}\}$, задающих связность, соответственно, в расслоении плоскостных линейных реперов, расслоении нормальных линейных реперов, фактор-расслоении плоскостных коэффинных реперов и аффинном фактор-расслоении.*

Динамика изменений расслоения была исследована в [4] при адаптации подвижного репера полям нормалей 1-го и 2-го рода. Проследим динамику изменений объекта групповой связности при данных канонизациях.

При помещении вершин A_α в нормаль 1-го рода N_{n-m} слоевые формы ω_α^a становятся главными и разложатся по базисным формам

$$\omega_\alpha^a = g_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + g_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \quad (1)$$

причем $\Delta g_{\alpha\beta}^a + g_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b - \Lambda_\beta^a \omega_\alpha \equiv 0$, $\Delta g_{\alpha\beta}^{ab} - \Lambda_\beta^{ab} \omega_\alpha \equiv 0$.

Объект связности Γ сужается до объекта Γ^1 , компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_{b\alpha}^a + L_{b\alpha}^{ac}\omega_c - \omega_{b\alpha}^a &\equiv 0, & \Delta L_{b\alpha}^{ac} - \delta_b^a \Lambda_\alpha^{ec}\omega_e - \Lambda_\alpha^{ac}\omega_b &\equiv 0, \\ \Delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + L_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a - \omega_{\beta\gamma}^\alpha &\equiv 0, & \Delta L_{\beta\gamma}^{\alpha a} - \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{ba}\omega_b &\equiv 0, \\ \Delta L_{a\alpha} + (\Pi_{a\alpha}^b + \Gamma_{a\alpha}^b)\omega_b &\equiv 0, & \Delta\Pi_{a\alpha}^b + L_{a\alpha}^{cb}\omega_c + \delta_a^b\omega_\alpha &\equiv 0, \\ \Delta L_{\alpha\beta} + (\Pi_{\alpha\beta}^a + g_{\alpha\beta}^a)\omega_a + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\omega_\gamma &\equiv 0, & \Delta\Pi_{\alpha\beta}^a + g_{\alpha\beta}^{ba}\omega_b + L_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma &\equiv 0.\end{aligned}$$

Теорема. При адаптации подвижного репера полю нормалей 1-го рода объект связности Γ сводится к объекту Γ^1 и содержит три подобъекта $\Gamma_1^1, \Gamma_2^1, \Gamma_3^1$, задающих связность в расслоении плоскостных линейных реперов, расслоении нормальных линейных реперов и фактор-расслоении плоскостных коэффинных реперов.

Если отказаться от предыдущей канонизации и поместить вершины A_a в нормаль 2-го рода N_{m-1} , то

$$\omega_a = g_{a\alpha}\omega^\alpha + g_{a\alpha}^b\omega_b^\alpha, \quad (2)$$

т.е. слоевые формы ω_a становятся главными, и имеют место сравнения $\Delta g_{a\alpha} \equiv 0, \Delta g_{a\alpha}^b + \delta_a^b\omega_\alpha \equiv 0$. При этом объект связности Γ сужается до объекта Γ^2 ; его компоненты удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_{b\alpha}^a - \delta_b^a\omega_\alpha &\equiv 0, & \Delta L_{b\alpha}^{ac} + \delta_b^c\omega_\alpha^a &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \delta_\beta^\alpha\omega_\gamma - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta &\equiv 0, & \Delta L_{\beta\gamma}^{\alpha a} - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^a &\equiv 0, \\ \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a + (\delta_b^a\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \delta_\alpha^\gamma\Gamma_{b\beta}^a)\omega_\gamma - \omega_{\alpha\beta}^a &\equiv 0, & \Delta L_{\alpha\beta}^{ab} + (\delta_c^a L_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma L_{c\beta}^{ab})\omega_\gamma - \omega_{\alpha\beta}^{ab} &\equiv 0, \\ \Delta L_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\omega_\alpha^a + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\omega_\gamma &\equiv 0, & \Delta\Pi_{\alpha\beta}^a - g_{\alpha\beta}^a\omega_\alpha^b + L_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma &\equiv 0,\end{aligned}$$

Теорема. При адаптации подвижного репера полю нормалей 2-го рода объект связности Γ сводится к объекту Γ^2 и содержит три подобъекта $\Gamma_1^2, \Gamma_2^2, \Gamma_4^2$, задающих связность в расслоении плоскостных линейных реперов, расслоении нормальных линейных реперов и аффинном фактор-расслоении.

Произведем одновременно канонизации, т.е. $A_\alpha \in N_{n-m}, A_a \in N_{m-1}$. При этом будут выполняться одновременно условия (1) и (2), тогда объект связности Γ сужается до объекта $\Gamma^{1,2}$ с компонентами, удовлетворяющими дифференциальным сравнениям

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_{b\alpha}^a - \delta_b^a\omega_\alpha &\equiv 0, & \Delta L_{b\alpha}^{ac} &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \delta_\beta^\alpha\omega_\gamma - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta &\equiv 0, \\ \Delta L_{\beta\gamma}^{\alpha a} &\equiv 0, & \Delta L_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\omega_\gamma &\equiv 0, & \Delta\Pi_{\alpha\beta}^a + L_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma &\equiv 0.\end{aligned}$$

Теорема. При переходе к нормализованному многообразию объект связности Γ сводится к объекту $\Gamma^{1,2}$ и содержит два подобъекта Γ_1^2, Γ_2^2 , которые задают связность в расслоениях плоскостных линейных реперов и нормальных линейных реперов.

Литература

1. Белова О. О. *Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей* // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2006. – № 5(52). – С. 18–20.
2. Belova O. O. *The Grassmann-like manifold of centered planes* Math. Notes. – 2018. – Т. 104. – № 6. – С. 789–798; перевод из Матем. заметки. – 2018. – Т. 104. – № 6. – С. 812–822.
3. Belova O. *Fiberings reduction of the Grassmann-like manifold of centered planes* // Классическая и современная геометрия. Материалы Межд. конф., посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. – Москва: Изд-во МПГУ, 2019. – С. 16–17.
4. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*. Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – М.: ВИНТИ. – С. 5–246.
5. Шевченко Ю. И. *Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении* // Дифференц. геом. многообразий фигур – 2006. – № 37. – С. 179–187.

CONNECTIONS REDUCTION OF THE GRASSMANN-LIKE MANIFOLD OF CENTERED PLANES

O.O. Belova

The Grassmann-like manifold $Gr^(m, n)$ of centered planes is considered in the multidimensional projective space. A group connection defined on the principal bundle is ambiguously induced by normalization of the manifold $Gr^*(m, n)$. Dynamics of changes of the group connection object is investigated at transition from initial Grassmann-like manifold to the normalized manifold.*

Keywords: Cartan – Laptev method, the Grassmann-like manifold of centered planes, normalization, reduction, connection

UDC 515.124.4+514.172.4+512.542+519.173

FINITE HOMOGENEOUS METRIC SPACES

V.N. Berestovskii¹, Yu.G. Nikonorov²

¹ vberestov@inbox.ru; Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

² nikonorov2006@mail.ru; Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

We discuss the class of finite homogeneous metric spaces and some of its important subclasses that have natural definitions in terms of metrics and well-studied analogues in the class of Riemannian manifolds. The relationships between these classes are explored. Examples of corresponding spaces are built, some of which are sets of vertices of special convex polytopes in Euclidean spaces. It is given the description of the classes under consideration in terms of graph theory, with the help of which examples of finite metric spaces with unusual properties are constructed.

Keywords: finite Clifford–Wolf homogeneous metric space, finite (normal) homogeneous metric space, Kneser graph, (semi)regular polytope, vertex-transitive graph

We discuss the class of finite homogeneous metric spaces, its subclasses of normal, generalized normal and strongly generalized normal homogeneous, Clifford–Wolf homogeneous spaces, finite groups with left-invariant or bi-invariant metrics and relations between them.

Similar classes were studied for Riemannian manifolds in [1]–[3].

There are the following tools for constructing the considered spaces:

- (1) homogeneous spaces G/H of finite (including indecomposable or simple) groups G by their subgroup H , endowed with invariant metrics;
- (2) compact convex (including regular and semi-regular [4],[5]) polyhedra in Euclidean spaces with a group of isometries that are transitive on the set of vertices;
- (3) vertex-symmetric (vertex-transitive, in other terminology) connected finite graphs [6]–[8] with the natural metric;
- (4) Cayley graphs of finite groups for minimal generating sets [9].

Definition 1. A finite metric space (M, d) is called homogeneous if for every points $x, y \in M$, there is an isometry f of the space (M, d) on itself such that $f(x) = y$.

Proposition 1. The set $G = \text{Isom}(M, d)$ of all isometries of a finite homogeneous metric space (M, d) forms group with respect to the operation of the composition of mappings. Moreover,

- 1) G is a subgroup of the group $S(M)$ of all permutations (bijections) of the set M ;
- 2) $G = S(M)$ if and only if $d(x, y) \equiv c > 0$ for $x, y \in M, x \neq y$;
- 3) (M, d) is realized as a homogeneous space $(G/H, d)$, where $H = \{f \in G : f(x_0) = x_0\}$ is the stabilizer of a fixed point $x_0 \in M$, and G has a standard left action on the set of cosets G/H ;
- 4) There exists a G -left-invariant and H -right-invariant metric ρ on the group G such that the canonical projection $p : (G, \rho) \rightarrow (G/H, d)$ is a submetry [10].

Remark 1. If $|M| = n$, where $|\cdot|$ denotes the cardinality of a set, then $S(M)$ is isomorphic to $S(n)$, the so-called symmetric group of degree n .

Proposition 2. Let G be a finite group, H and G_1 its proper subgroups, $H_1 = G_1 \cap H$. Then the following conditions are equivalent:

- 1) the canonical left action of G_1 on G/H is transitive;
- 2) $G_1 \cdot H = G$;
- 3) $\text{index}|G_1 : H_1| = \text{index}|G : H|$.

Under any of these conditions, G_1/H_1 is naturally identified with G/H .

Remark 2. In this case, it is natural to say that the group G is narrowed down to the group G_1 . The question of expanding the group G_1 to the group G for an effective homogeneous space G_1/H_1 , where H_1 is an arbitrary subgroup of G_1 , is more simple: this is an arbitrary subgroup of G in $S(G_1/H_1)$, including G_1 .

Proposition 3. Let G be an arbitrary finite group, H its subgroup, d a metric on G . Then

$$d_H(x, y) := \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{g \in G, h \in H} d(gxh, gyh), \quad x, y \in G,$$

is a G -left-invariant and H -right-invariant metric on G .

If $H = G$, then $d_H(x, y)$ is a bi-invariant metric on G .

If $H \neq G$, then there is a unique G -invariant metric ρ on G/H with the projection-submetry $p : (G, d_H) \rightarrow (G/H, \rho)$. Moreover, $(G/H, \rho)$ is a homogeneous metric space.

If H is a normal subgroup and d is a left-invariant metric on G , then there exists a unique left-invariant metric ρ on the quotient group G/H with the projection-submetry $p : (G, d) \rightarrow (G/H, \rho)$.

Proposition 4. Let $H_1 \subset H$ be proper subgroups of a finite group G , ρ is a G -left-invariant and H -right-invariant metric on the group G , d and d_1 are metrics on G/H and G/H_1 . Then if any two of the following three canonical projections

$$p : (G, \rho) \rightarrow (G/H, d),$$

$$p_1 : (G, \rho) \rightarrow (G/H_1, d_1),$$

$$q : (G/H_1, d_1) \rightarrow (G/H, d)$$

are submetries, then the third projection is also a submetry and all three spaces (G, ρ) , $(G/H, d)$, and $(G/H_1, d_1)$ are homogeneous.

Definition 2. A finite homogeneous metric space (M, d) is called normal homogeneous if for the group G in Proposition 1, there exists its subgroup Γ transitive on M and a bi-invariant metric σ on Γ such that the canonical projection $\pi : (\Gamma, \sigma) \rightarrow (\Gamma/(\Gamma \cap H), d) = (M, d)$ is a submetry.

Definition 3. A finite homogeneous metric space (M, d) is called generalized normal homogeneous if for every points $x, y \in M$, there is an isometry f (that is called a δ -shift at the point x) of the space (M, d) onto itself such that $f(x) = y$ and $d(x, f(x)) \geq d(z, f(z))$ for all $z \in M$.

Definition 4. A finite homogeneous metric space (M, d) is called strongly generalized normal homogeneous if for every points $x, y \in M$, $x \neq y$, there is an isometry f of the space (M, d) onto itself such that f has no fixed point, $f(x) = y$, and $d(x, f(x)) \geq d(z, f(z))$ for all $z \in M$.

Definition 5. A finite homogeneous metric space (M, d) is called Clifford–Wolf homogeneous (shortly, CW-homogeneous) if for every points $x, y \in M$ there is an isometry f (that is called a CW-translation) of the space (M, d) such that $f(x) = y$ and $d(x, f(x)) = d(z, f(z))$ for any point $z \in M$.

Notation 1. $FGBM$, $FGLM$, $FCWHS$, $FSGNHS$, $FGNHS$, $FNHS$, FHS denote respectively the classes of finite groups with bi-invariant metrics, finite groups with left-invariant metrics, finite CW-homogeneous spaces, finite strongly generalized normal homogeneous spaces, finite generalized normal homogeneous spaces, finite normal homogeneous spaces, and finite homogeneous spaces.

Theorem 1. The following inclusions and equality are fulfilled:

$$FGBM \subset FCWHS \subset FSGNHS \subset FGNHS = FNHS \subset FHS,$$

$$FGBM \subset FGLM \subset FHS.$$

Remark 3. All the above inclusions in Theorem 1 are strict.

Definition 6. A metric space (M, d) is called a direct metric product of metric spaces (M_1, d_1) and (M_2, d_2) , if $M = M_1 \times M_2$ and

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [d_1(x_1, y_1)^\alpha + d_2(x_2, y_2)^\alpha]^{1/\alpha}, \quad 1 \leq \alpha < +\infty, \quad (1)$$

or

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, \quad (2)$$

$x_1, y_1 \in M_1, x_2, y_2 \in M_2$.

Notation 2. We will use the notation $d = d_1 \times_\alpha d_2$ (respectively, $d = d_1 \times_\infty d_2$), if d is defined by the formula (1) (respectively (2)).

Remark 4. There are more general definitions of the direct metric product of metric spaces (see e.g. [11]).

Theorem 2. If spaces (M_1, d_1) and (M_2, d_2) are contained in the same class of metric spaces introduced in Notation 1, then their direct metric product belongs to the same class.

Definition 7. A space (M, d) , belonging to one of the classes indicated in Notation 1, is called indecomposable in this class, if it cannot be represented as a direct product of metric spaces (M_1, d_1) and (M_2, d_2) from the same class, provided that $|M_1| \geq 2, |M_2| \geq 2$. Otherwise, (M, d) is said to be decomposable in this class.

Theorem 3. If $(M, d) \in FHS, |M| \geq 2$, and $|Isom(M, d)| = |M|!$, then (M, d) belongs to any class from Notation 1.

Moreover, for any choice of one of these classes,

1) (M, d) is indecomposable in this class for all groups $M = G$ in the case of FGBM or FGLM classes if and only if $|M|$ is a prime number.

2) If $|M|$ is not simple and M is represented as any particular group G , if (M, d) is considered in the classes FGBM or FGLM, then (M, d) is uniquely represented as a direct metric product of spaces indecomposable in this class, up to a permutation of the factors.

Remark 5. For the classes FGBM and FGLM, it is used the Remak–Schmid theorem on the uniqueness of the representation of a finite group G as a direct product of indecomposable subgroups [12].

Problem 1. Is the last assertion of Theorem 3 true for an arbitrary decomposable direct (possibly non-associative) product $(M, d) \in FHS$?

Remark 6. A direct product may be non-associative for factorizations with different α from Definition 6 and Notation 2.

Since the barycenter of a finite system of material points (with the same mass) in any Euclidean space is preserved for any bijection of this system, we immediately get the following result.

Proposition 5. Let $M = \{x_1, \dots, x_m\}$, $m \geq n + 1$, be a finite homogeneous metric subspace of Euclidean space \mathbb{E}^n , $n \geq 2$, with the metric induced from \mathbb{E}^n , which does not lie in a hyperplane. Then M is the set of vertices $V(P)$ of a convex polytope P , that is situated in some sphere in \mathbb{E}^n with radius $r > 0$ and center $x_0 = (1/m) \cdot \sum_{k=1}^m x_k$.

Corollary 1. $Isom(M) \subset O(n)$. Up to a similarity, there is a bijection between homogeneous finite metric subspaces in \mathbb{E}^n , $n \geq 2$, and finite homogeneous metric subspaces of the unit sphere $S_1^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$.

Remark 7. *The analogues of Proposition 5 and Corollary 1 are true for finite homogeneous metric subspaces of Lobachevsky space L^n , $n \geq 2$.*

Example 1. *The sets of vertices of regular or semi-regular [4],[5] polyhedra in Euclidean spaces, their “uniform truncations”, direct prisms and antiprisms with regular and semi-regular bases and much more. They include the sets of vertices of polyhedra 1–18 of [5] for $n = 3$. In [4] it is reproduced the classification of all regular polyhedra in Euclidean spaces, obtained by Schläfli in 1850.*

Proposition 6. *The set T of vertices of the regular simplex in \mathbb{E}^n with a metric induced from \mathbb{E}^n is isometric to a cyclic (commutative) group of order $n + 1$ with a bi-invariant metric. As a generating element of this group, we can take any cyclic permutation on $n + 1$ elements from T . In this case, the permutation can be chosen so that the group, generated by it, is contained in $SO(n)$.*

Proposition 7. *The set C of vertices of the hypercube in \mathbb{E}^n with a metric induced from \mathbb{E}^n is isometric to the commutative group $(\mathbb{Z}_2)^n$ with a bi-invariant metric.*

Corollary 2. *The metric spaces T and C are CW-homogeneous.*

The following theorem can be proved with the help of Theorem 3, Proposition 6 and results from the book by Wolf [13].

Theorem 4. *An indecomposable finite CW-homogeneous subspace M of Euclidean space \mathbb{E}^n is isometric to a finite group G with a bi-invariant metric if and only if one of the following conditions holds:*

- 1) $|M| = 2$, $n = 1$, G is a cyclic group of order 2;
- 2) M is an orbit of a cyclic group G of rotations of the space \mathbb{E}^2 of any order ≥ 3 ;
- 3) M is an orbit of a binary dihedral or a binary polyhedral subgroup of the multiplicative group of unit quaternions $Sp(1) \subset \mathbb{H} = \mathbb{E}^4$ in \mathbb{E}^4 ;
- 4) $M = T$ from Proposition 6 and $|T| \geq 5$ is a prime number.

Then we define and study a special construction that allows us to build new metric spaces of special type from given metric spaces.

Definition 8. *Let two finite metric spaces (M_1, d_1) and (M_2, d_2) , and*

$$d_2(y_1, y_2) \leq 2d_1(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in M_1, x_1 \neq x_2, \forall y_1, y_2 \in M_2. \quad (3)$$

The blowup of (M_1, d_1) by (M_2, d_2) is the metric space (M, d) , where $M = M_1 \times M_2$ and

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) \quad \text{if } x_1 \neq x_2; \quad d_2(y_1, y_2) \quad \text{if } x_1 = x_2. \quad (4)$$

The metric d will be denoted by $d_1 \times_b d_2$.

Note that the triangle inequality for such a defined metric follows from the condition (3), which is satisfied only for certain classes of metric spaces.

For an arbitrary isometry $\varphi \in \text{Isom}(M_1, d_1)$ and an arbitrary mapping $\psi : M_1 \rightarrow \text{Isom}(M_2, d_2)$, we define the map $f : M \rightarrow M$ as follows:

$$f(x, y) = (\varphi(x), \psi(x)(y)), \quad x \in M_1, y \in M_2. \quad (5)$$

The following lemma holds.

Lemma 1. *The map (5) is an isometry of the metric space $(M = M_1 \times M_2, d = d_1 \times_b d_2)$.*

For an arbitrary finite metric space (M, d) , it can be useful to consider the set of distances between different points of M :

$$Dist(M, d) = \{d(x, y) \mid x, y \in M, x \neq y\}. \quad (6)$$

Sometimes the set of isometries $Isom(M, d)$ is exhausted by isometries of the form (5).

Proposition 8. *Suppose that the sets of distances (1) for metric spaces (M_1, d_1) and (M_2, d_2) satisfy the condition*

$$Dist(M_1, d_1) \cap Dist(M_2, d_2) = \emptyset.$$

Then every isometry $f \in Isom(M, d)$ has the form (5) for some $\varphi \in Isom(M_1, d_1)$ and $\psi : M_1 \rightarrow Isom(M_2, d_2)$.

For our purposes, the following theorem plays an important role.

Theorem 5. *Let a metric space (M, d) be obtained as the blowup of (M_1, d_1) by (M_2, d_2) . Then the following assertions are fulfilled:*

1) *If the metric spaces (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, are homogeneous, then (M, d) is also homogeneous.*

2) *If the metric spaces (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, are normal homogeneous, then (M, d) is also normal homogeneous.*

3) *If the metric spaces (M_i, d_i) , $i = 1, 2$, are Clifford–Wolf homogeneous, then (M, d) is also Clifford–Wolf homogeneous.*

Example 2. *Let (M_1, d_1) , (M_2, d_2) be metric spaces such that $Dist(M_1, d_1) = \{1\}$, $Dist(M_2, d_2) = \{\sqrt{2}\}$, $|M_1| = n$, $n \geq 3$; $|M_2| = 2$. Then the blowup of (M_1, d_1) by (M_2, d_2) is isometric to the set of vertices of a regular hyperoctahedron (cocube) in \mathbb{E}^n with the metric induced from \mathbb{E}^n .*

Corollary 3. *The set of vertices of a regular hyperoctahedron (cocube) in \mathbb{E}^n with the metric induced from \mathbb{E}^n is Clifford–Wolf homogeneous.*

Remark 8. *Note that the metric space formed by the vertices of a regular hyperoctahedron in \mathbb{E}^n is indecomposable. Therefore, the blowup operation of metric spaces can lead to indecomposable spaces. So, it is fundamentally different from the direct product operation.*

Let us consider some $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n/2$. The Kneser graph $KG_{n,k} = (V, E)$ is a graph whose vertices are all k -element subsets of the set \mathbb{Z}_n (or any other n -element set), and the edges are pairs of such subsets with empty intersection, i. e. $V = \{A \subset \mathbb{Z}_n \mid |A| = k\}$ and $E = \{\{A, B\} \mid A, B \in V, A \cap B = \emptyset\}$. It is clear that $|V| = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Note that for $k = 1$ we obtain the complete graph K_n , for $k = n/2$ the Kneser graph is a perfect matching, $KG_{5,2}$ is the Petersen graph. A survey on the results related to Kneser graphs can be found in [14], Chapter 7.

For a given Kneser graph $KG_{n,k} = (V, E)$ with $k \geq 2$, we define a finite metric space $(M = V, d)$ with $|Dist(M, d)| = 2$. Consider some positive numbers $\alpha_1 \neq \alpha_2$ such that $\alpha_1 < 2\alpha_2 < 4\alpha_1$ and define the metric $d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2}$ as follows: $d(A, B) = \alpha_1$ for $A \cap B = \emptyset$ and $d(A, B) = \alpha_2$ for $A \cap B \neq \emptyset$ ($A, B \in V, A \neq B$).

Note that for $k = n/2$ we get exactly the metric spaces considered in Example 5. These spaces are Clifford–Wolf homogeneous. In what follows we suppose that $2 \leq k < n/2$, in particular, $n \geq 5$.

It is well known that the automorphism group of the graph $KG_{n,k}$ for $k < n/2$ coincides with the group $S(n)$ of all permutations of the set \mathbb{Z}_n (see Corollary 7.8.2 in [14]). Therefore, $S(n)$ is the full isometry group of the metric space $(M = V, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$: every permutation $\psi \in S(n)$ generates the isometry $i_\psi : V \rightarrow V$, acting by the formula

$$i_\psi(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = \{\psi(a_1), \psi(a_2), \dots, \psi(a_k)\}. \quad (7)$$

In particular, all such spaces are homogeneous (and the graphs $KG_{n,k}$ are vertex-transitive).

We agree to write the symbol $(b_0 b_1 b_2 \dots b_{l-2} b_{l-1})$ for the cycle (the permutation), moving every element b_i to b_{i+1} for all indices $i \in \mathbb{Z}_l$, the length of the cycle p (number of elements involved in the cycle) will be denoted by $|p|$. Note that we consider only cycles of length ≥ 2 (the formally considered cycle of length one leaves all points fixed).

Proposition 9. *The metric space $(M = V, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$ is normal homogeneous if and only if $\alpha_1 > \alpha_2$.*

Proposition 10. *Let f be a non-trivial Clifford–Wolf translation on the metric space $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, that is generated by a permutation $\psi \in S(n)$ according to (7). Then the following assertions hold:*

- 1) *The isometry f shifts all points the distance α_2 ;*
- 2) *For a decomposition of ψ into a product of cycles $p_1 p_2 \dots p_s$, the inequality $k > \sum_{i=1}^s \lfloor |p_i|/2 \rfloor$ holds, where $\lfloor \cdot \rfloor$ means the integer part of a number.*
- 3) *There is no sequence of indices $\{i_j\}$, $j = 1, \dots, u$ ($0 \leq u \leq s$), and a number l , $0 \leq l \leq n - \sum_{i=1}^s |p_i|$, such that $\sum_{j=1}^u |p_{i_j}| + l = k$.*

Moreover, if the permutation $\psi \in S(n)$ satisfies conditions 2) and 3), then the isometry i_ψ , generated by it, is a Clifford–Wolf translation.

Since according to the Proposition 10, two points at the distance α_1 are not translated into each other by any Clifford–Wolf translation, we get.

Corollary 4. *The metric space $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, $n/2 > k \geq 2$, is not Clifford–Wolf homogeneous.*

Using more difficult argument, we obtain the following Corollaries.

Corollary 5. *If $k = 2$, then the metric space $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, $n \geq 5$, admits no nontrivial Clifford–Wolf translation.*

Corollary 6. *If $k = 3$, then the metric space $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, $n \geq 7$, admits a non-trivial Clifford–Wolf translation only for $n = 7$, and any such translation is generated by a permutation $\psi \in S(7)$, which is a cycle of length 5.*

There are infinitely many values of k for which there are spaces $(M = V, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$ with nontrivial CW-translations:

Corollary 7. *Let $n = 3m$, where $m \geq 3$ and $m \not\equiv -1 \pmod{3}$, and $k = m + 1$. Then any permutation $\psi \in S(n)$, representable as a product of m cycles of length 3, is a Clifford–Wolf translation the distance α_2 on the metric space $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$.*

Problem 2. *Classify the metric spaces $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, admitting non-trivial Clifford–Wolf translations.*

The following result proves the existence of finite strongly generalized normal homogeneous metric spaces that are not Clifford–Wolf homogeneous.

Theorem 6. *The metric space $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, $\alpha_1 > \alpha_2$, is a strongly generalized normal homogeneous for $(n, k) = (7, 3)$ and for $(n, k) = (3m, m + 1)$, where $m \geq 3$ and $m \not\equiv -1 \pmod{3}$.*

Theorem 6 and Corollary 4 immediately imply

Corollary 8. *There are finite strongly generalized normal homogeneous metric spaces that are not Clifford–Wolf homogeneous.*

Problem 3. *Classify the metric spaces $(M, d = d_{n,k,\alpha_1,\alpha_2})$, that are strongly generalized normal homogeneous.*

Problem 4. *Find a finite metric space of (M, d) of the smallest cardinality, that is strongly generalized normal homogeneous, but not Clifford–Wolf homogeneous.*

Theorem 6 gives an example of such a space of cardinality 35.

Definition 9. *Let (M, d) be a finite homogeneous metric space that is not isometric to the set of vertices of a regular simplex, 1 is the minimal nonzero distance between points from (M, d) . By definition, the set of vertices $V(\Gamma)$ of a local graph $\Gamma = \Gamma(O, O')$ of the space (M, d) on the vertices $O, O' \in M$ is the union of two spheres $S(O, 1) \cup S(O', 1) \subset M$ of radius 1 with centers O and O' , where $d(O, O') = 1$; vertices $v, w \in V(\Gamma)$ connected by an edge $\in R = R(\Gamma)$ if and only if $d(v, w) = 1$.*

The following proposition is obvious.

Proposition 11. *Let ψ be a CW-translation, respectively, δ -shift at a vertex O of (M, d) and $\psi(O) = O'$. Then $\psi(S(O, 1)) = S(O', 1)$, $\psi(R(S(O, 1))) = R(S(O', 1))$ and $(v, \psi(v)) \in R$ if $v \in S(O, 1)$, respectively, $(v, \psi(v)) \in R$ or $\psi(v) = v$ if $v \in S(O, 1)$.*

Using this Proposition, we prove the following results.

Theorem 7. *The set of vertices (M, d) of a regular dodecahedron in \mathbb{E}^3 is not generalized normal homogeneous, therefore, is not strongly generalized normal homogeneous and is not CW-homogeneous.*

Remark 11. *Non-zero distances between the vertices of a regular dodecahedron can take five different values, more precisely, the five realizable distances between the vertices are in proportion $2/(\sqrt{5} + 1) : 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : 2/(\sqrt{5} - 1)$.*

Theorem 8. *The set of vertices (M, d) of a regular icosahedron in \mathbb{E}^3 is generalized normal homogeneous, but not strongly generalized normal homogeneous, and, therefore, is not CW-homogeneous.*

Theorem 9. *The set of vertices of each semi-regular Euclidean polyhedron in \mathbb{E}^3 (Archimedean solid) is a homogeneous, but not a generalized normal homogeneous metric space.*

Further we will need the following result.

Theorem 10. [13], [15] *Each finite subgroup of the group $SO(3)$ is the cyclic, the dihedral, the tetrahedral, the octahedral or the icosahedral group. The orders of the last three groups are 12, 24 and 60 respectively. If two finite subgroups of the group $SO(3)$ are isomorphic, then they are conjugate in $SO(3)$.*

Corollary 9. *The orders of finite subgroups of the group $O(3)$ that are not contained in $SO(3)$ and contain the tetrahedral, the octahedral or the icosahedral group, are respectively 24, 48 and 120.*

Theorem 11. *The vertex sets of all regular (Platonic) and semi-regular (Archimedean) polyhedra in \mathbb{E}^3 with induced metrics, except for the octahedron, the dodecahedron and the icosododecahedron, admit simply transitive isometry groups that are finite subgroups of the group $SO(3)$ or the group $O(3)$. Moreover, such groups are subgroups of $SO(3)$ if polyhedra are different from the cube, the rhombocuboctahedron and the rhomboicosododecahedron. In addition, except for the case of the tetrahedron and the cube, the corresponding metrics on groups are left-invariant, but not bi-invariant.*

Corollary 10. *All inclusions in Theorem 1 are strict.*

This work was supported by the fundamental research program. SB RAS No. I.1.2., Project No. 0314-2016-0006.

References

1. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *Clifford–Wolf homogeneous Riemannian manifolds*// J. Differ. Geom. – 2009. –V. 82. –№ 3. –P. 467–500.
2. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. *Generalized normal homogeneous Riemannian metrics on spheres and projective spaces*// Ann. Global Anal. Geom. – 2014. –V. 45. –№ 3. –P. 167–196.
3. Berestovsky V. ; N., Nikonorov Yu. G. *Riemannian manifolds and homogeneous geodesics.* – Vladikavkaz: UMI VSC RAS and RSO-A, 2012. – 414 c. (in Russian)
4. Berger M. *Geometry, Universitext* – Berlin: Springer-Verlag, 2009.
5. Wenninger M.J. *Polyhedron models* – London–New York: Cambridge University Press, 1971.
6. Harary F. *Graph theory* – Reading, Mass. – Menlo Park Calif. – London: Addison - Wesley Publishing Co., 1969.
7. Babai L. *Symmetry groups of vertex-transitive polytopes*// Geometriae Dedicata – 1977. –V. 6. –№ 3. –P. 331–337.
8. Kutnar K., Marušič D. *Recent trends and future directions in vertex-transitive graphs*// Ars Math. Contemp. – 2008. –V. 1. –№ 2. –P. 112–125.
9. Grossman I., Magnus W. *Groups and their graphs* –New York: Random House; The L. W. Singer Co., 1964.
10. Berestovskii V. N., Guijarro L. *A metric characterization of Riemannian submersions*// Ann. Global Anal. Geom. – 2000. –V. 18. –№ 6. –P. 577–588.
11. Avgustinovich S., Fon-Der-Flaass D. *Cartesian products of graphs and metric spaces*// European J. Combin. – 2000. –V. 21. –№ 7. –P. 847–851.
12. Kurosh A. G. *The theory of groups. Second English edition, 2 volumes* – New York: Chelsea Publishing Co., 1960.
13. Wolf G. A. *Spaces of constant curvature. Sixth edition* –Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2011.
14. Godsil C., Royle G. *Algebraic graph theory* – New York: Springer-Verlag, 2001.
15. Cromwell P. R. *Polyhedra* –Cambridge: Camb. Univ. Press, 1997.

КОНЕЧНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В.Н. Берестовский, Ю.Г. Никоноров

Мы изучаем класс конечных однородных метрических пространств и некоторые его важные

подклассы, обладающие естественными определениями в терминах метрик и хорошо изученными аналогами в классе римановых многообразий. Изучаются отношения между этими классами. Построены примеры соответствующих пространств, некоторые из которых — множества вершин специальных выпуклых многогранников в евклидовых пространствах. Дается описание изучаемых классов в терминах теории графов, с помощью которого построены примеры конечных метрических пространств с необычными свойствами.

Ключевые слова: вершинно-транзитивный граф, граф Кнезера, конечное (нормальное) однородное метрическое пространство, конечное однородное по Клиффорду-Вольфу метрическое пространство, (полу)правильный многогранник

УДК 514.765

ГЕОМЕТРИЯ ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ \mathbb{R} -ДЕРЕВЬЕВ

А.И. Булыгин¹

¹ alexey.buligin@gmail.com; Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

Изучается класс подобно однородных \mathbb{R} -деревьев, в частности приведен пример построения вертикального \mathbb{R} -дерева. Рассмотрены его свойства.

Ключевые слова: подобно однородное пространство, \mathbb{R} -дерево, маршруты, радиус полноты

В 1924 году П.С. Урысон сделал заметку в которой рассмотрел возможность построения метрического пространства не локально сепарабельного всюду [1]. Характеризацию пространств данного типа А.Д. Александров провел в 1955 году [2]. И только в 1977 году Ж. Титс ввел понятие \mathbb{R} -дерева (см. [3]), о котором по сути и упоминалось в заметке П.С. Урысона.

В данной работе изучается геометрия подобно однородных \mathbb{R} -деревьев, что в частности является продолжением исследований В.Н. Берестовского (см. [4,5]). Классификация вертикальных и строго вертикальных \mathbb{R} -деревьев была приведена автором в работе [6].

Определение. Под отрезком в X с концами $x, y \in X$ понимается образ в X числового отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом вложении $i : [a, b] \rightarrow X$, при котором $i(a) = x$ и $i(b) = y$. Пространство X называется геодезическим, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить отрезком.

Определение. Пространство X называется подобно однородным, если для любых точек $x, y \in X$ существует подобие φ , переводящее x в $\varphi(x) = y$. Если для любых $x, y \in X$ существует изометрия φ , переводящая x в y , пространство X называется однородным.

Определение. Пространство X называется локально полным, если для любой точки $x \in X$ определено число $r > 0$, для которого замкнутый шар $B(x, r)$ полон в метрике d . Точная верхняя грань радиусов r , для которых шар $B(x, r)$ полон, называется радиусом полноты в точке x . Для радиуса полноты в [4] принято обозначение $c(x)$. Если $c(x_0) = +\infty$ хотя бы в одной точке $x_0 \in X$, то пространство X полное и $c(x) = +\infty$ во всех точках $x \in X$.

Теорема. (см. [4]) *Локально полное подобно однородное пространство X однородно тогда и только тогда, когда оно полно.*

Далее рассматриваются исключительно подобно однородные пространства, не являющиеся однородными, поэтому функция $c(x)$ всюду конечна.

Определение. *Непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется пилообразной, если*

1. f не является постоянной ни на каком интервале $(c, d) \subset [a, b]$;
2. из того, что f монотонна на интервале $(c, d) \subset [a, b]$ следует, что $f|_{(c,d)}$ — линейная функция с угловым коэффициентом ± 1 .

Определение. *Пусть (Y, d) — локально полное подобно однородное неоднородное \mathbb{R} -дерево. Оно называется вертикальным, если на каждом отрезке $[xy]$, параметризованном натуральной параметризацией $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ так, что $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$, функция радиуса полноты $c(\gamma(t))$ является пилообразной.*

Для построения примера вертикального \mathbb{R} -дерева будем рассматривать X , как лабиринт с одним входом и множеством выходов. При этом каждая точка в X отождествляется с маршрутом, ведущим в неё из входа, а также существует экзит-маршрут, который ведет из заданной точки к одному из выходов. Дадим точные определения.

Определение. *Пусть задана группа G с единицей e . Рассмотрим пары функций (f, φ) , для которых выполнены следующие условия.*

1. *Функция $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ — пилообразная, причём*
 - (1a) $f(0) = 0$ и $f(t) > 0$ при $t \in (0, a]$;
 - (1b) существует такое $\delta > 0$, что $f(t) = t$ при всех $t \in [0, \delta]$.
2. *Функция φ определена на открытом (в топологии полуинтервала $[0, a)$) подмножестве $A \subset [0, a)$ полной меры Лебега, то есть $\mu_L([0, a) \setminus A) = 0$, и действует в G , причём*
 - (2a) φ постоянна на связных подмножествах, то есть если $[\alpha, \beta] \subset A$, то $\varphi|_{[\alpha, \beta]} = \text{const}$;
 - (2b) $0 \in A$ и $\varphi(0) = e$. Отсюда следует, что $[0, \sigma) \subset A$ для некоторого $\sigma > 0$ и $\varphi(t) = e$ для всех $t \in [0, \sigma)$. Далее будем считать, что выполняется равенство $\sigma = \delta$.

Всякую такую пару функций будем называть маршрутом на базе группы G . Число a при этом — длина маршрута. Если задан маршрут $M = (f, \varphi)$ длины a , то компонента f связана с радиусом полноты на X : в точке, определяемой маршрутом M длины a , радиус полноты равен $f(a)$, а компонента φ задаёт ветвление.

Если в условии (1a) неравенство $f(a) > 0$ заменить равенством $f(a) = 0$, а остальные условия оставить неизменными, то получим понятие экзит-маршрута. К экзит-маршрутам отнесём также нулевой экзит-маршрут $M_0 = (f_0, \varphi_0)$, длина которого равна нулю.

Далее в качестве основного множества X принимается множество всевозможных маршрутов на базе G . В начале, необходимо показать, что маршруты ведущие в одну точку эквивалентны.

Определение. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a , функция φ определена на множестве $A \subset [0, a)$. Точка $s \in [0, a) \setminus A$ называется дырой, если $\varphi|_{(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap A} = \text{const}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Лемма. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a . Тогда существует единственный маршрут $\hat{M} = (f, \hat{\varphi})$ без дыр, полученный из M заполнением дыр.

Определение. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a . Будем говорить, что он имеет возвращение на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h] \subset [0, a]$, если для любого $s \in (0, h)$ выполняются условия: $f(t_0 - s) = f(t_0 + s)$ и $\varphi(t_0 - s) = (\varphi(t_0 + s))^{-1}$. Возвращение называется элементарным, если f на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ имеет единственный локальный экстремум в точке t_0 , а φ постоянна на интервале $(t_0 - h, t_0)$ (а следовательно и на интервале $(t_0, t_0 + h)$).

Определение. Пусть $M = (f, \varphi)$ — маршрут длины a , имеющий возвращение на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ и $\bar{M} = (\bar{f}, \bar{\varphi})$ — маршрут длины $a - 2h$. Будем говорить, что \bar{M} получен из M удалением возвращения на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, если $\bar{f}|_{[0, t_0-h]} = f|_{[0, t_0-h]}$, $\bar{\varphi}|_{[0, t_0-h]} = \varphi|_{[0, t_0-h]}$ и при $t \in (t_0 - h, a - 2h)$ выполняются равенства $\bar{f}(t) = f(t + 2h)$ и $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t + 2h)$. Будем говорить, что маршрут \bar{M} получен из M удалением возвращений, если он получен за некоторое, не более чем счётное, число шагов.

Лемма. Пусть маршрут (экзит-маршрут) $M = (f, \varphi)$ имеет элементарные возвращения на отрезках $[u_1, v_1]$ и $[u_2, v_2]$, причём $[u_1, v_1] \cap [u_2, v_2] = [u_2, v_1]$. Тогда

1. $\frac{1}{2}(u_1 + v_1) \leq u_2$ и $v_1 \leq \frac{1}{2}(u_2 + v_2)$;
2. для любого $h \in [0, v_1 - u_2]$ часть маршрута M на отрезке $[u_1 + h, u_2 + v_2 - v_1 + h]$ может быть удалена методом удаления двух элементарных возвращений;
3. результат удаления отрезка $[u_1 + h, u_2 + v_2 - v_1 + h]$ не зависит от h и от порядка, в котором выполняются удаления элементарных возвращений на нём.

В итоге, под удаляющей процедурой для множества P понимается счётная последовательность операций, состоящих в заполнении дыр или удалении возвращений, в результате которой все внутренние точки P оказываются удалёнными.

Определение. Экзит-маршрут $M = (f, \varphi)$ называется стягиваемым, если он может стать нулевым экзит-маршрутом после выполнения некоторой удаляющей процедуры.

Теперь сформулируем основную теорему о возвращениях на маршрутах.

Теорема. Для любого маршрута M существует единственный маршрут \bar{M} без дыр и возвращений, который совпадает с M или получен из M выполнением удаляющей процедуры.

Далее на множестве X вводится метрика d , по отношению к которой X является вертикальным \mathbb{R} -деревом. В силу приведенной выше теоремы, можно рассматривать только маршруты без дыр и без возвращений, считая маршруты ведущие в одну и ту же точку X эквивалентными.

В начале определим на X частичный порядок. Будем говорить, что маршрут $\hat{M} = (\hat{f}, \hat{\varphi})$ длины \hat{a} предшествует маршруту $M = (f, \varphi)$ длины a и обозначать $\hat{M} \leq M$, если $\hat{a} \leq a$, $f|_{[0, \hat{a}]} = \hat{f}$.

Теорема. *Частично упорядоченное множество (X, \leq) является нижне-полулинейной \wedge -полурешёткой.*

В соответствии с результатами представленными П.Д. Андреевым в работе [7] получаем, что

Лемма. *Пространство (X, d) является геодезическим.*

Следствие. *Пространство (X, d) является \mathbb{R} -деревом.*

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы показать, что \mathbb{R} -дерево X является локально полным и подобно однородным.

Теорема. *\mathbb{R} -дерево X локально полно, причём радиус полноты в точке, задаваемой маршрутом $M = (f, \varphi)$ длины a , равен $c(M) = f(a)$.*

Рассмотрим группу $\text{Sim}(X)$ подобий пространства X и её подгруппу $\text{Isom}(X)$ движений с тем, чтобы показать подобную однородность X .

В первую очередь определим на X группу гомотетий. Гомотетией пространства X с коэффициентом $k > 0$ будем называть отображение $h_k : X \rightarrow X$, действующее по следующему правилу. Пусть дан маршрут $M = (f, \varphi)$ длины a . Функция φ задана на множестве $A \subset [0, a]$. Тогда $h_k(M)$ определяется как маршрут $M_k = (f_k, \varphi_k)$ длины $k \cdot a$, в котором

1. $f_k(t) = k \cdot f(t/k)$ при всех $t \in [0, k \cdot a]$;
2. Область определения A_k функции φ_k определена условием $t \in A_k$ тогда и только тогда, когда $t/k \in A$;
3. $\varphi_k(t) = \varphi(t/k)$ при всех $t \in A_k$.

Для определения подгруппы Γ в $\text{Isom}(X)$, которая транзитивно действует на множестве $X_1 = c^{-1}(1)$, необходимо ввести следующую операцию над маршрутами.

Определение. *Пусть даны два маршрута $M_1 = (f_1, \varphi_1), M_2 = (f_2, \varphi_2) \in X$ длин a_1 и a_2 соответственно, A_1, A_2 — области определения функций φ_1 и φ_2 . Их конкатенацией будем называть маршрут $M = M_1 \oplus M_2$.*

Теорема. *Множество $X_1 = c^{-1}(1) \subset X$ по отношению к операции \oplus является группой.*

Далее показано, что группа $\text{Isom}(X)$ действует на $X_1 \subset X$ транзитивно и получен следующий результат.

Теорема. *Пространство X является локально полным подобно однородным неоднородным \mathbb{R} -деревом. При этом X вертикально, но не строго вертикально.*

Литература

1. Урысон П. С. *Пример метрического пространства, нигде не удовлетворяющего второй аксиоме счетности* // Труды по топологии и другим областям математики. Т. II. М. – Л.: Гостехиздат. – 1951. – С. 778–780.
2. Alexandrov A. D. *On a generalization of Riemannian geometry* // Berlin: Jahresber. Humb. Univ. – 1955.
3. Tits J. A “theorem of Lie-Kolchin” for trees // New York: Contributions to Algebra, Academic Press. – 1977. – P. 377–388.
4. Берестовский В. Н. *Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 11. – С. 3–22.
5. Берестовский В. Н. *Об \mathbb{R} -дереве Урысона* // Сиб. матем. журнал. – 2019. – 60:1. – С. 10–19.
6. Andreev P. D., Bulygin A. I. *On the Vertical Similarly Homogeneous \mathbb{R} -Trees* // Lobachevskii J. Math. – 2019. – 40 (2). – P. 127–139.
7. Андреев П. Д. *Полулинейные метрические полурешетки на \mathbb{R} -деревьях* // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 6. – С. 3–13.

GEOMETRY OF SIMILARLY HOMOGENEOUS \mathbb{R} -TREES

A.I. Bulygin

A class of similarly homogeneous \mathbb{R} -trees is studied, in particular, an example is given of constructing a vertical \mathbb{R} -tree. Considered its properties.

Keywords: similarly homogeneous space, \mathbb{R} -tree, routes, completeness radius

УДК 514.76

ПЛОСКИЕ ПОЛУ-МЕТРИЧЕСКИЕ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ НА СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С.В. Галаев¹

¹ *sgalaev@mail.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Кососимметрической N -связностью на субримановом многообразии M контактного типа называется полу-метрическая N -связность ∇^N с кососимметрическим кручением. Задание на субримановом многообразии полу-метрической N -связности эквивалентно заданию пары (∇, N) , где ∇ – внутренняя метрическая связность, $N : D \rightarrow D$ – эндоморфизм распределения D . Полу-метрическая N -связность с кососимметрическим кручением на субримановом многообразии определена однозначно и является метрической тогда и только тогда, когда структурное поле $\vec{\xi}$ киллингово. Доказывается, что метрическая N -связность плоская тогда и только тогда, когда тензор Схоутена субриманова многообразия обращается в нуль и $\nabla N = 0$.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, внутренняя связность, плоская полу-метрическая связность с кососимметрическим кручением, тензор Схоутена

1. Введение. Субримановым многообразием контактного типа называется гладкое многообразие M , оснащенное субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g)$, где η

и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp . Субриманово многообразие нечетной размерности, оснащенное дополнительно эндоморфизмом $\varphi : D \rightarrow D$ таким, что $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$, называется почти контактным метрическим многообразием. Для удобства изложения материала мы с самого начала рассматриваем субриманово многообразие нечетной размерности. Если почти контактное метрическое многообразие представляет собой интерес как обобщение поверхности эрмитова пространства, то мотивация к исследованию субриманова многообразия вызвана необходимостью построения математических моделей в задачах теории управления и неголономной механики. Различие в происхождении почти контактных метрических многообразий и субримановых многообразий проявляется в выборе связностей, задающих параллельный перенос на многообразиях. Для почти контактных метрических многообразий, образующих специальный класс римановых многообразий, естественным является выбор связности Леви-Чивита. В геометрии субримановых многообразий используются связности, обеспечивающие параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В настоящей работе такие связности определяются парой (∇, N) , где ∇ – внутренняя метрическая связность, а $N : D \rightarrow D$ – эндоморфизм распределения D , называемый в работе структурным эндоморфизмом.

В настоящей работе на субримановом многообразии контактного типа M наряду со связностью Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ рассматривается N -связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением S . Здесь $N : TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм, определяемый равенством $N\vec{x} = S(\vec{\xi}, \vec{x})$. Мотивация к изучению N -связности подкрепляется богатыми приложениями римановых многообразий со связностями с кручением в теоретической физике. Особый интерес представляют связности с кососимметрическим кручением. Известно, что метрическая связность с кососимметрическим кручением имеет те же геодезические, что и связность Леви-Чивита. В настоящей работе доказывается, что на субримановом многообразии существует единственная N -связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением S , которая метрическая тогда и только тогда, когда выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 0$. Доказывается, что эта связность единственна. Находится соответствующий ей эндоморфизм. Отдельно рассматривается случай N -связности с нулевым тензором кривизны. Доказывается, что полу-метрическая N -связность с кососимметрическим кручением, заданная на субримановом многообразии контактного типа, является плоской тогда и только тогда, когда тензор Схоутена субриманова многообразия обращается в нуль и $\nabla N = 0$.

2. Определение и основные свойства полу-метрической N -связности с кососимметрическим кручением. Пусть M – гладкое многообразие размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp . Нечетная размерность многообразия выбрана исключительно для удобства без дополнительных рассуждений о размерности переходить к многообразиям с почти контактной метрической структурой.

Известно [1, 2], что на субримановом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\vec{x}}g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

где $P : TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$.

Пусть $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n-1$) – карта многообразия M , адаптированная к распределению D [3, 4]. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают систему $D : D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^\alpha, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ – ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивита субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \tilde{\Gamma}_{an}^b = \Gamma_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \tilde{\Gamma}_{na}^n = \Gamma_{nn}^a = 0,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), \psi_a^b = g^{bc} \omega_{ac}, C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}, C_a^b = g^{bc} C_{ac}.$$

Предложение 2. Пусть $N : TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения субриманова многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии M существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S(\vec{x}, \vec{y})$, однозначно определяемая следующими условиями:

- 1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Определим в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты связности $\nabla_{\vec{x}}^N$, положив $G_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $G_{na}^b = N_a^b$. Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям предложения 1.

Из предложения 1 следует, что $\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Последнее замечание подтверждает целесообразность назвать связность ∇^N полу-метрической.

Положим $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g(S(\vec{x}, \vec{y}), \vec{z})$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in TM$. В адаптированных координатах возможно ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ будут иметь следующий вид:

$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 2\omega_{ab}, \tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b), \tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b).$$

Как видно из полученных равенств, тензор $S(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$ или, $2\omega_{ab} = g_{bc} N_a^c$. Отсюда получаем $N_a^c = 2g^{cb} \omega_{ab}$. Таким образом, в силу равенства $\psi_a^b = g^{bc} \omega_{ac}$ окончательно получаем: $N_a^c = 2\psi_a^c$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Полу-метрическая линейная связность ∇^N , заданная на субримановом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = 2\psi$.

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N выполняется условие $N = 2\psi$.

Теорема 2. Линейная связность ∇^N , заданная на субримановом многообразии, метрическая тогда и только тогда, когда $L_{\vec{x}} g = 0$.

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $\nabla_c^N g_{ab} = 0$. Вычислим $\nabla_n^N g_{ab}$.
Имеем:

$$\nabla_n^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - 2\psi_a^c g_{cb} + 2\psi_b^c g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2g^{cd} \omega_{da} g_{cb} + 2g^{cd} \omega_{db} g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab} + 2\omega_{ba} = \partial_n g_{ab}.$$

Будем полагать в дальнейшем, что ∇^N – метрическая связность с эндоморфизмом $N = 2\psi$.

Пусть $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in TM$ тензор кривизны связности ∇^N .

Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Имеем: $K_{abc}^d = R_{abc}^d$, $K_{anc}^d = \nabla_a N_c^d$.

Здесь $R_{abc}^d = 2\tilde{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e$ – компоненты тензора кривизны Схоутена [3, 5], определяемого равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}], \quad Q = 1 - P.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Полу-метрическая N -связность с кососимметрическим кручением, заданная на субримановом многообразии контактного типа, является плоской тогда и только тогда, когда тензор Схоутена субриманова многообразия обращается в нуль и $\nabla N = 0$.*

Литература

1. Bukusheva A. V., Galaev S. V. *Almost contact metric structures defined by connection over distribution* // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. – 2011. – Vol. 4. – no 2. – P. 13–22.
2. Букушева А. В., Галаев С. В. *Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – 2017. – № 48. – С. 32–41.
3. Букушева А. В., Галаев С. В. *Связности над распределением и геодезические пульверизации* // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2013. – №4. – С. 10–18.
4. Букушева А. В., Галаев С. В. *О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию* // Математика. Механика. – 2005. – № 7. – С. 12–14.
5. Букушева А. В., Галаев С. В. *Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12. – №. 3. – С. 17–22.

FLAT HALF-METRIC SKEW-SYMMETRIC CONNECTIONS ON SUB-RIEMANNIAN MANIFOLDS

S.V. Galaev

A skew-symmetric N -connection on a sub-Riemannian manifold M of contact type is called a half-metric N -connection ∇^N with a skew-symmetric torsion. The assignment of a half-metric N -connection on a sub-Riemannian manifold is equivalent to the assignment of a pair (∇, N) , where ∇ is an interior metric connection, $N : D \rightarrow D$ is an endomorphism of the distribution D . A half-metric N -connection with a skew-symmetric torsion on a sub-Riemannian manifold is defined uniquely and is metric if and only if the structural field $\tilde{\xi}$ is a Killing field. It is proved that a metric N -connection is flat if and only if the Schouten tensor of the sub-Riemannian manifold is zero and $\nabla N = 0$.

Keywords: sub-Riemannian manifold of contact type, interior connection, flat half-metric connection with skew-symmetric torsion, Schouten tensor

УДК 514.762; 514.82

О ГЕОМЕТРИИ РАССЛОЕННЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т.А. Гончар¹, Е.И. Яковлев²

¹ *gonchar.t.a@yandex.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

² *eyakovlev@hse.ru*; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" Факультет информатики, математики и компьютерных наук

Исследуются связи между геометрическими свойствами расслоенных псевдоримановых многообразий и их баз. Основное внимание уделяется лоренцевым многообразиям и условиям причинности.

Ключевые слова: главное расслоение, G-связность, лоренцево многообразие, пространство-время, условие причинности.

Геометрия расслоенных многообразий имеет многочисленные применения. Например, собственно римановы многообразия такого типа оказались полезными при изучении динамики механических систем с гироскопическими силами, для которых функционал действия многозначен [1]–[3]. Расслоенные лоренцевы многообразия применяются в теоретической физике при построении моделей типа Калуцы-Клейна. С их помощью также оказалось возможным исследование двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа [4], [5]. Очевидно, этот список приложений может быть существенно расширен.

В римановой геометрии в целом любая теорема доказывается в предположении о полноте изучаемого многообразия. В глобальной лоренцевой геометрии геодезическая полнота уже не играет такой важной роли. Вместо нее используется целый ряд ограничений, называемых условиями причинности. К тому же, все эти условия допускают физические интерпретации. Поэтому важно иметь как можно больше критериев их выполнения в конкретных ситуациях.

В [6] с этой целью рассмотрен важный класс многообразий, являющихся искривленными произведениями $(E, g) = (B, h) \times_f (G, \gamma)$ лоренцевых многообразий (B, h) на полные римановы многообразия (G, γ) с искривляющими функциями $f : B \rightarrow \mathbb{R}$. Показано, что многие условия причинности для многообразий (E, g) и (B, h) выполняются или нет одновременно.

Расслоенное лоренцево многообразие (E, g) представляет собой существенно более сложную конструкцию. Но в случае пространственноподобности слоев оно также индуцирует на базе B лоренцеву метрику h . Возникает естественный вопрос: останется ли в этой ситуации справедливым указанный выше результат из книги [6]? Обсуждению этой проблемы и посвящен данный доклад.

Итак, пусть $\xi = (E, p, B, G)$ – гладкое главное расслоение с базой B , тотальным пространством E , проекцией $p : E \rightarrow B$ и структурной группой G . Тогда определено правое действие $R : E \times G \rightarrow E$. Пусть также g – псевдориманова метрика на E , инвариантная относительно действия R , причем любой слой $G_b = p^{-1}(b)$, $b \in B$, расслоения ξ с ограничением g_b метрики g является собственно римановым подмногообразием многообразия (E, g) . Обозначим символом \mathfrak{g} алгебру Ли группы Ли G .

Предложение 1. В указанных условиях псевдориманово многообразии (E, g) индуцирует следующие объекты:

- G -связность H с формой связности ω на пространстве E расслоения ξ ;
- псевдориманову метрику h на базе B ;
- отображение γ , ставящее в соответствие каждой точке $v \in E$ евклидову метрику γ_v на алгебре Ли \mathfrak{g} (левоинвариантную риманову метрику γ_v на структурной группе G).

При этом для любых касательных векторов $\bar{X}, \bar{Y} \in T_v E$ и элементов $P, Q \in \mathfrak{g}$ и $a \in G$ имеют место равенства

$$g(\bar{X}, \bar{Y}) = \gamma_v(\omega(\bar{X}), \omega(\bar{Y})) + p^* h(\bar{X}, \bar{Y}), \quad (1)$$

$$\gamma_{v \cdot a}(P, Q) = \gamma_v(ad(a)P, ad(a)Q). \quad (2)$$

Верно и обратное. Если h – псевдориманова метрика на многообразии B , ω – форма некоторой G -связности H на E и семейство $\{\gamma_v | v \in E\}$ евклидовых метрик на \mathfrak{g} удовлетворяет условию (2), то формула (1) определяет псевдориманову метрику g на E , инвариантную относительно действия группы G . При этом слои расслоения ξ пространственноподобны.

Пусть далее g – лоренцева метрика с сигнатурой $(- + \dots +)$, а \bar{O} – непрерывное времениподобное векторное поле на (E, g) , инвариантное относительно действия R группы G . Тогда \bar{O} проецируется на базу, причем проекция O является непрерывным времениподобным векторным полем на лоренцевом многообразии (B, h) . Если O^* – горизонтальный лифт поля O относительно G -связности H , то \bar{O} и O^* определяют одну и ту же временную ориентацию многообразия (E, g) . Таким образом, без ограничения общности можно считать, что лоренцевы многообразия (E, g) и (B, h) ориентированы во времени векторными полями O^* и O соответственно. При этом (E, g) вместе с ориентацией O^* представляет собой расслоенное пространство-время, а (B, h) с ориентацией O – его базу.

Пример 1. Пусть m, ϵ, κ – положительные числа, $m^2 > \epsilon^2 + \kappa^2$, $r_+ = m + \sqrt{m^2 - \epsilon^2 - \kappa^2}$, $B_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 | |x| > r_+\}$ и $B = \mathbb{R} \times B_3$. Рассмотрим единичную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, ее риманову метрику σ и форму площади Ω . Определены естественные проекции $t: B \rightarrow \mathbb{R}$, $r: B \rightarrow (r_+, \infty)$ и $s: B \rightarrow S^2$. Положим $\Delta = 1 - 2m/r - (\epsilon^2 + \kappa^2)/r^2$, $h = -\Delta(dt \otimes dt) + (dr \otimes dr)/\Delta + r^2\sigma$, $A = \epsilon dt/r$, $F_1 = dA$, $F_2 = \kappa(s^*\Omega)$ и $F = F_1 + F_2$. Тогда лоренцево многообразие (B, h) вместе с временной ориентацией $O = \partial/\partial t$ может интерпретироваться как внешнее пространство-время черной дыры Рейсснера-Нордстрема с массой m , электрическим зарядом ϵ и магнитным зарядом κ , при этом F – форма ее электромагнитного поля [7].

Так как $s: B \rightarrow S^2$ – гомотопическая эквивалентность, то получить нетривиальное главное расслоение с базой B и структурной группой G можно только при $\pi_1(G) \neq 0$. Поэтому выберем $G = U(1)$.

Положим $W = \mathbb{R} \times (r_+, \infty)$ и $E = W \times S^3$. Рассмотрим расслоение Хопфа $\chi = (S^3, q, S^2, G)$ и естественный диффеоморфизм $\alpha : W \times S^2 \rightarrow B$. Определим отображение $p : E \rightarrow B$ формулой $p(w, u) = \alpha(w, q(u))$. Тогда $\xi = (E, p, B, G)$ – главное расслоение.

На E имеется G -связность H с формой кривизны $p^*F/(4\pi k)$. Пусть ω – ее форма связности, $\gamma_0 = dz \otimes dz$ – евклидова метрика на $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ и $f : B \rightarrow (0; +\infty)$ – гладкая функция. Для любой точки $v \in E$ положим $\gamma_v = f(p(v))\gamma_0$. Тогда имеет место (2) и формула (1) определяет инвариантную относительно действия R лоренцеву метрику g на E . Если O^* – горизонтальный лифт векторного поля O относительно связности H , то (E, g) вместе с O^* – расслоенное пространство-время.

Вернемся к общей ситуации. Хронологическое будущее $I^+(v)$ (причинное будущее $J^+(v)$) точки $v \in E$ состоит из точек $w \in E$, для которых существует гладкий направленный в будущее времениподобный (непространственноподобный) путь $x : [0, 1] \rightarrow E$ с началом $x(0) = v$ и концом $x(1) = w$. С помощью путей, направленных в прошлое, аналогично определяются хронологическое прошлое $I^-(v)$ и причинное прошлое $J^-(v)$ точки v . Такой же смысл имеют обозначения $I^+(b)$, $J^+(b)$, $I^-(b)$, $J^-(b)$ для точки b базового пространства-времени (B, h) . Множества вида $I^+(v) \cap I^-(w)$, где $v, w \in E$, образуют базу топологии Александрова многообразия E .

Предложение 2. Для любой точки $v \in E$ и ее проекции $b = p(v) \in B$ справедливы равенства:

$$p(I^+(v)) = I^+(b), \quad p(I^-(v)) = I^-(b), \quad p(J^+(v)) = J^+(b), \quad p(J^-(v)) = J^-(b).$$

Пространство-время (E, g) считается хронологическим, если $v \notin I^+(v)$ для всех $v \in E$. Оно называется причинным, если не содержит различных точек v, w , для которых $w \in J^+(v) \cap J^-(v)$.

Причинное пространство-время (E, g) называется устойчиво причинным, если оно останется причинным при любых достаточно малых возмущениях лоренцевой метрики g . Критерием устойчивой причинности является существование глобальной функции времени $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, которая характеризуется тем, что строго возрастает вдоль каждой направленной в будущее непространственноподобной кривой $x : (\alpha, \beta) \rightarrow E$.

Теорема 1. Для любого расслоенного пространства-времени (E, g) из хронологичности, причинности или устойчивой причинности его базового пространства-времени (B, h) следует, что (E, g) обладает теми же свойствами.

Открытое подмножество $U \subset E$ называется причинно выпуклым, если для произвольной непространственноподобной кривой лоренцева многообразия (E, g) ее пересечение с U либо пусто, либо связно. Пространство-время сильно причинно, если любая его точка обладает базой окрестностей, состоящей из причинно выпуклых множеств. Критерием сильной причинности пространства-времени является совпадение его топологии с топологией Александрова.

Теорема 2. Пусть структурная группа G расслоения $\xi = (E, p, B, G)$ компактна и базовое пространство-время (B, h) сильно причинно. Тогда расслоенное пространство-время (E, g) также сильно причинно.

Сильно причинное пространство-время (E, g) называется глобально гиперболическим, если для любых $v, w \in E$ пересечение $J^+(v) \cap J^-(w)$ либо пусто, либо компактно.

Это понятие также описывается в терминах поверхностей Коши. Пусть $S \subset E$ и для любой непродолжаемой непространственноподобной кривой $x : (\alpha, \beta) \rightarrow E$ найдется, причем единственное $t \in (\alpha, \beta)$ такое, что $x(t) \in S$. Пространство-время глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно содержит поверхность Коши. Согласно [8] поверхность Коши глобально гиперболического пространства-времени можно считать гладким подмногообразием коразмерности 1.

Теорема 3. Пусть G – компактная группа Ли и (B, h) – глобально гиперболическое пространство-время с поверхностью Коши S . Тогда расслоенное пространство-время (E, g) глобально гиперболично, а $S^* = p^{-1}(S)$ – его поверхность Коши.

Таким образом, три из рассмотренных причинных свойств всегда поднимаются с базы на тотальное пространство расслоения ξ , а сильная причинность и глобальная гиперболичность поднимаются при дополнительном ограничении на структурную группу G . Но в приведенных выше результатах из книги [6], посвященных изучению искривленных произведений, утверждалось, что верно и обратное: все эти свойства и проектируются с произведения на базу. Возникает вопрос: распространяется ли это утверждение на случай расслоенного пространства-времени?

Пример 2. Рассмотрим многообразие $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и полярные координаты (r, φ) на B . Тогда $h_0 = -(1/2)(dr \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dr)$ – лоренцева метрика на B , а $O = \partial/\partial r + \partial/\partial \varphi$ – времениподобное векторное поле, задающее временную ориентацию пространства-времени (B, h_0) .

Если $G = \mathbb{R}$, $E = G \times B$ и $p : E \rightarrow B$ – естественная проекция, то четверка $\xi = (E, p, B, G)$ представляет собой главное расслоение со структурной группой G . На E будем использовать координаты (z, r, φ) , где $z \in G$.

Положим $\omega = dz - dr - d\varphi$ и $\gamma_\nu = dz \otimes dz$ для всех $\nu \in E$. Тогда существует G -связность H на E с формой связности ω . Посредством формулы (1) объекты h_0, γ_ν и ω определяют лоренцеву метрику g_0 на E , инвариантную относительно действия группы G . Горизонтальный лифт векторного поля O относительно G -связности H имеет вид $O^* = 2\partial/\partial z + \partial/\partial r + \partial/\partial \varphi$. При этом лоренцево многообразие (E, g_0) вместе с заданным векторным полем O^* временной ориентацией на нем становится расслоенным пространством-временем. Многообразие (B, h_0) с ориентацией O является его базой.

Предложение 3. Расслоенное пространство-время (E, g) глобально гиперболично с поверхностью Коши $S = \{(z, r, \varphi) | z = 0\}$ и глобальной функцией времени $f(z, r, \varphi) = z$. Вместе с тем, его база (B, h) содержит замкнутую изотропную кривую и потому не является причинным пространством-временем.

Пример 3. Рассмотрим те же объекты, что и в примере 2, и для положительного действительного числа ε положим $h_\varepsilon = h_0 - \varepsilon d\varphi \otimes d\varphi$. Посредством формулы (1) определим соответствующую h_ε лоренцеву метрику g_ε на E . Получим новое расслоенное пространство-время (E, g_ε) с базой (B, h_ε) с теми же временными ориентациями O^* и O соответственно.

Предложение 4. Для достаточно малых ε расслоенное пространство-время (E, g_ε) причинно. Но его база (B, h_ε) при любом $\varepsilon > 0$ содержит замкнутую времени-подобную кривую и потому не является хронологическим пространством-временем.

Глобальная гиперболичность является самым сильным причинным свойством, а хронологичность – самым слабым. Поэтому из рассмотренных примеров и предложений 3 и 4 следует ответ на последний вопрос.

Теорема 4. В общем случае ни одно причинное свойство из раздела 3.2 книги [6] не обязано проектироваться с расслоенного пространства-времени на его базу.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

Литература

1. Яковлев Е.И. Двухконцевая задача для некоторого класса многозначных функционалов // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24. – № 4. – С. 63–73.
2. Яковлев Е.И. Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов // Функц. анализ и его прил. – 1996. – Т. 30. – № 1. – С. 89–92.
3. Яковлев Е.И. Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами // Современная математика. Фундаментальные направления – 2007. – Т. 22. – С. 100–126.
4. Яковлев Е.И. Двухточечные краевые задачи в релятивистской динамике // Матем. заметки – 1996. – Т. 59. – № 3. – С. 437–449.
5. Яковлев Е.И. О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа // Алгебра и анализ – 1997. – Т. 9. – № 2. – С. 256–271.
6. Beem J.K., Ehrlich P.E., Easley K.L. *Global Lorentzian Geometry*. – New-York: Marcel Dekker, 1996. – 636 p.
7. Новиков И. Д., Фролов В. П. *Физика черных дыр*. – М: Наука, 1986. – 328 с.
8. Bernal A.N., Sanchez M. *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem* // Commun. math. Phys. – 2003. – V. 243. – P. 461–470.

ON THE GEOMETRY OF FIBERED PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

T.A. Gonchar, E.I. Yakovlev

The relations between the geometric properties of fibered pseudo-Riemannian manifolds and their bases are investigated. Special attention is paid to Lorentzian manifolds and causality conditions.

Keywords: principal bundle, G-connection, lorentzian manifold, space-time, causality condition

UDC 515.165

ON 3D-MANIFOLDS DETERMINED BY THE SECOND ORDER ODE'SV.S. Dryuma¹¹ valdryum@gmail.com; Institute of Mathematics and Informatics of the Rep.Moldova

The relation between a four variables $G(x, y, a, b) = 0$ which determines the properties of the 3D-manifolds is considered as general Integral of two the second order ODE's $y'' = f(x, y, y')$ and $b'' = f(a, b, b')$, obtained after exclusion of the variables a, b or x, y by the help of twice differentiation of such type relations. In the article will be discussed some examples of 3D manifolds for which the application of suggested approaches may useful to the understanding of their properties.

Keywords: manifolds, homologous sphere, differential equation

1. Homologous spaces

Topology of a 3-dim manifold defined by the system of equations

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - 1 = 0, \quad z_1^l + z_2^m + z_3^n = 0, \quad (1)$$

where $z_k = x_k + Iy_k$ are the complex coordinates, depends from the values of the parameters l, m, n .

In the case $l = 2, m = 3, n = 5$ the manifold defined by the conditions (4) is famous homologous sphere of Poincare, which has a set of homologies some with standard 3D-sphere $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, but differs from it by fundamental group. It has an important applications in various branch of modern algebraic topology (J.Milnor,1968).

Here will be shown some examples how to represent the homologous sphere defined by intersection of the five-dimensional sphere with singular manifold ($l = 2, m = 3, n = 5$)

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - 1 = 0, \quad z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0. \quad (2)$$

in the form of the explicit expression for one function between of the four variables $H(x, y, u, v) = 0$.

In the Eulerian coordinates

$$z_1 = \cos(\theta) e^{-2/3 i \sqrt{3} \phi}, \quad z_2 = -\sin(\theta) \sin(1/2 \beta) e^{-1/2 i(\alpha - \delta + 4/3 \sqrt{3} \phi)},$$

$$z_3 = \sin(\theta) \cos(1/2 \beta) e^{1/2 i(\alpha + \delta - 4/3 \sqrt{3} \phi)}, \quad (3)$$

the equation of the unit five-dimensional sphere is identically satisfied.

Using then the variable χ , defined by the condition $e^{5/2 i \alpha + 5/2 i \delta - 10/3 i \sqrt{3} \phi} - e^5 \chi = 0$, we express the variable ϕ as $\phi = -1/4 i(i\alpha + i\delta - 2\chi) \sqrt{3}$ and after separation of the real and imaginary parts of complex equation, are obtained two equations into the five variables α, δ, χ and θ, β .

As result of elimination of the variable χ from both equations is derived equation of homologic sphere of Poincare in the form of one function of the four variables

$G(a, b, c, e) = 0$. The equation is the summa of the functions $\sin()$ and $\cos()$ with linear arguments. It contains more than 200 items and its begin looks as follows

$$\begin{aligned} & \frac{21}{8} \sin(5e + c - 16b + 12a) - 5/2 \cos(-66c - 11b + 77a + 88e) \\ & + 15/2 \cos(-29c - 9b + 15a + 31e) + \frac{567}{4} \sin(24a + 43e - 31c - 10b) \\ & + 6 \cos(-4c - 13b + 7a + 2e) + \frac{81}{8} \sin(4a + 9e - 7c - 20b) - \dots = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

By analogy can be considered the case of tetrahedral space $l = 2$, $m = 3$, $n = 4$, which corresponds to the intersection of the five-dimensional sphere with singular manifold ($l = 2, m = 3, n = 4$)

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1, \quad z_1^2 + z_2^3 + z_3^4 = 0. \quad (5)$$

and the octahedral space which is defined by the equations.

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1, \quad z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3 = 0. \quad (6)$$

2. Duality in theory of the second order ODE's

The General integral

$$F(x, y, a, b) = 0 \quad (7)$$

of the second order ODE

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

has the form of equation of 3D-manifold. An elimination of variables a, b from three relations

$$F(x, y(x), a, b) = 0, \quad F_x + y' F_y = 0, \quad F_{xx} + 2y' F_{xy} + y'^2 F_{yy} + y'' F_{xy'} = 0$$

leads to the equation $y'' = f(x, y, y')$. By analogy the exclusion of the variables x, y from three relations

$$F(x, y, a, b(a)) = 0, \quad F_a + b' F_b = 0, \quad F_{aa} + 2b' F_{ba} + b'^2 F_{bb} + b'' F_{b'} = 0$$

leads to the dual equation $b'' = g(a, b, b')$.

Any equation of the form

$$y'' + a_1(x, y)y'^3 + 3a_2(x, y)y'^2 + 3a_3(x, y)y' + a_4(x, y) = 0$$

with arbitrary coefficients $a_i(x, y)$ is a form-invariant under non degenerate transformations

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

and has as dual equation the equation of the form

$$b'' = g(a, b, b')$$

where the function $g(a, b, b' = c)$ obeys to the following p.d.e. (Koppisch,1905)

$$\begin{aligned} & \phi_{aacc} + 2c\phi_{abcc} + 2\phi\phi_{acc} + c^2\phi_{bbcc} + 2c\phi\phi_{ccc} + \phi^2\phi_{cccc} + (\phi_a + c\phi_b)\phi_{ccc} - \\ & -4\phi_{abc} - 4c\phi_{bbc} - c\phi_c\phi_{bcc} - 3\phi\phi_{bcc} - \phi_c\phi_{acc} + 4\phi_c\phi_{bc} - 3\phi_b\phi_{cc} + 6\phi_{bb} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Solutions of the equation (8) are very important to understanding of the theory of the second order ODE's which are cubical with respect to the first derivation and also to the theory of the first order ODE's $H(x, y, y') = 0$. Geometrically the relation $H(x, y, y') = 0$ plays role of the border for the 3D-manifold defined by General solution $F(x, y, a, b) = 0$ of the ODE $y'' = f(x, y, y')$.

To the practical applications the equation (8) can be represent in the form [1]

$$\begin{aligned} & \phi_{ac} + \phi\phi_{cc} - \frac{\phi_c^2}{2} + c\phi_{bc} - 2\phi_b = h(a, b, c), \\ & h_{ac} + \phi h_{cc} - \phi_c h_c + c h_{bc} - 3h_b = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

and this fact allow us to construct a lot examples of 3D- manifolds, when the function $\phi(a, b, c)$ obeys to the second order ODE

$$\phi_{ac} + \phi\phi_{cc} - \frac{\phi_c^2}{2} + c\phi_{bc} - 2\phi_b = 0.$$

As example at the condition $\phi(a, b, c) = a^{-k}A(ca^{k-1})$ the equation (8) is reduced to the fourth-order ODE

$$(A(\xi) + (k-1)\xi)^2 A^{IV} + 3(k-2)(A(\xi) + (k-1)\xi)A^{III} + (2-k)A'A'' + (k^2 - 5k + 6)A'' = 0,$$

which has the solution

$$A(\xi) = (2-k)(\xi(1+\xi^2) + (1+\xi^2)^{3/2}).$$

At the $k = 1$ from here we find

$$\phi(a, b, c) = \frac{c(1+c^2) + (1+c^2)^{3/2}}{a}$$

which gives the equation

$$\frac{d^2}{da^2}b(a) = \frac{\left(1 + \left(\frac{d}{da}b(a)\right)^2\right) \left(\frac{d}{da}b(a) + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{da}b(a)\right)^2}\right)}{a}.$$

After its integration we obtain general integral

$$F(x, y, a, b) = (y+b)^2 + a^2 - 2ax = 0$$

and the equation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = -1/2 \frac{\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) \left(1 + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2\right)}{x}.$$

3. The example

Let's consider 3D-space defined in the $R^5(x, y, z, u, v)$ by the system of equations

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 4v^2 - 6 + 6u^2 - 4u^2(v^2 + z^2) = 0, \quad y - u\sqrt{x^2 + y^2} = 0. \quad (10)$$

On accordance with [2] this is compact space having 2D-torus as bound.

In the coordinates (x, y, z, v) it has the form

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 5z^2x^2 + z^2y^2 + 4v^2x^2 - 6x^2 = 0. \quad (11)$$

Let us give an example of studying its properties with the help of the corresponding second-order ODE's.

1. In the case $y = y(x)$ we have the relation

$$x^4 + 2x^2(y(x))^2 + (y(x))^4 + 5z^2x^2 + z^2(y(x))^2 + 4v^2x^2 - 6x^2 = 0,$$

from which after twice differentiation and exclusion of the coordinates z, v from three conditions we get the second order ODE

$$\begin{aligned} -2xy(x)\left(x^2 + (y(x))^2\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}y(x) + \left(-2x^5 + 12x^3(y(x))^2 - 10x(y(x))^4\right) \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - \\ -2xy(x)\left(x^2 + (y(x))^2\right)^2 \frac{d}{dx}y(x) - 8x^3(y(x))^2 = 0. \end{aligned}$$

To get the dual equation for this equation we use the substitution $z = z(v)$ into the (11) and by analogy obtain the equation

$$\left(\frac{d}{dv}z(v)\right)^2 v + z(v) \left(\frac{d^2}{dv^2}z(v)\right) v - z(v) \frac{d}{dv}z(v) = 0$$

with the solution

$$z(v) = \sqrt{-C_1 v^2 + 2_C2}. \quad (12)$$

To the further study of the properties of starting 3D-manifold we substitute the function $z(v)$ in the relation (11) and find the surface defined by the equation

$$((5C_1 + 4)x^2 + y^2 C_1) v^2 + x^4 + (10C_2 - 6 + 2y^2)x^2 + y^4 + 2y^2 C_2 = 0.$$

in particular from here follows that the curves $y = y(v)$ or $x = x(v)$ lying on this surface are hyper-elliptic of genus $g = 2$.

Consider further the case $y = y(v)$ in more detail.

The relation (11) under this condition takes the form

$$x^4 + 2x^2(y(v))^2 + (y(v))^4 + 5z^2x^2 + z^2(y(v))^2 + 4v^2x^2 - 6x^2 = 0$$

and from it we get the ODE

$$\begin{aligned} 9(y(v))^3 T^6 + (30(y(v))^2 v - 4v^3 + 6v) T^5 + (-10(y(v))^3 - 6y(v) + 9v^2 y(v)) T^4 \\ + (10v(y(v))^3 S - 6(y(v))^2 v + 6y(v)Sv - 4y(v)Sv^3) T^3 \\ + ((y(v))^3 + 6(y(v))^2 v^2 S) T^2 - 2(y(v))^3 TSv + (y(v))^3 S^2 v^2 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

where $\frac{d^2}{dv^2}y(v) = S$, $\frac{d}{dv}y(v) = T$.

Algebraic second-order ODE's $H(x, y, y', y'') = 0$ with respect to derivatives have an important property - they have particular solutions with return points for the remaining solutions of the equation. It is known that such type of solutions are determined by the system of equations

$$H(x, y, y', y'') = 0, \quad \frac{\partial H(x, y, y', y'')}{\partial y''} = 0.$$

In considered case we find that the function defined by the condition

$$\begin{aligned} & 1/4 \ln(2v^2 - 3) + 1/2 \ln\left(\frac{y(v)}{\sqrt{2v^2 - 3}}\right) - \frac{1}{200} \sqrt{2v^2 - 3} \left(10 - 16 \frac{(y(v))^2}{2v^2 - 3}\right)^{3/2} (y(v))^{-1} - \\ & - \frac{2}{25} y(v) \sqrt{10 - 16 \frac{(y(v))^2}{2v^2 - 3}} \frac{1}{\sqrt{2v^2 - 3}} - C_1 = 0 \end{aligned}$$

is the particular solution of the equation (13). It consists from report points for the curves of two-parametric family of solutions of the equation (13) and may be used to the analyze of the topology of 3D-manifold (10).

The system of equations

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2, \\ \frac{dy}{ds} &= b_0 + b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 \end{aligned} \quad (14)$$

where a_i, a_{ij} and b_i, b_{ij} after extension on the projective plane takes form of the Pfaff equation

$$(x\tilde{Q} - \tilde{P}y) dz - z\tilde{Q}dx + z\tilde{P}dy = 0, \quad (15)$$

where the functions \tilde{P}, \tilde{Q} are a homogeneous polynomials on the variables (x, y, z) . Spatial homogeneous the first order system of equations

$$\frac{dx}{ds} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{ds} = Q(x, y, z), \quad \frac{dz}{ds} = R(x, y, z), \quad (16)$$

associated with a given Pfaff equation has a following form

$$\frac{dx}{ds} = Q_z - R_y, \quad \frac{dy}{ds} = R_x - P_z, \quad \frac{dz}{ds} = P_y - Q_x,$$

and for it the condition on their right parts $\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$ is fulfilled.

For determination of the systems having the limit cycles is possible to use the representation of the system (14) of the form

$$\frac{d}{dx}z(x) = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)}, \quad \frac{d}{dx}y(x) = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)}, \quad (17)$$

Such system after eliminating one of the variables $(y(x)$ or $z(x)$ is reduced to one second-order differential equation $F(x, y, y', y'') = 0$ or $H(x, z, z', z'') = 0$

As a result of the exclusion of the function y'' from the system $F(x, y, y', y'') = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$ the first order differential equation $C(x, y, y') = 0$ is obtained.

With help of this equation the limit cycles of the systems (14) are studied.

Литература

1. V. Dryuma. *On dual equations in theory of the second order ODE's*, // arXiv:nlin/0701047v1 p.1-17, 2007.
2. V. Dryuma. *Homogenous extensions of the first order ODE's*, // Algebraic Topology and Abelian Functions, Buchstaber'70 Conference, 18-22 June 2013, Steklov's MI RAS, Moscow, ABSTRACTS, p.78-79, 2013.
3. Dryuma V. *Proective duality in theory of the second order differential equations*// Mathematical Researches, Kishinev, Stiinta, 1990. –v.112, p.93-103.
4. Житомирский О.К., Львовский В.Д., Милинский В.И., *Задачи по высшей геометрии* // часть 1, ОНТИ: Ленинград. – 1935. - Москва С. 56.
5. Dryuma V. *On the equation of homologues sphere of Poincare* // Классическая и Современная Геометрия, Материалы Международной конференции, посв.100-летию со дня рожд. В.Т.Базылева. – Москва: Изд-во МПГУ, 22-25 апреля, 2019. – С. 20–21.

О ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.С. Дрюма

Соотношение между четырьмя переменными $G(x, y, a, b) = 0$, определяющее свойства 3D-многообразий рассматривается в качестве Общего Интеграла двух ОДУ второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ и $b'' = f(a, b, b')$, каждое из которых получается в результате исключения соответствующей пары переменных a, b или x, y путем дважды примененной операции дифференцирования. В докладе будут рассмотрены примеры предлагаемого подхода для изучения трехмерных многообразий на основе теории ОДУ второго порядка и их инвариантов Лиувилля-Трессе-Картана.

Ключевые слова: многообразие, гомологическое пространство, дифференциальное уравнение

УДК 514.7

ОБОБЩЕННАЯ УСЛОВНАЯ КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ

Н.М. Ибодуллаева¹

¹ nafisa.28.02.1991@mail.ru; Навоийский Государственный Педагогический институт

В работе описываются свойства обобщённого отображения и обобщенной внешней кривизны.

Ключевые слова: плоскость, поверхность, сферическое отображение, обобщенное отображение, кратчайшая, обобщенная внешняя кривизна

Пусть $F : z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, и $z \in C^2(D)$. Тогда уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (1)$$

Обозначим через $p = f_x(x_0, y_0)$ и $q = f_y(x_0, y_0)$.

Каждой касательной плоскости (1) сопоставляется точка

$$M^* \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$$

на единичной сфере, которая называется сферическим отображением точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F .

Рассмотрим поверхность Φ .

Определение 1. Поверхность Φ называется звездно расположенной относительно сферы S , если любой луч выходящей из начала координат пересекает Φ не более чем на одной точке.

Например, любой выпуклый оваллоид содержащий начало координат, будет звездно расположенной поверхностью.

Введем понятие обобщённого отображения поверхности F и дадим определение обобщённой кривизны поверхности.

Пусть Φ звездно расположенная поверхность относительно сферы S . Тогда луч, выходящий из центра сферы и пересекающий S в точке X , пересекает поверхность Φ в точке $X(\Phi)$, или не пересекает. Точку $X(\Phi)$ назовем проекцией точки $X \in S$ на поверхность Φ , если она существует.

Определение 2. Если точка $X \in S$ – сферическое отображение точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F , то точку $X(\Phi)$ назовем обобщенным отображением точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F на поверхность Φ [3].

Известно, что любая плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает её по большой окружности, которая является кратчайшей для точек, лежащих на этом сечении (когда точки не являются диаметрально противоположными). По аналогии, кривую, образованную пересечением поверхности Φ с плоскостью α , проходящей через начало координат, назовем кратчайшей на Φ .

Пусть M^* – некоторое множество точек на S . Тогда центральная проекция этого множества на Φ образует множество M^+ .

С учётом вышеприведённых определений и опираясь на свойство центральной проекции, можно доказать следующие свойства обобщённого отображения:

Свойство 1. Если $M = \sum_{i=1}^k M_i$, то $M^+ = \sum_{i=1}^k M_i^+$.

Свойство 2. Если M – выпуклое множество на S , то M^+ – выпуклая на Φ .

Свойство 3. Если M – измеримо, то M^+ – также измеримо.

Пусть M множество в области D , где определена поверхность F и \overline{M} множество точек на поверхности F , проекцией которого является $M \subset D$. Рассмотрим точки $\overline{M} \in F$, являющиеся проекциями точек $M \in D$. Обозначим через M^+ обобщённое отображение точки $\overline{M} \in F$. Когда точка M меняется на множестве $M \subset D$, его обобщённое отображение составляет, в общем случае, некоторое множество $M^+ \subset \Phi$. Множество M^+ назовем обобщённым отображением множества $M \subset D$, относительно поверхности F на поверхности Φ .

Определение 3. Площадь множества $M^+ \subset \Phi$ назовем обобщенной внешней кривизной множества M относительно поверхности F и обозначим как

$$\omega_F(M) = S_\Phi(M^+).$$

Используя свойства центральной проекции и сферического отображения, можно доказать следующие свойства обобщенной внешней кривизны:

1⁰. $\omega_F(M) \geq 0$ для любой $M \subset D$;

2⁰. $\omega_F(M_1 + M_2) = \omega_F(M_1) + \omega_F(M_2)$ – обобщенная внешняя кривизна аддитивна.

Определение и свойства обобщенной внешней кривизны мы привели для поверхности Φ , звездно расположенной относительно единичной сферы S . Эти свойства справедливы для любой звездно расположенной поверхности Φ .

Литература

[1] Aleksandrov A.D. Existence and uniqueness of a convex surface with a given integral curvature, Dokl.AN AN USSR. – 1942 – V. 35, 5.

[2] Ilya J.Bakelman. Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1994.

[3] Артыкбаев А., Вернер А.Л. Неодносвязные выпуклые поверхности заданной интегральной условной внешней кривизной//Вопросы дифференциальной геометрии «в целом». Л., 1983. С. 3-8.

GENERALIZED CONDITIONAL SURFACE CURVATURE

N.M. Ibodullaeva

The thesis presents the properties of a generalized mapping and generalized external curvature.

Keywords: plane, surface, spherical mapping, generalized mapping, shortest, generalized external mapping

УДК 531.12+531.51+517.944

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ И МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

Ю.Г. Игнатьев¹

¹ ignatev_yu@rambler.ru; Институт физики, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского Федерального университета, 420008 Россия, Казань, ул. Кремлевская 18

Методом самосогласованного поля построена полная теория макроскопического описания космологической эволюции, включающая подсистему линейных уравнений эволюции возмущений и нелинейные макроскопические уравнения Эйнштейна и скалярного поля. Приведены примеры решения этой системы, иллюстрирующие принципиальное отличие космологических моделей ранней Вселенной, построенных на однородных и локально флуктуирующих скалярных полях.

Ключевые слова: макроскопическая гравитация, самосогласованное поле, космологическая модель, скалярные поля, усреднение локальных флуктуаций, асимптотическое поведение, космологическая сингулярность

Введение

В работах [1, 2, 3] были сформулированы основные положения макроскопической теории гравитации, основанной на методе самосогласованного поля, получены и проинтегрированы макроскопические уравнения Эйнштейна для космологической модели с Λ - членом во втором порядке теории возмущений по поперечным гравитационным возмущениям. В работах [1], [2] рассматривалась, фактически, пустая Вселенная, заполненная гравитационным излучением. В такой Вселенной не могут существовать скалярные гравитационные возмущения, для которых необходимо наличие материи. Точнее говоря, скалярные гравитационные возмущения могут появиться лишь во втором порядке теории возмущений, как возмущения средней плотности энергии гравитационного излучения. В работе [3] рассматривалась космологическая модель со скалярным полем, но при этом учитывались лишь поперечные возмущения метрики, соответствующие гравитационным волнам. Такие возмущения не приводят к возмущениям скалярного поля в линейном приближении, поэтому такая модель во многом аналогична модели пустой Вселенной, заполненной гравитационным излучением. В этой статье мы рассмотрим полную макроскопическую модель Вселенной с учетом, как продольных (скалярных), так и векторных возмущений метрики, при этом в качестве материи будем рассматривать классическое скалярное поле.

Самосогласованный статистический подход к описанию локальных флуктуаций метрики

Статистическую теорию получения *макроскопических уравнений Эйнштейна* можно развить по аналогии с теорией многих частиц в рамках подхода *самосогласованного поля*, первоначально возникшего в небесной механике, а затем примененного в теории многих частиц (P. Weiss, 1907; I. Langmuir, 1913; L. Thomas, 1927; E. Fermi, 1928; D. Hartree, 1928; В. А. Фок, 1930). Особую роль в развитии метода самосогласованного поля принадлежит А. А. Власову, который в своих фундаментальных работах [4] (1938) (см. также [5], [6]) впервые дал глубокий анализ физических свойств заряженных частиц плазмы, показал неприменимость к описанию плазмы газокинетического уравнения Больцмана и предложил новое кинетическое уравнение плазмы (уравнение Власова), описывающее коллективное взаимодействие частиц плазмы через самосогласованное поле. В дальнейшем теория Власова была уточнена в статье Л. Д. Ландау (1946), а затем строго обоснована и обобщена в работе Н. Н. Боголюбова [7] (1946) и блестяще приложена им к квантовой статистике и теории сверхтекучести [8] (1947). Следует отметить классическую монографию Чандрассекара [9] (1942), в которой на основе метода самосогласованного поля были сформулированы принципы звездной динамики и фактически построена теория образования галактических структур.

Согласно методу самосогласованного поля движение отдельной частицы можно описать как движение в суммарном усредненном поле остальных частиц системы, пренебрегая влиянием одной частицы на динамику системы. Условиями применимости метода самосогласованного поля являются дальнедействующий характер межчастичных взаимодействий и большое число взаимодействующих частиц

$N \gg 1$. Аналогично можно рассматривать метод самосогласованного поля применительно к нелинейным чисто полевым системам. При этом роль одной частицы играет отдельная малая полевая мода, характеризующаяся некоторыми полевыми степенями свободы, а условием применимости метода самосогласованного поля является дальнедействующий характер поля и большое число его степеней свободы. Этим условиям как нельзя лучше соответствует гравитационное взаимодействие: закон сохранения полной энергии-массы и отсутствие отрицательных «гравитационных зарядов» гарантирует его дальнедействующий характер, а большое число степеней свободы заложено в самой полевой природе взаимодействия. Поэтому мы имеем право рассматривать системы с гравитационным взаимодействием методом самосогласованного поля, в котором каждая микроскопическая мода гравитационного возмущения мала, тогда как макроскопическое самосогласованное гравитационное поле велико.

Уравнение макроскопического скалярного поля второго порядка по возмущениям и макроскопические уравнения Эйнштейна

Для построения замкнутой теории макроскопической Вселенной необходимо получить уравнения второго порядка по возмущениям для скалярного поля Φ на основе уравнения поля. Вычисляя квадратичную поправку к уравнению поля, найдем:

$$\delta^{(2)}(\square\Phi + V'_\Phi) = -\Phi'_0 \left[\frac{(SS^*)'}{a^2} + \frac{1}{3}(\lambda\lambda^*)' + \frac{1}{6}(\mu\mu^*)' \right] + \frac{1}{2} \frac{\phi'\mu'^* + \phi'^*\mu'}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{n^2}{a^2} (\phi\mu^* + \phi^*\mu) - 6\alpha\Phi_0\phi\phi^*. \quad (1)$$

Таким образом, согласно методу самосогласованного поля для определения макроскопического скалярного поля $\Phi_0(\eta)$ вместо уравнения (1) имеем уравнение:

$$\Phi_0'' + 2\frac{a'}{a}\Phi_0' + a^2(m^2\Phi_0 - \alpha\Phi_0^3) - \Phi_0'a^2 \left[\frac{\overline{(SS^*)'}}{a^2} + \frac{1}{3}\overline{(\lambda\lambda^*)'} + \frac{1}{6}\overline{(\mu\mu^*)'} \right] + \frac{1}{2}\overline{\phi'\mu'^* + \phi'^*\mu'} - \frac{1}{2}n^2\overline{(\phi\mu^* + \phi^*\mu)} - 6a^2\alpha\Phi_0\overline{\phi\phi^*} = 0. \quad (2)$$

Поступая аналогичным образом с уравнениями Эйнштейна получим вместо них макроскопические уравнения Эйнштейна:

$$3\frac{a'^2}{a^4} - \frac{\Phi_0'^2}{2a^2} - \frac{m^2\Phi_0^2}{2} + \frac{\alpha\Phi_0^4}{4} - \Lambda = n^2 \left(\frac{\overline{SS^*}}{2} + \frac{\overline{\lambda\mu^* + \lambda^*\mu}}{9} - \frac{\overline{\lambda\lambda^*}}{18} \right) + \frac{\overline{S'S'^*}}{2} + \frac{\overline{\lambda'\lambda'^*}}{6} - \frac{\overline{\mu'\mu'^*}}{6} + 2\frac{a'}{a}\overline{(SS^*)'} + \frac{1}{3}\frac{a'}{a}\overline{(\mu\mu^*)'} + \frac{\overline{\phi\phi'}}{a^2} + \overline{\phi\phi^*} \left(\frac{n^2}{a^2} + m^2 - 3\alpha\Phi_0^2 \right); \quad (3)$$

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} + \frac{\Phi_0'^2}{2a^2} - \frac{m^2\Phi_0^2}{2} + \frac{\alpha\Phi_0^4}{4} - \Lambda + n^2 \frac{7}{6}\overline{SS^*} - \frac{5}{6}\overline{S'S'^*} - \frac{n^2}{9} \left[\frac{2}{3}\overline{(\lambda\mu^* + \lambda^*\mu)} + \frac{7}{6}\overline{\lambda\lambda^*} - \frac{1}{6}\overline{\mu\mu^*} \right] - \frac{5}{18}\overline{\lambda'\lambda'^*} + \frac{1}{18}\overline{\mu'\mu'^*} - \frac{\overline{\phi\phi'}}{a^2} - \overline{\phi\phi^*} \left(\frac{n^2}{3a^2} + m^2 - 3\alpha\Phi_0^2 \right) = 0. \quad (4)$$

Система линейных эволюционных уравнений совместно с системой макроскопических уравнений (2), (3) и (4) составляют полную замкнутую систему уравнений, определяющих макроскопическую Вселенную Фридмана.

Примеры построения макроскопических моделей Вселенной

Полученная система уравнений макроскопической космологии чрезвычайно сложна для ее анализа в рамках одной статьи. К ее исследованию мы намерены вернуться в ближайшем будущем. Пока в качестве примера исследования этой системы рассмотрим случай отсутствия скалярных и векторных возмущений гравитационного поля $\mu = \lambda = \nu = 0$. В этом случае из эволюционных уравнений сразу получаем $\phi = 0$, и из всей системы эволюционных уравнений остается лишь уравнение для поперечных возмущений. Таким образом, уравнение (2) сводится к более простому уравнению:

$$\Phi_0'' + \Phi_0' \left[2 \frac{a'}{a} - \overline{(SS^*)'} \right] + a^2 \Phi_0 (m^2 - \alpha \Phi_0^2) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, среднеквадратичная поправка в макроскопическом уравнении скалярного поля в этом случае влияет лишь на значение постоянной Хаббла $H = a'/a$ посредством энергии гравитационных волн.

Далее получим выражения для поправок к эффективному давлению и плотности энергии:

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{7}{6} n^2 \overline{SS^*} - \frac{5}{6} \overline{S'S'^*} \right). \quad (6)$$

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{1}{8\pi} \left[n^2 \frac{\overline{SS^*}}{2} + \frac{\overline{S'S'^*}}{2} + 2 \frac{a'}{a} \overline{(SS^*)'} \right]. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь ВКБ-приближение эволюционного уравнения для поперечных возмущений

$$n \gg \frac{a'}{a}, \quad S' \gg \frac{a'}{a},$$

представляя решение в форме

$$S = \tilde{S}(\eta) e^{i \int u(\eta) d\eta},$$

где $\tilde{S}(\eta)$ и $u(\eta)$ – слабоменяющиеся наряду с масштабным фактором функции, такие что:

$$a' \ll a\{n, u\}; \quad \tilde{S}' \ll \tilde{S}\{n, u\}; \quad u' \ll \{n, u\}. \quad (8)$$

Таким образом, в ВКБ - приближении найдем:

$$S = \frac{1}{a} S_+^0 e^{in\eta} + \frac{1}{a} S_-^0 e^{-in\eta}, \quad (9)$$

где S_{\pm}^0 постоянные амплитуды, так что $S_+^0 S_-^0 = |S^0|^2$. Таким образом, найдем в ВКБ - приближении:

$$SS^* \simeq \frac{|S^0|^2}{a^2} \Rightarrow \overline{SS^*} \simeq \frac{|S^0|^2}{a^2}; \quad S'S'^* \simeq n^2 \frac{|S^0|^2}{a^2} \Rightarrow \overline{S'S'^*} \simeq n^2 \frac{|S^0|^2}{a^2}; \quad (SS^*)' \simeq 0.$$

Используя эти соотношения в формулах (6) – (7), получим в ВКБ - приближении:

$$\overline{\mathcal{P}} \simeq \frac{1}{24\pi} n^2 \frac{|S^0|^2}{a^2}; \quad \overline{\mathcal{E}} \simeq \frac{1}{8\pi} n^2 \frac{|S^0|^2}{a^2} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}} \simeq \frac{1}{3} \overline{\mathcal{E}} \quad (10)$$

– т.е., учет высокочастотных поперечных гравитационных возмущений эквивалентен добавлению компоненты ультрарелятивистской жидкости в макроскопические уравнения Эйнштейна [2].

Далее, подставляя ВКБ - решение (9) в макроскопическое уравнение скалярного поля, приведем его к явному виду:

$$\Phi_0'' + 2 \frac{a'}{a} \Phi_0' \left(1 + \frac{|S^0|^2}{a^2} \right) + a^2 \Phi_0 (m^2 - \alpha \Phi_0^2) = 0. \quad (11)$$

Аналогично к явному виду приведем независимое уравнение Эйнштейна [10]

$$3 \frac{a'^2}{a^4} - \frac{\Phi_0'^2}{2a^2} - \frac{m^2 \Phi_0^2}{2} + \frac{\alpha \Phi_0^4}{4} - \Lambda = n^2 \frac{|S^0|^2}{a^2}. \quad (12)$$

Частное решение макроскопических уравнений Эйнштейна

Для получения решений уравнений макроскопической гравитации необходимо, во-первых, найти решение макроскопического уравнения скалярного поля (11), что само по себе представляет чрезвычайно сложную задачу при неизвестном масштабном факторе. Здесь мы рассмотрим простой пример частного точного решения уравнения поля (11), позволяющего довести решение задачи до окончательного результата.

Действительно, предполагая $\alpha > 0$, положим в (11)

$$\Phi_0 = \pm \frac{m}{\sqrt{\alpha}}, \quad (13)$$

– в этом случае уравнение (11) превращается в тождество, а уравнение Эйнштейна (12) приводится к явному виду:

$$3 \frac{a'^2}{a^4} - \lambda = n^2 \frac{|S^0|^2}{a^2}, \quad (14)$$

где

$$\lambda = \Lambda + \frac{m^4}{4\alpha}. \quad (15)$$

Уравнение (14) интегрируется в элементарных функциях:

$$a(\eta) = \frac{n|S^0|}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \eta \right). \quad (16)$$

Заключение

Таким образом, получена замкнутая система макроскопических уравнений Эйнштейна - Хиггса, описывающая эволюцию макроскопически однородной и изотропной Вселенной, заполненной флуктуирующим скалярным полем с потенциалом Хиггса. Эта система состоит из подсистемы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию возмущений гравитационного

и скалярного поля, и системы нелинейных макроскопических уравнений, описывающих макроскопическую динамику космологической модели.

Отметим следующий важное свойство таких макроскопических моделей, отличающих их от стандартных космологических моделей с однородными скалярными полями $\Phi(t)$: самосогласованное решение (16) всегда содержит космологическую сингулярность. Действительно, при $\eta \rightarrow 0$ решение (16) ведет себя как решение для ультрарелятивистской Вселенной $a \simeq n|S^0|\sqrt{\lambda\eta}/3 \rightarrow 0$, а при $\eta \rightarrow \infty$ – как инфляционное $a \simeq \frac{n|S^0|}{2\sqrt{3}} \exp(\sqrt{\lambda/3}\eta)$. Заметим, что самосогласованное описание макроскопической космологической модели радикально изменяет реальный космологический сценарий, отрезая от стандартного сценария бесконечное прошлое Вселенной.

Литература

1. Ю.Г. Игнатьев, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – Вып. 3 – с. 16–22 (2015); arXiv:1509.01235v1 [gr-qc].
2. Yu. G. Ignat'ev, Grav. and Cosmol. **22** pp. 264–269 (2016); arXiv:1509.01235v1 [gr-qc].
3. Ю.Г. Игнатьев, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, Вып. 2 – с. 47–61 (2016).
4. А. А. Власов, ЖЭТФ, **8** (3), с. 291– 305 (1938).
5. А. А. Власов, Уч. зап. МГУ, Вып. 75. Кн. 2. Ч. 1 (1945); А. А. Vlasov, *Many-Particle Theory and Its Application to Plasma*. New York, Gordon and Breach (1961).
6. А.А. Власов, *Статистические функции распределения*, Москва: Наука (1966).
7. N. N. Bogoliubov, Journal of Physics, **10** (3): 265 – 277 (1946).
8. N. N. Bogoliubov, Journal of Physics. **11** (1): 23–32 (1947).
9. S.Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*. New-York: Dover Publications (1942).
10. Yu. G. Ignat'ev, Grav. and Cosmol., **25** No 4 (2019) (to be publish).

SELF-CONSISTENT FIELD METHOD AND EINSTEIN'S MACROSCOPIC EQUATIONS FOR THE EARLY UNIVERSE WITH SCALAR FIELD

Yu.G. Ignat'ev

Using the self-consistent field method, a complete theory of a macroscopic description of cosmological evolution is constructed, which includes a subsystem of linear equations of evolution of perturbations and nonlinear macroscopic equations of Einstein and a scalar field. Examples of the solution of this system are presented, illustrating the fundamental difference between the cosmological models of the early Universe built on homogeneous and locally fluctuating scalar fields.

Keywords: macroscopic gravity, self-consistent field, cosmological model, scalar fields, averaging of local fluctuations, asymptotic behavior, cosmological singularity

УДК 514.7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

Ю.Г. Игнатъев¹, А.Р. Самигуллиной²

¹ *ignatev-yurii@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² *alsu_sam@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рассматриваются примеры решения задач вычисления кривизны и кручения кривых, а также примеры решения натурального репера кривой.

Ключевые слова: кривизна кривой, кручение кривой, натуральные уравнения кривой

Дифференциальная геометрия кривых является объединением аналитической геометрии и математического анализа и, в частности, затрагивает темы дифференцирования векторов, векторных операций, интегрирования векторов, обыкновенных дифференциальных уравнений и т.п. Вместе с тем дифференциальная геометрия богата различными приложениями, как геометрическими, так и механическими и геометро-оптическими. Продемонстрировать эти приложения и дать их графические представления позволяют пакеты символьной математики, одним из которых является пакет Maple. Maple обладает хорошо развитыми графическими возможностями, что наряду с его аналитическими способностями и средствами решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и их систем (СОДУ), в том числе и методами их численного решения, позволяет достаточно просто и эффективно решать указанные задачи.

1. Задачи на графическое представление пространственных кривых

Пространственные кривые строятся в Maple с помощью команды `spacecurve(r, t=a..b, ...)` библиотеки `plots`, где r - радиус-вектор, t - параметр кривой.

2. Задачи на построение натурального репера кривой и вычисление кривизны и кручения кривой

Как известно, сопровождающий трехгранник вычисляется с тремя производными радиуса-вектора $r(t)$ произвольной точки кривой, стандартными векторными операциями, производимыми в пакете Maple с помощью команд библиотеки `linalg`. Производные n -го порядка от векторной функции $r(t)=[x(t), y(t), z(t)]$ определяются командой `diff(r(t), t$n)`, скалярное и векторное произведения векторов a и b вычисляется в Maple с помощью команд `innerprod(a, b)`, `crossprod(a, b)`.

```
>restart;
>r:=(t)->[x(t),y(t),z(t)];
>Dr:=(t)->diff(r(t),t);
>D2r:=(t)->diff(r(t),t$2);
>D3r:=(t)->diff(r(t),t$3);
```

Создадим собственные процедуры вычисления кривизны и кручения кривых:
`Mod(x)` – модуля вектора x :

```
>Mod:=(x)->simplify(sqrt(innerprod(x,x)));
```

Combprod (x,y,z) – смешанного произведения трех векторов

```
>Combprod:=(x,y,z)->simplify(innerprod(x,crossprod(y,z)));
```

```
>k:=Mod(crossprod(Dr(t),D2r(t)))/Mod(Dr(t))^3;
```

```
>kappa:=Combprod(Dr(t),D2r(t),D3r(t))/crossprod(Dr(t),D2r(t))^2;
```

Продемонстрируем эти команды на примере вышеприведенной кривой:

```
>line1:=t*cos(12*Pi*t),t*sin(12*Pi*t),t^2;
```

```
>kappa1:=simplify(eval(subs(line1,kappa)));
```

```
>k1:=simplify(eval(subs(line1,k)));
```

3. Задачи на решение натуральных уравнений кривой

Натуральные уравнения кривой - это пара уравнений вида:

$$k = k(s); \kappa = \kappa(s),$$

где $k(s); \kappa(s)$ в правых частях заданы как функции натурального параметра s . Правые части этих уравнений задаём, а левые части этих уравнений определяются дифференциальными выражениями, которые получили выше. Таким образом, получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно двух неизвестных функций $\Phi(s)$ $\Theta(s)$.

Для численного интегрирования этой системы необходимо привести ее к нормальному виду, т.е. к системе ОДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производных. Для этого обозначим первые производные от искомым функций с помощью новых функций $\Phi_s(s)$ $\Theta_s(s)$.

```
>D1:=diff(Phi(s),s)=Phi[S](s);D2:=diff(Theta(s),s)=Theta[S](s);
```

Подставим эти значения производных в выражения для кривизны и кручения $k(s); \kappa(s)$ с помощью команды `subs(подстановка, выражение)`:

```
>K(s):=subs(D1,D2,k(s));
```

```
>K1(s):=subs(D1,D2,kappa(s));
```

Введем заданные функции кривизны и кручения:

$$k(s) = \psi(s); \kappa(s) = \xi(s)$$

и, избавляясь от радикалов с учетом неотрицательности кривизны кривой, получим уравнения для функции $\Phi_s(s)$ $\Theta_s(s)$:

```
> EQ1:=K(s)^2=psi(s)^2; K_2:=subs(EQ1,K1(s)=xi(s));
```

Продифференцируем первое из этих уравнений по натуральному параметру

```
>K_1:=diff(EQ1,s);
```

и разрешим полученную систему уравнений относительно первых производных функций $\Phi_s(s)$ $\Theta_s(s)$ с помощью команды `solve(система уравнений, {неизвестные})`

```
>Sys:=solve({K_2,K_1},{diff(Phi[S](s),s),diff(Theta[S](s),s)});
```

Сформируем теперь нормальную систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\Phi(s)$, $\Theta(s)$, $\Phi_s(s)$, $\Theta_s(s)$, объединяя полученные уравнения с определениями DR функций $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ через функции с помощью команды union:

```
>System0:=DR union {D1,D2,K_1,K_2*psi(s)^2};
```

Пользуясь движениями, всегда можно задать начальные условия таким образом, чтобы при нулевом значении натурального параметра s кривая проходила через начало координат ($\Phi(0) = 0$, $\Theta(0) = 0$) в направлении, например, оси OX : $\Phi_s(0) = 1$, $\Theta_s(0) = 0$:

```
>Inits:={X(0)=0,Y(0)=0,Z(0)=0,Phi(0)=0,Theta(0)=0,Phi[S](0)=1,Theta[S](0)=0};
```

Зададим теперь конкретные натуральные уравнения кривой, т.е., конкретизируем функции $\psi(s)$ и $\xi(s)$. Рассмотрим несколько примеров:

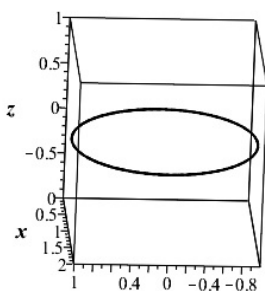
$$1. \psi(s) = 1, \xi(s) = 0; \quad 2. \psi(s) = \frac{s^2}{(1+s^4)}, \xi(s) = \frac{-s^2}{(1+s^2)} \quad 3. \psi(s) = \cos(s), \xi(s) = \sin(s)$$

и подстановками сформируем три соответствующие нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

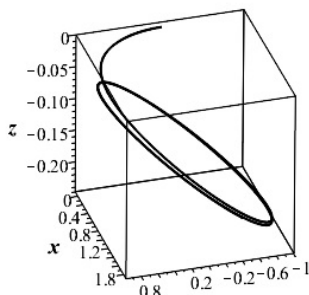
Система ОДУ решается с помощью авторского пакета *DifEqTools* команды *NumericDsolve(Eqs,IC,[method=name])* [5] выводит решения в виде списка (переменная = значение), где левые стороны являются именами независимой переменной, зависимой переменной (ей) и их производные (для уравнений более высокого порядка), а правые части - соответствующие вычисленные значения решения. Прямое применение процедуры приводит к нужным результатам. Таким образом, получаем процедуру восстановления кривой по её натуральным уравнениям с помощью решения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка.

На рисунках представлены графики восстановленных кривых 1-3.

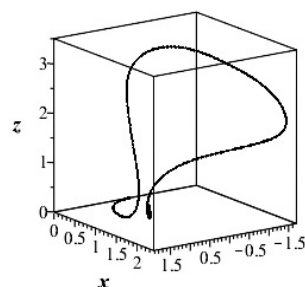
Восстановленная кривая 1



Восстановленная кривая 2



Восстановленная кривая 3



Литература

1. А.Н. Васильев *Maple8: Самоучитель* - М.: Издательский дом "Вильямс", 2003.
2. Ю.Г. Игнатъев *Дифференциальная геометрия. Курс лекции. Компьютерная версия*, Казань, 2002.
3. А.П. Норден *Лекции по дифференциальной геометрии*, Москва, Учпедгиз, 1965.

4. В. Дьяконов *Maple7. Учебный курс*. СПб.: Питер, 2002.

5. Ю.Г. Игнатъев *Программный комплекс численно - аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple* / Ю. Г. Игнатъев, А. Р. Самигуллина. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. – Вып. 4 – 2016. – с. 147-148

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF CURVES IN THE SYSTEM OF COMPUTER MATHEMATICS MAPLE

Yu.G. Ignatev, A.R. Samigullina

Examples of solving problems of calculating the curvature and torsion of curves are considered, as well as examples of solving a natural frame of a curve.

Keywords: curvature of a curve, torsion of a curve, natural equations of a curve

UDC 514.822

POINT DISCLINATIONS IN THE CHERN–SIMONS GEOMETRIC THEORY OF DEFECTS

M.O. Katanaev¹, B.O. Volkov²

¹ katanaev@mi.ras.ru; Kazan Federal University, V.A. Steklov Mathematical Institute

² katanaev@mi.ras.ru; V.A. Steklov Mathematical Institute

We use the Chern–Simons action for a $SO(3)$ -connection for the description of point disclinations in the geometric theory of defects. The most general spherically symmetric $SO(3)$ -connection with zero curvature is found. The corresponding orthogonal spherically symmetric $SO(3)$ matrix and n -field are computed. Two examples of point disclinations are described.

Keywords: dislocations, disclinations, geometric theory of defects

ТОЧЕЧНЫЕ ДИСКЛИНАЦИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЕФЕКТОВ ЧЕРНА – САЙМОНСА

И.О. Катанаев, Б.О. Волков

Мы используем действие Черна - Саймонса для $SO(3)$ - связи при описании точечных дисклинаций в геометрической теории дефектов. Найдена наиболее общая сферически-симметричная $SO(3)$ -связь нулевой кривизны. Соответствующая ортогональная сферически-симметричная $SO(3)$ матрица и n -поле вычисляются. Описаны два примера точечной дисклинации.

Ключевые слова: дислокации, дисклинации, геометрическая теория дефектов

УДК 514.765

ОДНОРОДНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ВЕКТОРНЫМ КРУЧЕНИЕМ

П.Н. Клепиков¹, Е.Д. Родионов²

¹ klepikov.math@gmail.com; Алтайский государственный университет

² edr2002@mail.ru; Алтайский государственный университет

В работе рассмотрены однородные инвариантные солитоны Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и инвариантным векторным кручением. Показано, что в отличие от случая связности Леви-Чивита, существуют нетривиальные примеры таких солитонов Риччи.

Ключевые слова: группы Ли, связность с векторным кручением, однородные солитоны Риччи

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X, \quad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивита. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется метрической связностью с векторным кручением или полусимметрической связностью (с точностью до направления).

Активное изучение метрических связностей с векторным кручением началось с работы К. Яно [2].

В последнее время изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одним из которых являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [3] в случае связности Леви-Чивита. Аналогично данному случаю, дадим определение в случае связности с векторным кручением.

Определение. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) с метрической связностью с векторным кручением будем называть солитоном Риччи, если существует векторное поле X и константа Λ , для которых выполняется уравнение:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g,$$

где r — тензор Риччи, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X .

Если $M = G/H$ — однородное многообразие с инвариантной (псевдо)римановой метрикой и векторное поле X также инвариантно, то солитон Риччи называется однородным инвариантным солитоном Риччи.

Известно, что в случае трех и четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой со связностью Леви-Чивита не существует однородных инвариантных солитонов Риччи, отличных от многообразий Эйнштейна и их прямых произведений (см. [4, 5, 6]). Однако в случае связности с векторным кручением существуют нетривиальные примеры таких групп Ли. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. Пусть (G, g) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и инвариантным векторным кручением. Если (G, g) — однородный инвариантный солитон Риччи, тогда или $V = 0$, или алгебра Ли группы G содержится в таблице 1.

Таблица 1. Однородные инвариантные солитоны Риччи на трехмерных римановых группах Ли с векторным кручением

Lie brackets	V	Λ	X
$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, [e_1, e_3] = \alpha_3 e_2$	$(\pm \alpha_3 \sqrt{2}, 0, 0)$	$-2\alpha_3^2$	$(\pm \frac{1}{2} \alpha_3 \sqrt{2}, 0, 0)$
$[e_1, e_2] = (2 - \alpha_2) e_2 + A e_3,$ $[e_1, e_3] = A e_2 + \alpha_2 e_3,$ $A = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (V^1)^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2 - 2}$	$(V^1, 0, 0)$	$-(V^1)^2 - 2V^1$	$(\frac{1}{2} V^1 + 1, 0, 0)$
$[e_1, e_2] = e_2 - \alpha_1 e_3,$ $[e_1, e_3] = \alpha_1 e_2 + e_3$	$(V^1, 0, 0)$	$-2 - 2V^1$	$(\frac{1}{2} (V^1)^2 + \frac{1}{2} V^1, 0, 0)$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

Литература

1. Cartan E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)* // Ann. Ecole Norm. Sup. – 1925. – V. 42. – P. 17–88.
2. Yano K. *On semi-symmetric metric connection* // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. – 1970. – V. 15. – P. 1579–1586.
3. Hamilton R. S. *The Ricci flow on surfaces* // Contemporary Mathematics. – 1988. – V. 71. – P. 237–262.
4. Cerbo L. F. *Generic properties of homogeneous Ricci solitons* // Adv. Geom. – 2014. – V. 14(2). – P. 225–237.
5. Клепиков П. Н., Оскорбин Д. Н. *Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли* // Известия АлтГУ. – 2015. – № 1/2. – С. 115–122.
6. Klepikov P. N., Oskorbin D. N., Rodionov E. D. *Homogeneous Ricci solitons of four-dimensional Lie groups with a left-invariant Riemannian metric* // Doklady mathematics. – 2015. – V. 92(3). – P. 701–703.

HOMOGENEOUS INVARIANT RICCI SOLITONS ON THREE-DIMENSIONAL LIE GROUPS WITH VECTORIAL TORSION

P.N. Klepikov, E.D. Rodionov

Homogeneous invariant Ricci solitons on three-dimensional Lie groups with a left-invariant Riemannian metric and invariant vectorial torsion are considered. It is shown that, unlike the case of Levi-Civita connection, there are non-trivial examples of such Ricci solitons.

Keywords: Lie groups, connection with vectorial torsion, homogeneous Ricci solitons

УДК 514.765

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С ИЗОТРОПНЫМ ТЕНЗОРОМ СХОУТЕНА–ВЕЙЛЯ

С.В. Клепикова¹, О.П. Хромова²¹ klepikova.svetlana.math@gmail.com; Алтайский государственный университет² khromova.olesya@gmail.com; Алтайский государственный университет

В работе рассматриваются четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена–Вейля. Приведен алгоритм позволяющий получить полную классификацию таких многообразий.

Ключевые слова: локально однородное псевдориманово многообразие, изотропный тензор Схоутена–Вейля

1. Введение, определения и постановка задачи.

(Псевдо)римановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля естественным образом возникают при изучении локально конформно однородных (псевдо)римановых пространств [1]. Ранее данные многообразия в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой изучались в работах [2, 3]. В них была получена полная классификация метрических групп Ли, тензор Схоутена–Вейля которых является изотропным. Данная работа продолжает исследования многообразий с изотропным тензором Схоутена–Вейля в случае четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии.

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n ; X, Y, Z, V — векторные поля на M . Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X, Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X, Y]}Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим как

$$r(X, Y) = \text{tr}(V \rightarrow R(X, V)Y), \quad s = \text{tr}_g(r).$$

Тензор Схоутена–Вейля определяется следующим равенством

$$SW(X, Y, Z) = \nabla_Z A(X, Y) - \nabla_Y A(X, Z),$$

где $A = \frac{1}{n-2} \left(r - \frac{sg}{2(n-1)} \right)$ — тензор одномерной кривизны. Если скалярная кривизна (псевдо)риманова многообразия является константой (например, в случае локально однородного пространства), то формула для вычисления тензора Схоутена–Вейля упрощается:

$$SW = \frac{1}{n-2} (\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z)).$$

Определение. Тензор Схоутена–Вейля SW будем называть изотропным, если квадрат его длины равен нулю ($\|SW\|^2 = 0$), а сам тензор не равен нулю ($SW \neq 0$).

При достаточно малой размерности локально однородного псевдориманова пространства становится возможным применение систем компьютерной математики для изучения локально однородных (псевдо)римановых многообразий с изотропным тензором Схоутена–Вейля.

В качестве примера рассмотрим четырехмерное локально однородное псевдориманово пространство $1.1^1.3$ (по классификации [4]). В алгебре Ли \mathfrak{g} существует базис $\{e_1, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базис \mathfrak{g} , где $\{e_1\}$ и $\{u_i\}$ базисы \mathfrak{h} и \mathfrak{m} соответственно. Скобки Ли на базисных векторах имеют вид:

$$[e_1, u_1] = u_1, [e_1, u_3] = -u_3, [u_1, u_3] = e_1 + u_2.$$

Вычислим представление изотропии:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и запишем условие инвариантности метрического тензора:

$$\alpha_{12} = 0, \alpha_{14} = 0, \alpha_{11} = 0, \alpha_{23} = 0, \alpha_{33} = 0, \alpha_{34} = 0.$$

Решая данную систему уравнений относительно компонент метрического тензора, получаем что инвариантное скалярное произведение обязано иметь вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

и иметь либо лоренцеву $(+, +, +, -)$, либо нейтральную $(+, +, -, -)$ сигнатуру.

Далее, используя вышеприведенные формулы, вычисляем компоненты тензора Схоутена–Вейля

$$SW_{132} = -SW_{123} = SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2},$$

$$SW_{134} = -SW_{143} = SW_{341} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2},$$

и квадрат его длины

$$\|SW\|^2 = -\frac{3\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})^2}{4\alpha_{13}^6}.$$

Решая уравнение $\|SW\|^2 = 0$, получим два решения

$$\alpha_{22} = 0 \text{ или } \alpha_{22} = \alpha_{13},$$

однако во втором случае тензор Схоутена–Вейля будет тривиальным. Таким образом, получим следующую теорему.

Теорема. *Четырехмерное локально однородное псевдориманово пространство $1.1^1.3$ имеет изотропный тензор Схоутена–Вейля тогда и только тогда, когда инвариантная метрика g имеет вид*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

где $\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$. В этом случае инвариантное скалярное произведение обязано иметь нейтральную $(+, +, -, -)$ сигнатуру.

В результате проведенных исследований построена математическая модель, которая позволяет получить полную классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и тривиальным тензором Схоутена–Вейля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_a).

Литература

1. Rodionov E. D., Slavskii V. V. *Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces* // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2002. – V. 43. – № 2. – P. 271–282.
2. Rodionov E. D., Slavskii V. V., Chibrikova L. N. *Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces* // Siberian Advances in Mathematics. – 2007. – V. 17. – № 3. – P. 186–212.
3. Khromova O. P., Klepikov P. N., Klepikova S. V., Rodionov E. D. *About the Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorentzian Lie groups* // arXiv:1708.06614, 2017.
4. Komrakov B. B. *Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces* // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 8. – P. 33–165.

FOUR-DIMENSIONAL LOCALLY HOMOGENEOUS PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH THE ISOTROPIC SCHOUTEN–WEYL TENSOR

S.V. Klepikova, O.P. Khromova

In this paper, four-dimensional locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds with a nontrivial isotropy subgroup and the isotropic Schouten–Weyl tensor are considered. An algorithm for obtaining a complete classification of such manifolds is given.

Keywords: locally homogeneous pseudo-Riemannian manifold, isotropic Schouten–Weyl tensor

УДК 514.772.22

ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РОДА $P \geq 0$

С.Б. Климентов¹

¹ sbklimentov@sfedu.ru; Южный федеральный университет, Институт математики ВШЦ РАН

В докладе даётся обзор работ по изгибаниям компактных поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны, как замкнутых, так и с краем.

Ключевые слова: изгибания, бесконечно малые изгибания

Обозначим M^2 двумерное дифференцируемое многообразие (возможно, с краем) с дифференцируемой структурой класса C_α^k , $k \geq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ (обозначения функциональных пространств стандартные [1]); (u^1, u^2) — локальные координаты в некоторой (произвольной) координатной окрестности U . Будем всегда считать, что замыкание \bar{U} компактно и содержится в некоторой координатной окрестности V той же дифференцируемой структуры.

Обозначим $g = g_{ij} du^i du^j$ риманову метрику на M^2 класса C_α^{k-1} . Таким образом, (M^2, g) — двумерное риманово многообразие класса C_α^{k-1} . Аналогично определим трёхмерное риманово многообразие (риманово пространство) (R^3, G) .

Под поверхностью S класса C_α^k в (R^3, G) будем понимать изометрическое погружение $f: (M^2, g) \rightarrow (R^3, G)$ класса C_α^k такое, что $f(M^2) = S$. Там, где это не может вызвать недоразумений, будем отождествлять образ $f(M^2) = S$ с погружением f .

Две *различные* изометричные поверхности $S \neq S'$ одной регулярности в (R^3, G) , вообще говоря, являются погружениями *различных* изометричных римановых многообразий. В случае регулярности C_α^k , $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, эти поверхности можно считать погружениями *одного и того же* риманова многообразия (M^2, g) ; при этом соответствующие друг другу по изометрии точки на S и S' будут иметь общий прообраз на M^2 [15], [12].

В римановом пространстве, в котором имеется группа движений, поверхность S называется *однозначно определённой*, если любая другая поверхность S' , изометричная S , конгруэнтна S . Конгруэнтные поверхности называют *тривиально изометричными*.

Будем считать риманово пространство R^3 евклидовым пространством E^3 , а многообразие M^2 компактным. Зафиксируем на M^2 некоторое конечное покрытие координатными окрестностями $\{U_i\}_{i=1}^n$. Если вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(P) \in C_\alpha^k(M^2)$, определим её норму следующим образом [5]:

$$\|\mathbf{r}\|_{C_\alpha^k(M^2)} = \max_{i=1, \dots, n} \|\mathbf{r}\|_{C_\alpha^k(\bar{U}_i)}.$$

Это банахова норма. Аналогично для скалярных функций и тензорных полей соответствующей регулярности.

Деформацией класса C^m , $m \geq 0$, по параметру поверхности $S = f(M^2)$ будем называть отображение $f(t) \equiv f_t$ класса C^m промежутка вещественной оси, содержащего нуль $([0, 1], (-\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon > 0$, и т. д.) в банахово пространство вектор-функций класса $C_\alpha^k(M^2)$ такое, что:

- 1) $f(0) \equiv f_0 = f(M^2) = S$;
- 2) для любого t вектор-функция f_t задаёт погружение класса C_α^k многообразия M^2 в E^3 .

Если для любого t поверхность $S_t = f_t(M^2)$ изометрична поверхности $S = f_0(M^2)$, то деформация называется *изгибанием* класса C^m по параметру. Если для любого t изометрия тривиальна, изгибание называется *тривиальным*. При отсутствии у поверхности нетривиальных изгибаний её называют *неизгибаемой*.

Для некомпактных поверхностей определения аналогичны, только опираться приходится не на банахову структуру, а на структуру счётно-нормированного пространства Фреше.

Обобщения этих определений на случай риманова пространства несложны и используют некоторое фиксированное покрытие координатными компактными окрестностями уже и пространства R^3 .

Ясно, что все характеристики деформируемой поверхности $S_t = f_t(M^2)$ будут функциями класса C^m относительно параметра t , как то: первый и второй основные тензоры (формы), гауссова и средняя кривизна и т.д. Если $\lambda = \lambda(t)$ — какая либо величина, связанная с поверхностью S_t , то вариацией функции $\lambda(t)$ называют выражение (если $m \geq 1$):

$$\delta\lambda = \frac{d\lambda(t)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Если при деформации S_t имеем $\delta I = 0$, где $I = g_{ij} du^i du^j$ — первая квадратичная форма поверхности, то деформация называется бесконечно малым (б. м.) изгибанием поверхности S , а векторное поле δf — полем бесконечно малого изгибания. Принято отождествлять б. м. изгибания с одинаковым полем δf [11], то есть, б. м. изгибание фактически есть класс эквивалентности деформаций.

В случае наличия в R^3 движений, б. м. изгибание называется *тривиальным*, если δf есть сужение на S поля скоростей движения пространства R^3 .

Поверхность, у которой отсутствуют нетривиальные б. м. изгибания, называется *жесткой*.

На существование в некоторых римановых пространствах (достаточно сложной топологической структуры) замкнутых регулярных поверхностей рода $p \geq 1$ и положительной внешней кривизны указал А.В. Погорелов [13], [14, гл. 6, § 12]. Там же им доказано, что поле любого б. м. изгибания замкнутой поверхности рода $p = 1$ и положительной внешней кривизны есть тождественный нуль при условии закрепления одной точки поверхности и показано на примере, что условие закрепления точки существенно. Класс регулярности пространства и поверхности при этом не фиксируется, но фактически предполагается C^k , $k \geq 4$.

Дальнейшее развитие теории изгибаний поверхностей рода $p > 0$ положительной внешней кривизны проводилось В.Т. Фоменко и его учениками: Е.В. Тюриковым, С.Б. Климентовым, Ю.П. Золотухиным. В.Т. Фоменко в работе [18] предложил для изучения изгибаний поверхностей ненулевого рода аппарат теории обобщённых аналитических функций на римановых поверхностях и доказал сформулированную А.В. Погореловым теорему о жесткости замкнутых поверхностей рода $p > 1$ положительной внешней кривизны. В [19] В.Т. Фоменко также доказана неизгибаемость таких поверхностей в пространстве постоянной кривизны; в случае $p = 1$ при условии закрепления одной точки поверхности. В обеих этих работах требования на регулярность C_α^k , $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$.

Также деформации замкнутых поверхностей исследовались в [21], [9], [2], [4].

Поверхности ненулевого рода и положительной внешней кривизны с краем существуют не только в римановых пространствах сложной топологической структуры, но и в трёхмерном евклидовом пространстве. Существование поверхностей рода $p \geq 1$, положительной, отгороженной от нуля гауссовой кривизны, с регулярными краями строго доказано в [10]; как могут выглядеть такие поверхности, можно посмотреть на рисунке, приведённом в [12].

Первый вопрос, который здесь возникает, существуют ли вообще нетривиальные изгибания и б. м. изгибания таких поверхностей? Ответ положительный и он вполне аналогичен ответу на этот же вопрос для односвязных, гомеоморфных кругу поверхностей положительной кривизны. Сформулируем его поточнее.

Пусть $S = f(M^2) \subset R^3$ — компактная поверхность рода $p \geq 0$ с краем, строго положительной внешней кривизны $K_e \geq \text{const} > 0$. Считаем, что $S, R^3 \in C_\alpha^k$, $k \geq 5$, $0 < \alpha < 1$. Вводя в окрестности каждой точки $P \in M^2$ сопряжённо изотермическую систему координат (u, v) , в которой вторая основная форма поверхности S имеет канонический вид [1, гл. 2, § 6]

$$II = \Lambda(u, v)(du^2 + dv^2) > 0,$$

превратим M^2 в риманову поверхность с краем с локальной униформирующей $z = u + iv$, $i^2 = -1$ [24, гл. 2, §1].

В [20], [5], [6] установлено, что всякой голоморфной на римановой поверхности M^2 функции $\Phi(z) \in C_\alpha^{k-2}(M^2)$ соответствует вполне определённое б. м. изгибание поверхности S , причём различным функциям $\Phi_1(z) \neq \Phi_2(z)$ соответствуют различные б. м. изгибания. Также каждому семейству $\{\Phi_t(z)\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \subset C_\alpha^{k-2}(M^2)$, $\varepsilon > 0$, голоморфных на римановой поверхности M^2 функций, класса C^m , $m \geq 0$, по параметру t , соответствует вполне определённое изгибание класса C^m поверхности S .

Поскольку изгибаний и б. м. изгибаний у поверхности положительной кривизны с краем «много», естественной является задача об изгибаниях при различных внешних условиях, в том числе и краевых.

Различные краевые задачи для б.м. изгибаний довольно обстоятельно исследованы в работах [2] – [4], [6] – [8], [16] – [17], [22] – [23].

Более сложный (нелинейный) случай конечных изгибаний изучен меньше; в работах [22], [2] установлены лишь достаточные условия отсутствия изгибаний в пространствах постоянной кривизны, в [10] показано, что изгибания могут быть со сколь угодно большим изменением второй основной формы в фиксированной точке.

Приведём ещё один, недавний результат относительно достаточных условий однозначной определённости поверхности положительной гауссовой кривизны в трёхмерном евклидовом пространстве (который вполне мог быть получен 40 лет назад).

К автору как-то обратился И.Х. Сабитов с вопросом: будут ли конгруэнтны две изометричные, локально выпуклые, регулярные поверхности положительной гауссовой кривизны, с краями, если конгруэнтны края этих поверхностей? Для ограниченных выпуклых поверхностей с краями утвердительный ответ на этот вопрос следует из результатов А.В. Погорелова по однозначной определённости общих выпуклых поверхностей с краем [14, гл. 3, § 7]. Для компактных поверхностей произвольного рода $p \geq 0$, положительной, отгороженной от нуля гауссовой кривизны, с регулярными краями, верен более общий результат [12].

Теорема. Пусть S и S' — изометричные поверхности класса C_α^k , $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$, рода $p \geq 0$, гауссова кривизна которых удовлетворяет условию $K \geq k_0 = \text{const} > 0$.

Если края этих поверхностей $\Gamma = \partial S$ и $\Gamma' = \partial S'$ содержат соответствующие друг другу по изометрии конгруэнтные дуги $\gamma \subset \Gamma$ и $\gamma' \subset \Gamma'$, то поверхности S и S' конгруэнтны.

Дуги γ и γ' можно считать расположенными (частично или полностью) внутри поверхностей S и S' .

Литература

1. Векуа И. Н. *Обобщённые аналитические функции*. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
2. Золотухин Ю. П. *Об однозначной определенности поверхностей с разрезами в пространстве постоянной кривизны* // Украинский геом. сб. – 1984. – В. 27. – С. 42–49.
3. Золотухин Ю. П. *О жесткости поверхностей ненулевого рода с краем и разрезами в римановом пространстве при внешних связях* // Изв. Сев.- Кав. центра высшей школы. Сер. «Естественные науки». – 1984. – № 1. – С. 22–27.
4. Золотухин Ю. П. *Изгибания поверхностей положительной внешней кривизны с разрезами в римановом пространстве* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса: Одесский госуниверситет им. И. И. Мечникова. 1980. – 130 с.
5. Климентов С. Б. *Изгибания поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны* // Украинский геом. сб. – 1976. – В. 19. – С. 37–56.
6. Климентов С. Б. *Бесконечно малые изгибания поверхностей рода $p \geq 1$ положительной внешней кривизны с краевым условием обобщённого скольжения* // Украинский геом. сб. – 1976. – В. 19. – С. 57–65.
7. Климентов С. Б. *Изгибания поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны в римановом пространстве* / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса: Одесский госуниверситет им. И. И. Мечникова. 1976. – 116 с.
8. Климентов С. Б. *О гладкости решений краевых задач теории изгибаний поверхностей рода $p \geq 0$* // Украинский геом. сб. – 1978. – В. 21. – С. 34–44.
9. Климентов С. Б. *О деформациях замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ с заданным бесконечно малым изменением метрики* // Матем. сб. – 1979. – Т. 108, № 3. – С. 307–325.
10. Климентов С. Б. *О степени изгибаемости поверхностей положительной кривизны* // Украинский геом. сб. – 1981. – В. 24. – С. 39–52.
11. Климентов С. Б. *Введение в теорию изгибаний. Двумерные поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве*. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. – 160 с.
12. Климентов С. Б. *Об однозначной определённости локально выпуклых поверхностей положительной кривизны рода $p \geq 0$ с краем* // Сиб. матем. журн. – 2019. – Т. 60. – № 1. – С. 109–117.
13. Погорелов А. В. *Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве*. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1957.
14. Погорелов А. В. *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*. – М.: Наука, 1969. – 760 с.
15. Сабитов И. Х. *К вопросу о гладкости изометрий* // Сибир. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 4. – С. 169–176.
16. Тюриков Е. В. *О жесткости поверхностей рода $p \geq 1$ с краем, расположенных в пространстве Лобачевского* // Сиб. матем. журн. – 1976. – Т. 17. – № 5. – С. 1129–1140.
17. Тюриков Е. В. *Некоторые краевые задачи теории изгибаний поверхностей в пространстве Лобачевского* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Ростов-на-Дону: Ростовский госуниверситет. – 1975. – 132 с.
18. Фоменко В. Т. *О жесткости и однозначной определённости замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ в римановом пространстве* // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 213. – № 1. – С. 45–48.

19. Фоменко В. Т. *Об однозначной определённости замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ в пространстве постоянной кривизны* // Матем. зам. – 1974. – Т. 16. – В. 3. – С. 441–445.
20. Фоменко В. Т., Климентов С. Б. *Об изгибаниях поверхностей рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны в римановом пространстве* // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 5. – С. 1064–1066.
21. Фоменко В. Т., Климентов С. Б. *Неизгибаемость замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ и положительной внешней кривизны* // Матем. сб. – 1976. – Т. 101. – № 3. – С. 402–415.
22. Фоменко В. Т., Тюриков Е. В. *Исследование основных уравнений теории поверхностей положительной внешней кривизны, расположенных в пространстве Лобачевского* // Изв. Сев.– Кав. центра высшей школы. Сер. «Естественные науки». – 1977. – № 3. – С. 3–7.
23. Фоменко В. Т., Золотухин Ю. П. *Исследование некоторых классов двусторонних внешних связей теории изгибаний поверхностей* // Изв. вузов, сер. Матем. – 1984. – № 11. – С. 71–74.
24. Шиффер М., Спенсер Д. К. *Функционалы на конечных римановых поверхностях*. – М.: Издательство ИЛ, 1957. – 347 с.

BENDINGS OF THE SURFACES OF GENUS $P \geq 0$

S.V. Klimentov

This paper is an overview of the works on bendings of compact surfaces of genus $p \geq 0$ with positive external curvature. The closed surfaces and the surfaces with the boundary are under consideration.

Keywords: bendings, infinitesimal bendings

UDC 514.822

GEOMETRY OF COMMUTATORS

A. Kocherova¹, I. Zhdanovskiy²

¹ akocherova@ya.ru; Moscow Institute of Physics and Technology

² ijdanov@mail.ru; Moscow Institute of Physics and Technology, Higher School of Economics

The article discusses a recursive approach to listing some classes of combinatorial problems. Classical combinatorial objects are frequent guests of olympiad competitions of various levels. The combinatorial problems in which they arise are based on a dependence on recurrence relations and therefore, most often, are solved using the dynamic programming method.

Keywords: Igusa quartic, commutator subspace, configuration of points in projective space

Consider algebra R with commutative subalgebra S . Assume that there is a surjective morphism of S -modules: $S^{\oplus r} \rightarrow R$. In this case dimension of irreducible R -modules is less or equal r . Actually, let V be irreducible R -module. Consider V as S -module. Since S is commutative there is a one-dimensional S -module M such that $M \subset V$. Using standard arguments, we get that $\text{Hom}_S(M, V) \cong \text{Hom}_R(R \otimes_S M, V) \neq 0$. Since V is irreducible S -module, we obtain that morphism $R \otimes_S M \rightarrow V$ is surjective, and hence, $\dim_{\mathbb{C}} V \leq r$. There are many examples of algebras with property: dimension of irreducible representations is bounded: finite-dimensional algebras, affine Hecke algebras, group algebras of amenable discrete matrix groups etc. These algebras play intermediate role between commutative algebras and algebras closely related to free ones.

Let A and B be a finite-dimensional algebras. Fix subspaces $\bar{A} \subset A$ and $\bar{B} \subset B$ such that $A = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \bar{A}$ and $B = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \bar{B}$.

Proposition 1. *Let V be a subspace $\bar{A} \oplus \bar{B} \subset A * B$. Denote by I the two-sided ideal of $A * B$ such that $[V, V] \subset I$. Denote by \mathcal{C} the quotient $\mathcal{C} = A * B / I$. If natural projections $\pi_1 : V \rightarrow \bar{A}$ and $\pi_2 : V \rightarrow \bar{B}$ are surjective then dimension of irreducible representations of \mathcal{C} is less or equal $\min(\dim_{\mathbb{C}} A, \dim_{\mathbb{C}} B)$.*

This proposition can be formulated in terms of quantum mechanics as follows. Assume that there are two algebras of observables A and B . Consider quantum system generated by A and B . Also, assume that there are observables of type $a_i + b_i$ which are simultaneously compatible, where a_i and b_i generate A and B as vector space respectively. In this case one can reduce quantum system into direct sum of quantum system of rank less or equal $\min(\dim_{\mathbb{C}} A, \dim_{\mathbb{C}} B)$.

Consider the case $A \cong B \cong \mathbb{C}^{\oplus 3}$. Denote by $p_i, i = 1, 2, 3$ and $q_i, i = 1, 2, 3$ the orthogonal idempotents of A and B respectively. It is easy that $\sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{j=1}^3 q_j = 1$. Let \bar{A} and \bar{B} be the two-dimensional subspaces with bases p_1, p_2 and q_1, q_2 respectively. Consider the set of two-sided ideals of $A * B$ generated by own element of $p_x = x_{11}[p_1, q_1] + x_{12}[p_1, q_2] + x_{21}[p_2, q_1] + x_{22}[p_2, q_2]$ for $x \in \mathbb{P}([\bar{A}, \bar{B}]^*) = \mathbb{P}^3$. Thus, we have a family algebras $\mathcal{C}_x = A * B / I_x, x \in \mathbb{P}^3$, where I_x is generated by p_x .

Consider $\text{Gr}(2, 4) = \text{Gr}(2, \bar{A} \oplus \bar{B})$. We have the following mapping: $f : \text{Gr}(2, \bar{A} \oplus \bar{B}) \dashrightarrow \mathbb{P}([\bar{A}, \bar{B}]^*)$ defined by correspondence $(w_1, w_2) \mapsto (x_{11} : x_{12} : x_{21} : x_{22})$, where $[w_1, w_2] = x_{11}[p_1, q_1] + x_{12}[p_1, q_2] + x_{21}[p_2, q_1] + x_{22}[p_2, q_2]$, where w_1, w_2 is a basis of W . It can be shown in usual way that f does not depend on the choice of basis of W . Map f is a composition of Plucker embedding into $\mathbb{P}(\Lambda^2(\bar{A} \oplus \bar{B})) = \mathbb{P}^5$ and projection onto $\mathbb{P}([\bar{A}, \bar{B}]^*)$. It is well-known that image of $\text{Gr}(2, 4)$ is a Plucker quadric. Projection $\text{Gr}(2, \bar{A} \oplus \bar{B})$ onto $\mathbb{P}([\bar{A}, \bar{B}]^*)$ is not defined in two points corresponding to subspaces \bar{A} and \bar{B} . Thus, $f^{-1}(x)$ is a conic without two points for any $x \in \mathbb{P}([\bar{A}, \bar{B}]^*)$.

Denote by Z_A and Z_B the subvarieties of $\text{Gr}(2, \bar{A} \oplus \bar{B})$ consisting of W such that $W \cap \bar{A} \neq 0$ and $W \cap \bar{B} \neq 0$ respectively.

Proposition 2. *Consider quadric $Q \subset \mathbb{P}([\bar{A}, \bar{B}]^*)$ given by equation $x_{11}x_{22} = x_{12}x_{21}$. Denote by $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 \subset Q$ the line given by equations: $x_{11} = x_{12} = 0, x_{21} = x_{22} = 0, x_{11} = x_{21} = 0, x_{12} = x_{22} = 0, x_{11} = x_{12}, x_{21} = x_{22}$ and $x_{11} = x_{21}, x_{12} = x_{22}$ respectively. Then we have the following statements:*

- for any point $x \in Q$ there is a subspace $W \in f^{-1}(x)$ with basis a, b where $a \in \bar{A}$ and $b \in \bar{B}$. It means that we can write generator of ideal in the following manner: $[a, b]$
- for any $x \in \bigcup_{i=1}^6 l_i$ there is a subspace $W \in f^{-1}(x)$ with basis $p_k, b \in \bar{B}$ or $a \in \bar{A}, q_k$ for arbitrary $k \in \{1, 2, 3\}$.

Corollary

- If $x \in Q \setminus \bigcup_{i=1}^6 l_i$ then algebra $\mathcal{C}_x \cong \mathbb{C}^{\oplus 9}$
- if $x \in \bigcup_{i=1}^6 l_i \setminus \bigcup_{i \neq j} l_i \cap l_j$ then algebra $\mathcal{C}_x \cong \mathbb{C}^{\oplus 6} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$
- if $x \in \bigcup_{i \neq j} l_i \cap l_j$ then $\mathcal{C}_x \cong \mathbb{C}^{\oplus 4} * \mathbb{C}^{\oplus 2} * \mathbb{C}^{\oplus 2}$.

Consider open dense set $U = \text{Gr}(2, \overline{A} \oplus \overline{B}) \setminus \{Z_A \cup Z_B\}$. It is easy that $W \in U$ iff $\pi_1(W) = \overline{A}$ and $\pi_2(W) = \overline{B}$.

Proposition 3 *We have the following isomorphism $\mathcal{C}_x \cong \mathbb{C}^{\oplus 9} \oplus M_3(\mathbb{C})$ for general $x \in U$.*

Three-dimensional representations of algebras $\mathcal{B}_x, x \in \mathbb{P}^3$ have the following geometrical description. Consider orthogonal projectors p_1, p_2, p_3 and q_1, q_2, q_3 of rank 1 acting in three-dimensional vector space V . We interpret images of projectors $p_i, i = 1, 2, 3$ and $q_j, j = 1, 2, 3$ as points in $\mathbb{P}V = \mathbb{P}^2$. Denote by P_1, P_2, P_3 and Q_1, Q_2, Q_3 the points in $\mathbb{P}V = \mathbb{P}^2$ corresponding to images of projectors p_1, p_2, p_3 and q_1, q_2, q_3 respectively. It is easy that points P_1, P_2, P_3 define orthogonal projectors p_1, p_2, p_3 . Analogous statement true for points Q_1, Q_2, Q_3 and projectors q_1, q_2, q_3 . Consider the commutator space generated by $[p_i, q_j], i, j = 1, 2, 3$. Using relations $\sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{j=1}^3 q_j = 1$, we get that dimension of commutator space is less or equal 4.

Proposition 4. *Commutator space generated by $[p_i, q_j]$ has dimension less or equal 3 if and only if there is a conic passing through points $P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3$.*

Recall that moduli variety of six ordered points in a conic is Igusa quartic I_Q . Using proposition 4, this variety parameterizes (up to isomorphism) three-dimensional representations of algebras $\mathcal{C}_x, x \in \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*) = \mathbb{P}^3$. Consider the mapping: $g : I_Q \rightarrow \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$ defined by the natural correspondence. It can be shown in usual way that g is birational.

Proposition 5. *Algebra $\mathcal{C}_x, x \in \mathbb{P}([\overline{A}, \overline{B}]^*)$ is infinite-dimensional iff $\dim_{\mathbb{C}} g^{-1}(x) > 0$.*

In particular, if $x = (1 : 0 : 0 : -1)$ then algebra \mathcal{B}_x is infinite-dimensional (cf [1]).

Also, one can formulate the proposition 4 in terms of linear operators:

Corollary. *Consider two linear operators L_1, L_2 acting in three-dimensional space V . Eigenvectors of L_1 and L_2 define configuration of six points in \mathbb{P}^2 . If there is a conic passing through these six points then there are a polynomials f_1, f_2 such that $[L_1 + f_1(L_2), L_1^2 + f_2(L_2)] = 0$ and $\deg f_i \leq 2, i = 1, 2$.*

There is a well-defined Gale involution on the set of configurations of $2k + 2$ points (i.e. PGL_{k+1} - orbits) in \mathbb{P}^k (cf [2]). If configuration is fixed under Gale transform, then configuration is *self-associated*. In particular, configuration of 6 points in \mathbb{P}^2 is self-associated iff there is a conic passing through these 6 points.

Consider two linear operators L_1 and L_2 acting on three-dimensional vector space V . Consider moduli variety \mathcal{M} of pairs (L_1, L_2) up to action of $\text{PGL}(V)$. It is known that there is a well-defined involution τ on \mathcal{M} (cf.[3]). There is a surjective morphism $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^6$ given by functions $\text{Tr}L_1^i, \text{Tr}L_2^i, i = 1, 2, 3$. The fiber of this morphism is a moduli of configurations of six points in \mathbb{P}^2 . Involution τ is well-defined on fibers and coincides with Gale involution.

Also, we have the following generalization of proposition 4.

Proposition 6. *Consider orthogonal projectors p_1, \dots, p_{k+1} and q_1, \dots, q_{k+1} of rank 1 acting on $k + 1$ - dimensional vector space V . It is easy that these projectors are defined (up to conjugacy) by configuration of $2k + 2$ points in $\mathbb{P}V = \mathbb{P}^k$. This configuration is self-associated iff commutator space $[p_i, q_j], i, j = 1, \dots, k + 1$ has dimension less or equal $\frac{k(k+1)}{2}$.*

References

1. Kocherova, Zhdanovskiy On the algebra generated by projectors with commutator relation Lobachevskii Journal of Math, 2017, vol.38, No.4, p.670-687.
2. Eisenbud, Popescu Projective geometry of the Gale transform Journal of Algebra, 230, 127-173(2000).
3. Lawton Poisson geometry of $SL(3, \mathbb{C})$ - character varieties relative to a surface with boundary Trans.of the Amer. Math. Soc. vol.365, No.5, May 2009, p.2397-2429

ГЕОМЕТРИЯ КОММУТАТОРОВ

А. Кочерова, И. Ждановский

В статье обсуждается рекурсивный подход к перечислению некоторых классов комбинаторных задач. Классические комбинаторные объекты – частые гости олимпиадных соревнований различного уровня. Комбинаторные проблемы, в которых они возникают, опираются на зависимость от рекуррентных соотношений и поэтому, чаще всего, решаются с помощью метода динамического программирования.

Ключевые слова: квартика Игузы, коммутативное подпространство, конфигурация точек в проективном пространстве

УДК 514.75

О ГЕОМЕТРИИ ОРБИТ ПРОСТРАНСТВА ЦЕНТРОПРОЕКТИВНЫХ РЕПЕРОВ

А.В. Кулешов¹

¹ arturkuleshov@yandex.ru; Балтийский федеральный университет имени И.Канта

Рассматривается n -мерное проективное пространство с выделенной точкой (центром). На многообразии проективных реперов данного пространства, адаптированных центру, определено действие матричной аффинной группы порядка n . Показано, что линейные реперы, т. е. базисы касательного векторного пространства к проективному пространству в его центре, можно отождествить с орбитами адаптированных проективных реперов по действию некоторого нормального делителя этой группы. При помощи многомерного обобщения теоремы Дезарга получен критерий принадлежности двух адаптированных проективных реперов одной орбите.

Ключевые слова: проективное пространство, проективный репер, пространство орбит, обобщенная теорема Дезарга

1. Основные понятия. Пусть \mathbb{P}_n — n -мерное проективное пространство, V_{n+1} — ассоциированное с ним $(n+1)$ -мерное векторное пространство; A — выделенная точка пространства \mathbb{P}_n , называемая его центром; $\mathcal{R} = \{A, A_1, \dots, A_n, E\}$ — адаптированный проективный репер, $\vec{\mathcal{R}} = \{\vec{A}_0, \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n\}$ — базис пространства V_{n+1} , порождающий данный репер, (x^0, x^1, \dots, x^n) — однородные координаты точек пространства \mathbb{P}_n в репере \mathcal{R} , (X^1, \dots, X^n) — соответствующие неоднородные координаты, $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$ — множество всех адаптированных проективных реперов; $V = T_A \mathbb{P}_n$ — касательное векторное пространство к \mathbb{P}_n в центре A ; $\mathcal{F}(V)$ — множество всех базисов пространства V [2].

Формулы перехода от одного адаптированного репера к другому имеют вид

$$X^i = \frac{\alpha_j^i \tilde{X}^j}{1 + \alpha_j \tilde{X}^j}, \quad \det(\alpha_j^i) \neq 0. \quad (1)$$

Лемма 1 (см. [5]). *Существует канонический изоморфизм векторных пространств*

$$T_A \mathbb{P}_n \cong \hat{A}^* \otimes (V_{n+1} / \hat{A}),$$

где \hat{A} — одномерное подпространство в V_{n+1} , соответствующее точке A .

В дальнейшем каждый вектор $\vec{\xi} \in V$ будем отождествлять с линейным оператором $\xi: \hat{A} \rightarrow V_{n+1} / \hat{A}$, соответствующим вектору $\vec{\xi}$ при данном изоморфизме. Хорошо известно, что каждая локальная карта на произвольном гладком многообразии порождает поле натурального базиса в точках области данной карты. В случае аффинной карты (X^1, \dots, X^n) такой базис может быть интерпретирован следующим образом:

Лемма 2. *Для любого адаптированного репера \mathcal{R} найдется единственный базис $\vec{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ касательного пространства V такой, что для некоторого (u , как следствие, любого) базиса $\vec{\mathcal{R}}$, порождающего данный репер, справедливы равенства*

$$\xi_i(\vec{A}_0) = \vec{A}_i + \hat{A}, \quad i = \overline{1, n}.$$

2. Правые действия матричных групп на многообразиях $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$ и $\mathcal{F}(V)$. Рассмотрим два адаптированных репера \mathcal{R} и \mathcal{R}' , и пусть формула перехода от первого ко второму имеет вид (1). Из коэффициентов данной формулы составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $A_0 \in \mathbf{GL}(n)$, α — строка из n элементов. Хорошо известно, что множество всех невырожденных матриц вида (2) образует группу $\mathbf{GA}(n)$. Группа $\mathbf{T}(n)$, образованная матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mathbb{1}_n \end{pmatrix},$$

является ее нормальным делителем, изоморфным аддитивной группе \mathbb{R}^n (здесь $\mathbb{1}_n$ — единичная матрица порядка n).

Будем рассматривать (1) как формулу действия матрицы A на репер \mathcal{R} , а репер \mathcal{R}' — соответственно как образ репера \mathcal{R} по данному действию:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cdot A. \quad (3)$$

При этом для любых базисов \vec{R} и \vec{R}' , порождающих реперы \mathcal{R} и \mathcal{R}' соответственно, найдется скалярный множитель $\lambda \neq 0$ такой, что $\lambda \vec{R}' = \vec{R} \cdot A$, где справа стоит обычное произведение матрицы-строки из элементов базиса \vec{R} на матрицу A .

Аналогично, действие матрицы $A_0 \in \mathbf{GL}(n)$ на многообразии $\mathcal{F}(V)$ можно задать по формуле

$$\vec{\mathcal{B}}' = \vec{\mathcal{B}} \cdot A_0, \quad \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{B}}' \in \mathcal{F}(V). \quad (4)$$

Формула (3) задает правое действие матричной группы $\mathbf{GA}(n)$ на многообразии $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$, а формула (4) — правое действие группы $\mathbf{GL}(n)$ на $\mathcal{F}(V)$.

Рассмотрим гомоморфизм групп Ли

$$\gamma: \mathbf{GA}(n) \rightarrow \mathbf{GL}(n), \quad A \mapsto A_0,$$

где матрица A имеет строение (2). Его ядром является $\mathbf{T}(n)$, причем факторгруппа по ядру изоморфна $\mathbf{GL}(n)$.

Если в (3) матрица A принадлежит $\mathbf{T}(n)$, то формула перехода между реперами \mathcal{R} и \mathcal{R}' имеет вид

$$X^i = \frac{\tilde{X}^i}{1 + a_j \tilde{X}^j}. \quad (5)$$

Утверждение 1. *Группа $\mathbf{GL}(n)$ действует справа на пространстве $\mathbf{T}(n)$ -орбит $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ по правилу*

$$[\mathcal{R}] \cdot A_0 = [\mathcal{R} \cdot A], \quad A \in \gamma^{-1}(A_0).$$

Многообразия $\mathcal{Q}(\mathbb{P}_n)$ и $\mathcal{F}(V)$ изоморфны как $\mathbf{GL}(n)$ -пространства, причем $\tilde{\alpha}: [\mathcal{R}] \mapsto \vec{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ — соответствующий изоморфизм.

3. Геометрическое описание H -орбит. Далее рассмотрим общий случай $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{R}, \mathcal{R}' \in \mathcal{F}(\mathbb{P}_n)$, где

$$\mathcal{R} = \{A, A_1, \dots, A_n, E\}, \quad \mathcal{R}' = \{A, A'_1, \dots, A'_n, E'\}.$$

Определение 1. *Реперы \mathcal{R} и \mathcal{R}' называются эквивалентными, если они принадлежат одной и той же $\mathbf{T}(n)$ -орбите.*

Определение 2. *Реперы \mathcal{R} и \mathcal{R}' называются перспективными, если*

$$A'_i \in A_i A_0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad E' \in E A_0,$$

где, например, $E A_0$ — прямая, проходящая через точку E и центр A_0 .

Утверждение 1. *Пусть \mathcal{R} и \mathcal{R}' — произвольные адаптированные реперы. Тогда \mathcal{R} и \mathcal{R}' перспективны в том и только в том случае, если формулы перехода от \mathcal{R} к \mathcal{R}' имеют вид*

$$X^i = \frac{h \tilde{X}^i}{1 + a_j \tilde{X}^j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

для некоторых коэффициентов $h \neq 0, a_1, \dots, a_n$.

Теорема 1. *Два адаптированных проективных репера \mathcal{R} и \mathcal{R}' эквивалентны тогда и только тогда, когда, во-первых, они перспективны, и, во-вторых, коэффициент h в правой части формулы (6) равен единице.*

Определение 3. Назовем реперы \mathcal{R} и \mathcal{R}' строго перспективными, если они перспективны и их соответствующие точки не совпадают, т. е.

$$A'_i \neq A_i \quad (i = \overline{1, n}), \quad E' \neq E.$$

Для произвольного конечного набора подмножеств $Y_1, \dots, Y_s \subset \mathbb{P}_n$ ($s \in \mathbb{N}$) обозначим через $\langle Y_1, \dots, Y_s \rangle$ наименьшую (по включению) плоскость пространства \mathbb{P}_n , содержащую все данные подмножества.

Введем обозначения:

$$\mathcal{M} = \langle A_1, \dots, A_n \rangle \quad \mathcal{M}' = \langle A'_1, \dots, A'_n \rangle, \quad \mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'.$$

Для двух строго перспективных реперов \mathcal{R} и \mathcal{R}' определены точки $B_i = A_i E \cap A'_i E'$, $i = \overline{1, n}$, и плоскость $\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')} = \langle B_1, \dots, B_n, \mathcal{N} \rangle$. Кроме того, в данном случае \mathcal{M} и \mathcal{M}' не совпадают, и поэтому $\dim \mathcal{N} = n - 2$.

Теорема 2 (см. [2]). Для любых строго перспективных реперов \mathcal{R} и \mathcal{R}' плоскость $\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')}$ является гиперплоскостью в \mathbb{P}_n .

Замечание. Вспомогательное неравенство $\dim \mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')} \leq n - 1$ также непосредственно вытекает из результатов работы [4]. В случае $n = 2$ получаем классическую теорему Дезарга (см., напр., [1]).

Теорема 3 (см. [2]). Пусть \mathcal{R} и \mathcal{R}' — строго перспективные реперы n -мерного проективного пространства \mathbb{P}_n с центром A . Тогда они эквивалентны в том и только в том случае, когда гиперплоскость $\mathcal{L}_{(\mathcal{R}, \mathcal{R}')}$ проходит через центр.

Литература

1. Ефимов Н. В. *Высшая геометрия*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 584 с.
2. Кулешов А. В. О линейной факторгруппе центропроективной группы // Диф. геом. многообр. фигур. – Калининград: изд-во БФУ им. И.Канта, 2018. – Вып. 49. – С. 112–122.
3. Akivis A., Goldberg V. *Projective differential geometry of submanifolds*. – Amsterdam: North Holland, 1993.
4. Bell P. O. *eneralized theorems of Desargues for n -dimensional projective space* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – № 6. – С. 675–681.
5. Ivey T. A., Landsberg J. M. *Cartan for beginners: Differential geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*. – AMS, Graduate studies in Mathematics. – Vol. 175. – 2003.

ON THE GEOMETRY OF CENTER-PROJECTIVE FRAME SPACE

A.V. Kuleshov

We consider an n -dimensional projective space and a fixed point on it (the center). On the manifold of all the adapted projective frames the action of affine matrix group of order n . It is shown that one can identify linear frames, i.e. bases of the tangent vector space to the projective space, with orbits of adapted projective frames under the action of some normal subgroup of the affine matrix group. By applying some n -dimensional version of the Desargues theorem we could get the criterion of belonging for two adapted projective frames to the same orbit.

Keywords: projective space, projective frame, orbit space, the generalized Desargues theorem

УДК 004.93

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА КОНФОРМНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙМ.В. Куркина¹, В.В. Славский²¹ mavi@inbox.ru; Югорский государственный университет² slavsky2004@mail.ru; Югорский государственный университет

В теории выпуклых подмножеств евклидова пространства важную роль играет двойственность Минковского и преобразование Лежандра выпуклых функций. В работе рассматриваются конформно-плоские римановы метрики положительной одномерной кривизны, определенные на евклидовом пространстве и соответствующие им конформно-выпуклые функции. Для данного класса функций определяется и подробно изучается аналог преобразования Лежандра.

Ключевые слова: геометрия Лобачевского, выпуклые множества, конформно плоские метрики

Пусть R – числовая прямая, R^n – евклидово n -мерное арифметическое пространство, $M^{n+2} = R^n \times R \times R$ – псевдоевклидово пространство, скалярный квадрат вектора $\vec{w} = [\vec{x}, a, c] \in M^{n+2}$ в котором равен $\langle \vec{w} \rangle^2 = |\vec{x}|^2 - 2ac$, где $|\vec{x}|^2$ – скалярный квадрат вектора $\vec{x} \in R^n$. Обозначим через

$$C^+ = \{[\vec{x}, a, c] \in M^{n+2} : |\vec{x}|^2 - 2ac = 0, a > 0, c > 0\},$$

часть изотропного конуса в M^{n+2} . Произвольной конформно-плоской метрике $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ сопоставим вложение [1-4]

$$Z(x) = \frac{1}{f(x)} \left[-x, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{|x|^2}{\sqrt{2}} \right] \in C^+, \quad (1)$$

и двойственное, или сопряженное ему вложение:

$$Z^*(x) = \left[\frac{2f\nabla f - x \|\nabla f\|^2}{2f}, \frac{|\nabla f|^2}{2\sqrt{2}f}, \frac{(2f\nabla f - x \|\nabla f\|^2)^2}{2\sqrt{2}f |\nabla f|^2} \right] \in C^+. \quad (2)$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \langle Z(x), Z^*(x) \rangle &= -1, \quad \langle dZ(x), Z^*(x) \rangle = 0, \\ \langle dZ(x), dZ(x) \rangle &= \frac{(dx, dx)}{f(x)^2}, \quad \langle dZ^*(x), dZ^*(x) \rangle = \frac{(Adx, Adx)}{f(x)^2}, \end{aligned}$$

где симметричная матрица A соответствует квадратичной форме (одномерной секционной кривизне метрики [6]):

$$(A\xi, \xi) = f(x)d^2f(\xi, \xi) - \frac{1}{2}|\nabla f|^2|\xi|^2. \quad (3)$$

Отображение Z изометрично вкладывает метрику $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$, $x \in R^n$, в изотропный конус C^+ , а отображение Z^* изометрично вкладывает двойственную метрику

$ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, $y \in R^n$, в изотропный конус C^+ . Сравнивая формулы (1) и (2) имеем равенство:

$$\left[\frac{2f\nabla f - x|\nabla f|^2}{2f}, \frac{|\nabla f|^2}{2\sqrt{2}f}, \frac{(2f\nabla f - x|\nabla f|^2)^2}{2\sqrt{2}f|\nabla f|^2} \right] \equiv \frac{1}{f^*(y)} \left[-y, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{|y|^2}{\sqrt{2}} \right],$$

откуда получим формулы для двойственной метрики в параметрической форме:

$$f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f|^2}, \quad \vec{y} = \vec{x} - 2f(x) \frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|^2}. \tag{4}$$

Определение. Функцию $g(x) = \sqrt{f(x)}$ назовем конформно-выпуклой если матрица A положительно-определенная, данное условие эквивалентно выполнению трехточечного неравенства

$$g(x) \leq g(x_1) \frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + g(x_2) \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|}, \tag{5}$$

для любой тройки точек $x, x_1, x_2 \in R^n$ [6]. Для конформно-выпуклых функций выполняются ряд замечательных соотношений:

$$g^*(y) = \max_x \frac{|x - y|}{\sqrt{2}g(x)}, \quad g(x) = \max_y \frac{|x - y|}{\sqrt{2}g^*(y)}, \quad |x - y| \leq \sqrt{2}g(x)g^*(y), \tag{6}$$

равенство в последнем неравенстве достигается, если x и y связаны соотношением (4).

Пример. Пусть $g(x) = \frac{1}{5}|x - 2| + \frac{3}{10}|x + 1| + \frac{2}{5}|x + 2|$. График функции $g(x)$ – рис. 1:

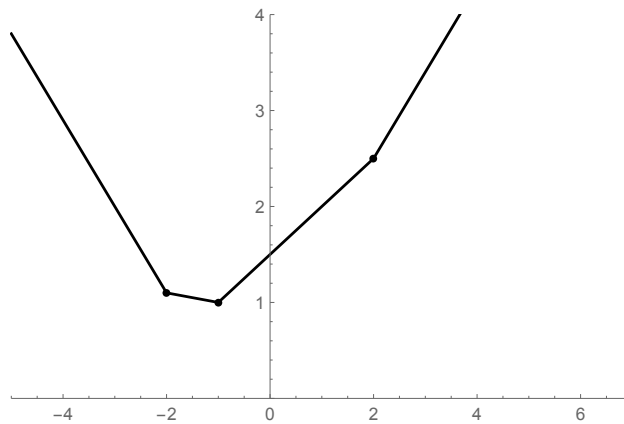


Рис. 1. График функции $g(x)$.

Тогда двойственная функция $g^*(y)$ в явной форме равна:

$$g^*(y) = \frac{|y - 9|}{22\sqrt{2}} + \frac{18\sqrt{2}|y + \frac{7}{9}|}{55} + \frac{3|y + 3|}{10\sqrt{2}},$$

график $g^*(y)$ представлен на рис. 2.

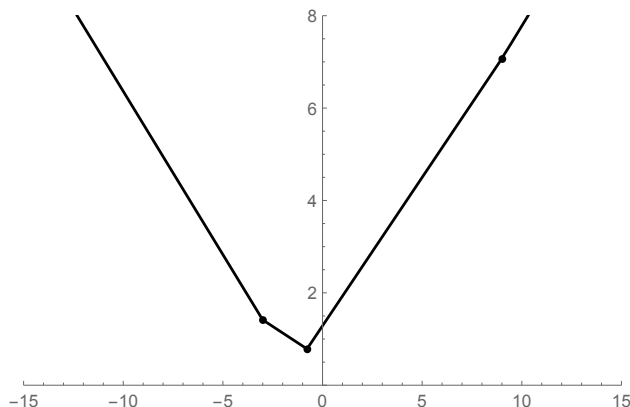


Рис. 2. График функции $g^*(y)$.

Соотношения (6) при этом имеют нетривиальный вид:

$$\frac{|y-9|}{22\sqrt{2}} + \frac{18\sqrt{2}|y+\frac{7}{9}|}{55} + \frac{3|y+3|}{10\sqrt{2}} \equiv \max_x \frac{|y-x|}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{5}|x-2| + \frac{3}{10}|x+1| + \frac{2}{5}|x+2|\right)},$$

$$\frac{1}{5}|x-2| + \frac{3}{10}|x+1| + \frac{2}{5}|x+2| \equiv \max_y \frac{|y-x|}{\sqrt{2}\left(\frac{|y-9|}{22\sqrt{2}} + \frac{18\sqrt{2}|y+\frac{7}{9}|}{55} + \frac{3|y+3|}{10\sqrt{2}}\right)},$$

$$|y-x| \leq \sqrt{2} \left(\frac{|y-9|}{22\sqrt{2}} + \frac{18\sqrt{2}|y+\frac{7}{9}|}{55} + \frac{3|y+3|}{10\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{5}|x-2| + \frac{3}{10}|x+1| + \frac{2}{5}|x+2| \right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

Литература

1. Славский В. В. *Конформно плоские метрики ограниченной кривизны на n -мерной сфере* // Исследования по геометрии "в целом" и математическому анализу. - Новосибирск: Наука, 1987, Т. 9., С. 183-199.
2. Slavskii V. V. *Conformally flat metrics and the geometry of the pseudo-Euclidean space* // Siberian Math. J., 35 (1994), N 3, P. 674-682.
3. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. *Однородные пространства: теория и приложения: монография*. - Ханты-Мансийск : Полиграфист, 2008. - 280 с.
4. Родионов Е. Д., Славский В. В. *Одномерная секционная кривизна римановых многообразий* // Доклады академии наук, 2002, Vol. 387, No. 4, P. 454-457.
5. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V. *Geometry of homogeneous Riemannian manifolds* // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Vol. 146. No. 6. P. 6313-6390.
6. Kurkina M. V., Rodionov E. D., and Slavskii V. V. *Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature* // Doklady Mathematics, 2015, Vol. 91, No. 3, P. 1-3.

LEGENDRE TRANSFORMATION OF CONFORMALLY CONVEX FUNCTIONS

M.V. Kurkina, V.V. Slavsky

In the theory of convex subsets of the Euclidean space an important role is played by the Minkowski

duality and the Legendre transformation of convex functions. The paper considers conformally flat Riemannian metrics of positive one-dimensional curvature, defined on Euclidean space and conformally convex functions corresponding to them. For this class of functions, an analogue of the Legendre transform is determined and studied in detail.

Keywords: Lobachevski geometry, convex sets, conformally flat metrics

УДК 514.764.25

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ С КРУЧЕНИЕМ

Л.П. Ладыненко¹

¹ *kolyalada74@gmail.com*; Государственное учреждение "Южноукраинский национальный педагогический университет имени К.Д.Ушинского"

Рассматриваются почти геодезические отображения пространств A^n , $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, аффинной связности с кручением. Для почти геодезических отображений типа $\Pi_2^3(e)$ и типа $\Pi_2^4(e)$ в явном виде найдены ограничения на аффинор F , позволяющие охарактеризовать эти отображения как такие, при которых F -кривые пространства A^n переходят в F -кривые пространства-образа.

Ключевые слова: пространство аффинной связности, кручение, геодезическая линия, почти геодезическая линия, почти геодезическое отображение

Рассматриваются пространства A^n класса C^r ($n > 2, r > 1$) аффинной связности с кручением. Как известно [1], кривая γ называется почти геодезической линией пространства A^n , если в A^n существует компланарное вдоль γ двумерное распределение, в каждой своей точке содержащее касательный вектор данной кривой. Любая геодезическая линия пространства A^n , очевидно, является его почти геодезической линией, но не наоборот. С точки зрения теории кривизны кривых в пространствах аффинной связности почти геодезические линии представляют собой кривые, первая кривизна которых произвольна, а вторая и все последующие кривизны тождественно равны нулю.

Отображение пространства A^n на пространство \bar{A}^n , при котором образом каждой почти геодезической линии пространства A^n является почти геодезическая линия пространства \bar{A}^n , по необходимости, является геодезическим [1]. В силу этого, для пространств A^n рассматривают отображения, при которых образом каждой геодезической линии пространства A^n является почти геодезическая линия пространства \bar{A}^n . Такие отображения для пространств A^n и \bar{A}^n называют почти геодезическими. Геодезические отображения, естественно, являются частным случаем почти геодезических отображений и в теории последних считаются тривиальными [1].

В результате анализа тензора деформации связности пространства A^n при почти геодезических отображениях выделяют три типа таких отображений [2], [4].

Особый интерес представляют отображения второго типа Π_2 . Они являются обобщениями аналитически планарных отображений почти комплексных многообразий. При отображениях типа Π_2 каждая геодезическая линия пространства A^n

переходит в такую почти геодезическую линию пространства \bar{A}^n , для которой поле компланарного двумерного распределения E_2 определяется касательным вектором λ^h и вектором $F_\alpha^h \lambda^\alpha$, где F_α^h – компоненты некоторого аффинора F , так называемую F -кривую [2], [3]. Говорят, что Π_2 -отображение f удовлетворяет условию взаимности, если обратное ему отображение f^{-1} также является отображением типа Π_2 , соответствующим тому же аффинору. В отличие от отображений типа Π_2 пространств аффинной связности без кручения, для отображений типа Π_2 общих пространств аффинной связности из условия взаимности не вытекает естественных ограничений алгебраического характера на компоненты аффинора F [3]. Из совокупности отображений типа Π_2 , удовлетворяющих условию взаимности, выделяют отображения типа $\Pi_2^n(e)$, $n \in N, n > 1$, характеризующиеся соотношениями

$$F_i^{nh} = e\delta_i^h, \text{ где } F_i^{nh} = F_{\alpha_1}^h \cdot F_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot F_i^{\alpha_{n-1}}, e = \pm 1.$$

В [4] в явном виде получены ограничения дифференциально-алгебраического характера на аффинор F , позволяющие охарактеризовать отображения типа $\Pi_2^n(e)$ с геометрической точки зрения как такие и только такие отображения, при которых F -кривые пространства A^n переходят в F -кривые пространства \bar{A}^n .

В настоящей работе подобные ограничения на аффинор F найдены для отображений типа $\Pi_2^3(e)$ и типа $\Pi_2^4(e)$. Приведены примеры соответствующих пространств, кривых и отображений.

Литература

1. Синюков Н. С. *Геодезические отображения римановых пространств* – М.: Наука, 1979. – 225 с.
2. Синюков Н. С. *Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств // Проблемы геометрии. (Итоги науки и техники)* – М.: ВИНТИ АН СССР – 1982. – Т. 13. – С. 3–26.
3. Яблонская Н. В. *Почти геодезические отображения второго типа для пространств аффинной связности на e -структурах // VII Всес. конф. по современ. пробл. геометрии. Тезисы докл.* – Минск: Беларусск. ун-т, 1979. – С. 234.
4. Яблонская Н. В. *Инвариантные геометрические объекты почти геодезических отображений $\pi_2(e)$ общих пространств аффинной связности* – Одесса: Одесск. ун-т, 1980. – 24 с. (Рукопись деп. в ВИНТИ 12 февр. 1980 г. № 543-80 Деп.)

GEOMETRIC CHARACTERISTIC OF SPECIAL ALMOST GEODESIC MAPPINGS OF SPACES OF AFFINE CONNECTION WITH TORSION

L.P. Ladunenko

Almost geodesic mappings of spaces $A^n, n \in N, n > 2$, of affine connection with torsion are considered. For almost geodesic mappings of the type $\Pi_2^3(e)$ and of the type $\Pi_2^4(e)$ the restrictions in explicit form are found that allow to characterize the mappings as mappings that turn F -curves of a space A^n onto F -curves of the image of the space.

Keywords: space of affine connection, torsion, geodesic line, almost geodesic line, almost geodesic mapping

УДК 539

**ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА КВАНТОВАННОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ПРИ
НЕНУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ НА ФОНЕ КРОВОЙ НОРЫ С БЕСКОНЕЧНО
КОРОТКОЙ ГОРЛОВИНОЙ**

Д.С. Лисенков¹, Н.Р. Хуснутдинов², А.А. Попов³

¹ *lesman1985@gmail.com*; Институт Математики и механики, Казанский Федеральный Университет, Кремлевская 35, Казань, 420008, Россия

² *nail.khusnutdinov@gmail.com*; Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, 09210-170 Santo André, SP, Brazil, and Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlevskaya 18, Kazan, 420008, Russia

³ *arorov@kpfu.ru*; Институт Математики и механики, Казанский Федеральный Университет, Кремлевская 35, Казань, 420008, Россия

Исследована поляризация вакуума квантованного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы с бесконечно короткой горловиной. Предполагается, что поле является безмассовым, имеет произвольную связь со скалярной кривизной и находится в тепловом квантовом состоянии при произвольной температуре. Получено численное приближение для $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$.

Ключевые слова: поляризация вакуума, скалярное поле, температурное квантовое состояние, кротовая нора

Изучение эффектов поляризации вакуума в сильных гравитационных полях является актуальным вопросом, поскольку такие эффекты могут играть определенную роль в космологических сценариях и построении самосогласованной модели испарения черных дыр. Эти эффекты могут быть учтены при решении уравнений полуклассической теории гравитации

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi \langle T_{\nu}^{\mu} \rangle, \quad (1)$$

где $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ вакуумные средние оператора тензора энергии-импульса квантованных полей.

Основная трудность в полуклассической теории гравитации заключается в том, что эффект поляризации вакуума определяется топологическими и геометрическими свойствами всего пространства-времени, а также выбором квантового состояния, в котором вакуумные средние вычисляются. Это означает, что расчет функциональной зависимости $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_{ren}$ от метрического тензора в произвольном пространстве-времени представляет огромную трудность. Только в некоторых высокосимметричных пространствах для конформно инвариантных полей можно вычислить $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ и решить уравнения полуклассической теории гравитации. Подчеркнем, что единственным параметром размерности длины в задаче (4) является планковская длина l_{PL} . Из этого следует, что характерный масштаб l кривизны пространства-времени (который соответствует решению уравнений (1)) может отличаться от l_{PL} только при наличии большого безразмерного параметра. В качестве примера такого параметра можно рассмотреть число N полей, поляризация которых является источником искривления пространства-времени (*предполагается, конечно, что характерный масштаб изменения фонового гравитационного поля много*

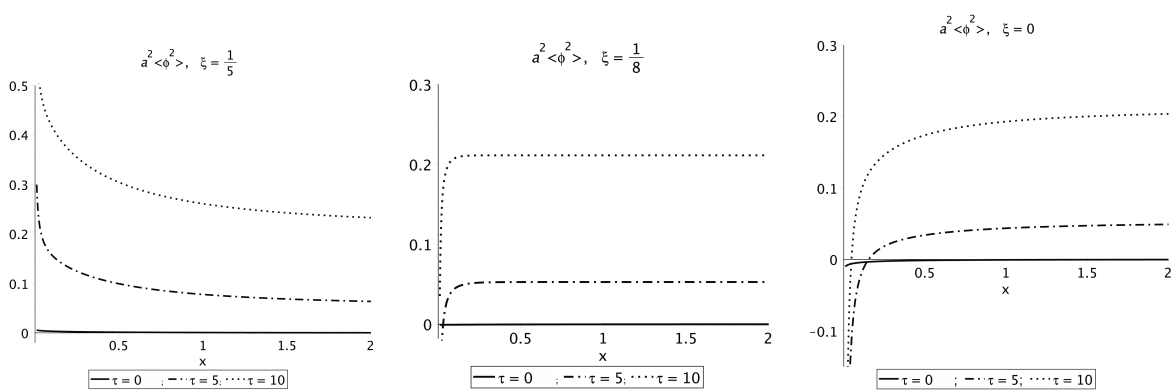
больше l_{PL} , так что само понятие классического пространства-времени все еще имеет некоторый смысл). В случае массивного поля наличие дополнительного параметра $1/m$ не увеличивает характерный масштаб кривизны пространства-времени l , которое описывается решением уравнений (1) (характерный масштаб компонент G_V^μ в левой части уравнений (1) равен $1/l^2$, в правой части - $l_{PL}^2/(m^2 l^6)$). Для безмассовых квантованных полей таким параметром могут быть константы связи поля с кривизной пространства-времени [2]. Другой возможностью введения дополнительного параметра в задачу (1) является рассмотрение квантованного скалярного поля при ненулевой температуре T . Известно (см., например, [3]) что в высокотемпературном пределе (когда $T \gg 1/l$, T является температурой теплового состояния) $\langle T_V^\mu \rangle$ пропорционален температуре T в четвертой степени.

В этой работе мы получили численное приближение для $\langle \varphi^2 \rangle$ квантованного скалярного поля в кротовой норе с бесконечно короткой горловиной

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + (|\rho| + a)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Скалярное поле предполагалось безмассовым, с произвольной связью ξ к скалярной кривизне и находящемся в тепловом состоянии с произвольной температурой T .

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2 \rangle_{ren} &= \frac{T^2}{12} - \frac{T}{8\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1} (1-8\xi)(\rho+a)^{-2l-2}}{(l-4\xi+1)} - \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \\ &\times \frac{(8\xi-1)I_\nu(ka)K_\nu(ka) + ka \left(I'_\nu(ka)K_\nu(ka) + I_\nu(ka)K'_\nu(ka) \right)}{(8\xi-1)K_\nu^2(ka) + 2kaK'_\nu(ka)K_\nu(ka)} \\ &\times \frac{\left[K_\nu(k(a+\rho)) \right]^2}{(a+\rho)}, \quad k = 2\pi nT, \quad \nu = l + 1/2. \end{aligned} \quad (2)$$



Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Исследование НХ выполнено при финансовой поддержке São Paulo Research Foundation (FAPESP) в рамках научных проектов 2019/06033-4 и 2019/10719-9.

Литература

1. A.A. Popov, *Class. Quantum Grav.* **22**, 5223 (2005).
2. N. Nakazawa and T. Fukuyama, *Nucl. Phys.* **B252**, 621 (1985).

VACUUM POLARIZATION OF A QUANTIZED SCALAR FIELD IN THE THERMAL STATE IN THE WORMHOLE WITH AN INFINITELY SHORT THROAT

D.S. Lisenkov, N.R. Khusnutdinov, A.A. Popov

Vacuum polarization of scalar fields on the short-throat flat-space wormhole background is investigated. The field is assumed massless, with arbitrary coupling to the scalar curvature, and in a thermal state at an arbitrary temperature. Numerical approximation for $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$ is obtained.

Keywords: vacuum polarization, scalar field, thermal state, wormhole

УДК 514.822

КЛИФФОРДОВЫ ТРЮКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

М.Х. Люлинский¹

¹ *miklul@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт физики

В работе показано что с помощью свойств алгебры Клиффорда можно упростить решение системы дифференциальных уравнений некороткого специального вида. Основным результатом работы сформулирован в виде леммы.

Ключевые слова: алгебра Клиффорда, дифференциальное уравнение

Известно, что для решения системы m линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df_1(x)}{dx} = \sum_{i=1}^m k_i^1 f_i(x) \\ \dots \\ \dots \\ \frac{df_m(x)}{dx} = \sum_{i=1}^m k_i^m f_i(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

необходимо составить характеристическое уравнение и найти его корни. При большом m последнее представляется сложной задачей. В этой статье мы рассмотрим прием, позволяющий обойти эту трудность.

Пусть $m = n^2$. Построим представление Клиффордовой алгебры [2] над \mathbf{C} в R^n с образующими γ^a :

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2K\eta^{ab} E, \quad (a, b \in \{1, \dots, n\})$$

где E - единичная матрица, η^{ab} - метрика Минковского, K - константа.

Предположим, что из функций f_1, \dots, f_m можно составить матрицу F_α^β , $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ таким образом, что систему 1 можно записать в виде:

$$\frac{dF_\alpha^\beta}{dx^i} + \Phi(\gamma^i)_\alpha^\delta F_\delta^\beta = 0,$$

где $\Phi(\gamma^i)_\alpha^\delta$ - полином от γ^i с постоянными коэффициентами из \mathbf{C} . Системы такого вида встречаются в теории суперсимметрии, например, при рассмотрении супергеометрических структур [3].

Лемма. *Решение системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dF_\alpha^\beta}{dx} + \Phi(\gamma^i)_\alpha^\delta F_\delta^\beta = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n), \quad (2)$$

где $\Phi(\gamma^i)_\alpha^\delta$ - полином от γ^i с постоянными коэффициентами из \mathbf{C} есть

$$F_\alpha^\beta = \sum_i \psi_i A_{i\alpha}^\beta + \sum_j e^{-\lambda_j x} B_{j\alpha}^\beta \quad (3)$$

здесь ψ_i -константы, A_i и B_j - полиномы от γ^i с постоянными коэффициентами из \mathbf{C} такие, что

$$\Phi(\gamma^i)_\alpha^\delta A_{i\delta}^\beta = 0, \quad (4)$$

$$(\Phi(\gamma^i) - \lambda_j E) B_j = 0, \quad (5)$$

где $\lambda_j \in \mathbf{C}$ и по крайней мере два λ_j удовлетворяют уравнению

$$\lambda_j^2 E = \Phi(\gamma^i) \Phi(\gamma^i).$$

Литература

1. Эльсгольц Л. Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* // "Наука" 1969. – 425 с.
2. Тахтаджян Л. А, *Квантовая механика для математиков.* // М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», –Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. –496с.
3. Аминова А. В. Мочалов С. В. *Суперпространство Минковского как инвариант супергруппы Пуанкаре* // Изв. вузов. – Математика 3, – 5-12, (1994).

CLIFFORD'S TRIC AT DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.Kh. Lyulinsky

The article shows that the properties of the Clifford algebra allow to simplify the solution of the system of differential equations of a certain special kind. The main goal is formulated as Lemma written in two forms. The first form for systems whose number of equations is the square of some integer.

Keywords: Clifford algebra, differential equation

УДК 514.762

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ n -МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА С n ПОЛНЫМИ ИЗОТРОПНЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ

Й. Микеш¹, И. Гинтерлейтнер², Н.И. Гусева³

¹ josef.mikes@upol.cz; Palacky University in Olomouc

² hinterleitner.i@fce.vutbr.cz; Brno University of Technology

³ ngus12@mail.ru; Московский педагогический государственный университет

Формулируются некоторые результаты о конформных отображениях псевдо-римановых пространств Эйнштейна на пространства Эйнштейна. Доказано, что конформное отображение связного n -мерного псевдо-риманова пространства Эйнштейна на пространство Эйнштейна является гомотетическим, если в пространстве существует точка, в которой не все секционные кривизны равны между собой, и через которую в n линейно независимых изотропных направлениях проходят полные геодезические линии (световые линии).

Ключевые слова: конформные отображения, пространства Эйнштейна, изотропные геодезические, световые линии, полные геодезические

В 1923г. Г. В. Бринкманн [1] начал изучать конформные отображения на Эйнштейновы пространства. Эти исследования детально изложены в монографии А. З. Петрова [2], а также в книге [3].

В работе [4] доказано, что (псевдо-) риманово пространство V_n допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна \bar{V}_n тогда и только тогда, когда в V_n существует решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$ и $s(x)$ (> 0):

$$s_{,ij} = u g_{ij} - s L_{ij}, \quad (1)$$

где $L_{ij} = \frac{1}{n-2} (R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij})$, R_{ij} – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, запятой обозначена ковариантная производная.

При этом метрики пространств V_n и \bar{V}_n связаны условиями:

$$\bar{g}_{ij}(x) = s^{-2} g_{ij}(x)$$

в общей по конформному отображению системе координат x .

Условия (1) выполняются при минимальных требованиях на класс гладкости рассматриваемых функций, то есть когда функция $s(x) \in C^2$ а функция $u(x)$ является непрерывной функцией. Очевидно, что тогда V_n и $\bar{V}_n \in C^2$, т.е. $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x) \in C^2$.

В работе [4], при условии V_n и $\bar{V}_n \in C^3$, доказано, что риманово пространство V_n допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\bar{V}_n \in C^3$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение замкнутой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$, $s(x)$ (> 0) и вектора $s_i(x)$:

$$s_{,i} = s_i; \quad s_{,ij} = u g_{ij} - s L_{ij}; \quad u_{,i} = -s_{\alpha} L_i^{\alpha}. \quad (2)$$

В работе [5] мы доказали (совместно с Л. Е. Евтушиком), что подобные уравнения имеют решения при более слабых условиях на дифференцируемость метрик изучаемых пространств.

Бринкманом изучались конформные отображения между пространствами Эйнштейна, детально эта задача изложена в монографии А.З. Петрова [2]. В случае, когда V_n является пространством Эйнштейна, уравнения (1) упростятся

$$s_{,ij} = \varrho g_{ij}, \quad (3)$$

где ϱ – некоторый инвариант. Эти уравнения, как известно, определяют эквидистантные пространства. Метрики всех эквидистантных пространств Эйнштейна найдены Бринкманном, см. [1].

В монографии [6] изучаются многие объекты в целом на компактных пространствах. В работе [7] установлено, что не существует в целом градиентных конциркулярных векторных полей в псевдо-римановых пространствах.

Геодезическая линия $\gamma(t)$ называется *полной*, если является решением уравнения $\nabla_t \dot{\gamma} = 0$ для $t \in \mathbb{R}$, где $\dot{\gamma}$ – касательный вектор.

В работе [8] фактически доказано, что конформные отображения связного пространства Эйнштейна на любое пространство Эйнштейна, в котором все изотропные геодезические линии полны, являются гомотетическими.

В работе

Оказывается, что выше приведенные требования очень завышены. Мы доказали следующую теорему:

Теорема Пусть V_n ($n > 3$) – связное псевдо-риманово пространство Эйнштейна, в котором существует точка, в которой не все секционные кривизны равны между собой, и через которую в n линейно независимых направлениях проходят полные изотропные геодезические (световые линии).

Тогда любое конформное отображение пространства Эйнштейна V_n на любое пространство Эйнштейна является гомотетическим.

The paper was supported by the grant IGA Faculty of Science 2019015 Mathematical Structures of the Palacky University and the project No. LO1408, AdMas UP—Advanced Materials, Structures and Technologies (supported by the Ministry of Education, Youth and Sports under the National Sustainability Programme I), Brno University of Technology.

Литература

1. Brinkmann H. W. *Einstein spaces which are mapped conformally on each other*. – Math. Ann. – 1925. – 94. – P. 119-145.
2. Петров А. З. *Новые методы в теории относительности*. – М.: Наука, 1965. – 495с.
3. Mikeš J., et al. *Differential geometry of special mappings*. – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 566p.
4. Микеш Й., Гаврильченко М. Л., Гладышева Е. И. *О конформных отображениях на пространства Эйнштейна*. – Вестник Моск. ун-та. – 1994. – № 3. – С. 13–17.
5. Евтушик Л. Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й. *Конформных отображения на пространства Эйнштейна*. – Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 10. – С. 8–13.

6. Yano K., Bochner S. *Curvature and Betti numbers*. – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1953. – 190p.
7. Микеш Й. О конциркулярных векторных полях „в целом“ на компактных римановых пространствах. – Одесск. ун-т. Одесса. – 1988. – 10с. Деп. в УкрНИИТИ, 2. 03. 1988. – № 615-Ук 88.
8. Kiosak V., Matveev V. S. *There are no conformal Einstein rescalings of complete pseudo-Riemannian Einstein metrics*. – C. R., Math., Acad. Sci. Paris. – 2009. – 347. – No. 17-18. – P. 1067-1069.

CONFORMAL MAPPINGS OF N DIMENSIONAL EINSTEIN SPACES WITH N COMPLETNESS ISOTROPIC GEODESICS

J. Mikeš, I. Hinterleitner, N.I. Guseva

We formulate certain results of conformal mappings of pseudo-Riemannian spaces onto Einstein spaces. It is proved that the conformal mapping of the n dimensional connected pseudo-Riemannian Einstein space to Einstein spaces is homothetic, if it has a point in which not all sectional curvatures are equal to each other, and through which complete isotropic geodesics (light-line) pass in n linearly independent directions.

Keywords: conformal mapping, Einstein space, isotropic geodesic, light-line, complete geodesic

УДК 514.76

ПСЕВДОГРУППА ГОЛОНОМИИ МНОГООБРАЗИЯ НАД АЛГЕБРОЙ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

А.А. Малюгина¹, В.В. Шурыгин²

¹ alexandra.malyugina@gmail.com; Казанский Федеральный Университет

² vadim.shurygin@kpfu.ru; Казанский Федеральный Университет

С погруженной трансверсалью канонического слоения на гладком многообразии над алгеброй дуальных чисел \mathbb{D} ассоциируется псевдогруппа голономии, аналогичная псевдогруппе голономии слоения. Псевдогруппы голономии применяются к изучению \mathbb{D} -диффеоморфизмов между \mathbb{D} -гладкими многообразиями некоторых классов.

Ключевые слова: аффинное многообразие, многообразие над алгеброй дуальных чисел, слоение, касательное расслоение, касательное многообразие, тор над алгеброй дуальных чисел

Алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D} = \mathbb{R}(\varepsilon)$ называется [1] двумерная алгебра над \mathbb{R} с базисом, состоящим из единицы $1 = e_1$ и элемента $\varepsilon = e_2$, квадрат которого равен нулю. Произвольный элемент алгебры \mathbb{D} имеет вид $X = a + b\varepsilon$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Строки элементов $X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon$, $i = 1, \dots, n$ алгебры \mathbb{D} образуют n -мерный модуль \mathbb{D}^n над \mathbb{D} , а уравнения $x^i = x_0^i = const$ определяют каноническое слоение на \mathbb{D}^n .

Отображение $F : U \subset \mathbb{D}^n \mapsto \mathbb{D}^m$ называется \mathbb{D} -гладким, если касательное отображение dF \mathbb{D} -линейно для любых $x \in U$. Структура n -мерного \mathbb{D} -гладкого многообразия на вещественном $2n$ -мерном многообразии M_{2n} задается атласом, карты которого принимают значения в модуле \mathbb{D}^n , а функции перехода являются \mathbb{D} -гладкими диффеоморфизмами.

\mathbb{D} -гладкое многообразие несет на себе каноническое слоение, на слоях которого индуцируется структура аффинных многообразий. \mathbb{D} -гладкое многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$

называется *полным*, если слои его канонического слоения являются полными аффинными многообразиями.

Распространение карт на \mathbb{D} -гладком многообразии вдоль слоевых путей позволяет ассоциировать с погруженной трансверсалью канонического слоения псевдогруппу локальных \mathbb{D} -гладких диффеоморфизмов, называемую псевдогруппой голономии.

Теорема 1. 1) Пусть $M_n^{\mathbb{D}}$ — полное \mathbb{D} -гладкое многообразие размерности n , а $\varphi : W_n \rightarrow M_n^{\mathbb{D}}$ — погружение полной трансверсали. Тогда TW_n/Γ_W является \mathbb{D} -гладким многообразием \mathbb{D} -диффеоморфным $M_n^{\mathbb{D}}$. 2) Если псевдогруппы голономии полных \mathbb{D} -гладких многообразий на полных погруженных трансверсальных изоморфны, то эти многообразия \mathbb{D} -диффеоморфны.

Теорема 2. Пусть $F : M_n^{1\mathbb{D}} \rightarrow M_n^{2\mathbb{D}}$ — диффеоморфизм полных \mathbb{D} -гладких многообразий, являющийся по отношению к каноническим слоениям слоеным изоморфизмом, и $\varphi : W_n \rightarrow M_n^{1\mathbb{D}}$ — полная погруженная трансверсаль. отображение F является \mathbb{D} -диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда псевдогруппы голономии на погруженных трансверсальных φ и $F \circ \varphi$ совпадают.

Факторпространство алгебры \mathbb{D} , рассматриваемой как \mathbb{D} -модуль, по аддитивной группе сдвигов Λ (решетке), можно наделять структурой \mathbb{D} -гладкого многообразия, которое будем называть \mathbb{D} -тором $T(\Lambda)$. Для \mathbb{D} -торов справедлива

Теорема 3. Два \mathbb{D} -тора $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ \mathbb{D} -диффеоморфны тогда и только тогда, когда существует элемент $A = a + \dot{a}\epsilon \in \mathbb{D}$, такой что $\Lambda' = A\Lambda$. В случае, когда слои канонических слоений на \mathbb{D} -диффеоморфных \mathbb{D} -торах $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ являются всюду плотными, \mathbb{D} -диффеоморфизм между $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ определяется формулой $\tilde{F}(X) = AX + B$, где $A, B \in \mathbb{D}$ и элемент A определен однозначно.

С аффинным многообразием M_n с атласом $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ и функциями перехода вида $x_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta)x_\beta^k + b^i(\alpha, \beta)$ естественно ассоциируются локально тривиальные расслоения $\pi : OM_n \rightarrow M_n$ и $\tilde{\pi} : \tilde{O}M_n \rightarrow M_n$ (см. [3], [4], [5]), функции перехода которых имеют вид $\{x_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta)x_\beta^k + b^i(\alpha, \beta), y_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta)y_\beta^k + b^i(\alpha, \beta)\}$, и $\{x_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta)x_\beta^k + b^i(\alpha, \beta), y_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta)y_\beta^k\}$ соответственно.

Аффинное многообразие M_n называется *радиантным* [4], если оно обладает атласом с линейными функциями перехода. Для расслоений OM_n и $\tilde{O}M_n$ имеет место

Теорема 4. Расслоения OM_n и $\tilde{O}M_n$, ассоциированные со связным полным аффинным многообразием M_n , являются \mathbb{D} -гладкими многообразиями. Эти многообразия \mathbb{D} -диффеоморфны тогда и только тогда, когда многообразие M_n радиантно.

Литература

1. Вишневецкий В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами*. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984.
2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* — М., 1979. — Т. 9, 5–247.
3. Шурыгин В.В. *Препятствия к радиантности для гладких многообразий над алгебрами Вейля*. Изв. вузов. Матем., № 5, 71–83 (2005).

4. Goldman W., Hirsch M.W. *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc., **26**, (2), (1984), 629–649.

5. Малюгина А.А, Шурыгин В.В. *Представления голономии одного класса многообразий над алгеброй дуальных чисел*. Изв. Пензенск. гос. пед. ун-та, 2011, N 26, 128–136.

HOLONOMY PSEUDOGROUP OF A SMOOTH MANIFOLD OVER THE ALGEBRA OF DUAL NUMBERS AND ITS APPLICATIONS

A.A. Malyugina, V.V. Shurygin

A smooth manifold over the algebra \mathbb{D} of dual numbers carries a canonical foliation. To an immersed transversal of the canonical foliation, we associate a holonomy pseudogroup similar to the holonomy pseudogroup of a foliation. Introduced holonomy pseudogroups are applied to the study of \mathbb{D} -diffeomorphisms between \mathbb{D} -smooth manifolds of some classes

Keywords: affine manifold, manifold over the algebra of dual numbers, foliation, tangent bundle, tangent manifold, torus over the algebra of dual numbers

УДК 514.83

РЕШЕНИЯ С ПЛОСКОЙ СИММЕТРИЕЙ В $f(R)$ ГРАВИТАЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

А.В. Марьин¹, А.А. Попов²

¹ andfreeman@outlook.com; Институт Математики и механики, Казанский Федеральный Университет, Кремлевская 35, Казань, 420008, Россия

² arorov@kpfu.ru; Институт Математики и механики, Казанский Федеральный Университет, Кремлевская 35, Казань, 420008, Россия

В работе получено явное решение с плоской симметрией 4-х мерного пространства в рамках $f(R)$ гравитации с дополнительным двумерным сферическим пространством. Показано, что в таком пространстве существуют гравитационные сингулярности. Найдены ограничения на параметры модели $f(R)$ гравитации, при которых решение существует.

Ключевые слова: $f(R)$ гравитация, дополнительные измерения, плоская симметрия

Введение

Компактные дополнительные пространства - это широко используемая идея. Их рассмотрение в физических теориях помогает продвигаться в таких сложных вопросах как объединение сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий [1, 2], масса нейтрино [3], проблема космологической постоянной [4, 5] и так далее. Любая многомерная модель на низких энергиях должна приводить к четырехмерной теории, что будет говорить о наличии связи между ними. Теории гравитации с высшими производными часто рассматриваются в современных исследованиях, несмотря на сложности, которые порождает такой подход [6]. Много статей посвящено $f(R)$ гравитации - одному из самых простых обобщений теории гравитации

Эйнштейна. Описание обобщений $f(R)$ гравитации до теории Гаусса-Бонне можно найти в [7, 8], а примеры исследований, где функция $f(R)$ имеет конкретный вид, - в [9, 10]. В большинстве работ предполагается, что дополнительное пространство обладает положительной кривизной.

В работе получено решение с плоской симметрией 4-х мерного пространства в рамках $f(R)$ гравитации с дополнительным двумерным сферическим пространством.

Уравнения $f(R)$ гравитации

Действие $f(R)$ гравитации в шестимерном пространстве имеет следующий вид

$$S = \int d^6 x \sqrt{-g} f(R), \quad (1)$$

где $f(R)$ - функция кривизны.

Уравнения такой теории имеют вид

$$-\frac{1}{2}f(R)\delta_A^B + (R_A^B + \nabla_A \nabla^B - \delta_A^B \square) f_R = 0, \quad (2)$$

где $A, B, C, \dots = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ∇_A - обозначение ковариантной производной, а $\square = g^{AB} \nabla_A \nabla_B$.

Если пространство-время обладает плоской симметрией, то его первая квадратичная форма может быть записана в виде

$$ds^2 = E(x)^2 dt^2 - dx^2 - M(x)^2 (dy^2 + dz^2) - L(x)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3)$$

В этих координатах верны следующие равенства

$$\nabla_A \nabla^B = g^{BC} \left[\partial_A \partial_C - \frac{1}{2} (\partial_x g_{AC}) \partial_x \right], \quad (4)$$

$$\square = \nabla_A \nabla^A = -\partial_{xx}^2 - \frac{1}{2} g^{AC} (\partial_x g_{AC}) \partial_x. \quad (5)$$

Нетривиальные уравнения (2) в метрике (3)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow & f_{RRR} R'^2 + \left(R'' + 2R' \frac{M'}{M} + 2R' \frac{L'}{L} \right) f_{RR} \\ & + \left(-\frac{E''}{E} - 2\frac{E' M'}{E M} - 2\frac{E' L'}{E L} \right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow & \left(\frac{E'}{E} + 2\frac{M'}{M} + 2\frac{L'}{L} \right) f_{RR} R' \\ & + \left(-\frac{E''}{E} - 2\frac{M''}{M} - 2\frac{L''}{L} \right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow & f_{RRR} R'^2 + \left(R'' + R' \frac{E'}{E} + R' \frac{M'}{M} + 2R' \frac{L'}{L} \right) f_{RR} \\ & + \left(-\frac{M''}{M} - \frac{M'^2}{M^2} - \frac{E' M'}{E M} - 2\frac{M' L'}{M L} \right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow & f_{RRR}R'^2 + \left(R'' + R' \frac{E'}{E} + 2R' \frac{M'}{M} + R' \frac{L'}{L} \right) f_{RR} \\ & + \left(-\frac{L''}{L} - \frac{L'^2}{L^2} - \frac{E' L'}{E L} - 2 \frac{M' L'}{M L} + \frac{1}{L^2} \right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} R(x) = & -2 \frac{E''}{E} - 4 \frac{M''}{M} - 4 \frac{L''}{L} - 2 \frac{M'^2}{M^2} - 2 \frac{L'^2}{L^2} - 4 \frac{E' M'}{E M} - 4 \frac{E' L'}{E L} \\ & - 8 \frac{M' L'}{M L} + \frac{2}{L^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями четвёртого порядка относительно неизвестных функций $E(x)$, $M(x)$, $L(x)$.

1. Случай постоянного радиуса дополнительного сферического пространства $L(x) = L_0 = \text{const}$

В работе рассматривается частный случай приведённой выше задачи $L(x) = L_0 = \text{const}$. В этом случае нетривиальные уравнения рассматриваемой теории принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow & f_{RRR}R'^2 + \left(R'' + 2R' \frac{M'}{M} \right) f_{RR} \\ & + \left(-\frac{E''}{E} - 2 \frac{E' M'}{E M} \right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{E'}{E} + 2 \frac{M'}{M} \right) f_{RR}R' + \left(-\frac{E''}{E} - 2 \frac{M''}{M} \right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow & f_{RRR}R'^2 + \left(R'' + R' \frac{E'}{E} + R' \frac{M'}{M} \right) f_{RR} \\ & + \left(-\frac{M''}{M} - \frac{M'^2}{M^2} - \frac{E' M'}{E M} \right) f_R - \frac{f}{2} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow & f_{RRR}R'^2 + \left(R'' + R' \frac{E'}{E} + 2R' \frac{M'}{M} \right) f_{RR} \\ & + \frac{f_R}{L_0^2} - \frac{f}{2} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

Для функции $R(x)$ имеем

$$R(x) = 2 \frac{E''}{E} + 4 \frac{M''}{M} + 2 \frac{M'^2}{M^2} + 4 \frac{E' M'}{E M} - \frac{2}{L_0^2}. \quad (15)$$

Если составить комбинацию $3 \cdot (14) + f_R \cdot (15) - (11) - (12) - 2 \cdot (13)$ уравнений (11)-(15), получим

$$R(x) - \frac{5}{L_0^2} - \frac{f}{2f_R} = 0, \quad (16)$$

Это уравнение на функцию $R(x)$, решение которого, если оно существует, постоянно. Следовательно

$$R(x) = R_0 = \text{const}. \quad (17)$$

Переписав уравнения (11)-(15) с учётом (17), получим

$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{E''}{E} + 2 \frac{E' M'}{E M} + \frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = 0, \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{E''}{E} + 2 \frac{M''}{M} + \frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = 0, \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{M''}{M} + \frac{M'^2}{M^2} + \frac{E' M'}{E M} + \frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = 0, \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{L_0^2} - \frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = 0, \quad (21)$$

$$R_0 = 2 \frac{E''}{E} + 4 \frac{M''}{M} + 2 \frac{M'^2}{M^2} + 4 \frac{E' M'}{E M} - \frac{2}{L_0^2}, \quad (22)$$

$$R_0 = \frac{5}{L_0^2} + \frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0}. \quad (23)$$

Из (21) следует, что

$$\frac{f}{2f_R} \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{L_0^2}. \quad (24)$$

Эти уравнения имеют следующее решение

$$L(x) = L_0, \quad (25)$$

$$R(x) = R_0 = \frac{6}{L_0^2}, \quad (26)$$

$$M(x)^2 = A^2 \cos^{4/3} \left(\frac{\sqrt{3}x}{2L_0} \right), \quad (27)$$

$$E(x)^2 = B^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{3}x}{2L_0}\right)}{\cos^{2/3}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2L_0}\right)}. \quad (28)$$

Эти выражения совместно с (24) определяют решение поставленной задачи. При этом (24) даёт ограничение на функцию $f(R)$ при которой рассматриваемое решение возможно. В случае

$$f(R) = aR^2 + R + c \quad (29)$$

это ограничение может быть записано так

$$c L_0^4 + 4 L_0^2 + 12 a = 0, \quad (30)$$

что определяет радиус дополнительного пространства

$$L_0^2 = \begin{cases} -3a, & c = 0 \\ \frac{2(-1 \pm \sqrt{1-3ac})}{c}, & c \neq 0 \end{cases}$$

Коэффициенты метрического тензора имеют следующий вид в точках

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3}(2k+1) & M(x)^2 = 0, & E(x)^2 \rightarrow \infty, \\ x_m &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3}2m & M(x)^2 = 1, & E(x)^2 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Однако, инварианты преобразования координат $R, R^{AB}R_{AB}, R^{ABCD}R_{ABCD}$ в этих точках принимают следующие значения

$$\begin{aligned} x = x_k &\Rightarrow R = \frac{6}{L_0^2}, & R^{AB}R_{AB} = \frac{6}{L_0^2}, & R^{ABCD}R_{ABCD} \rightarrow \infty, \\ x = x_m &\Rightarrow R = \frac{6}{L_0^2}, & R^{AB}R_{AB} = \frac{6}{L_0^2}, & R^{ABCD}R_{ABCD} = \frac{8}{L_0^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, равенство нулю метрического коэффициента $E(x)^2$ в точках x_m является координатной сингулярностью, так как все инварианты кривизны в этих точках не расходятся, а точки x_k - это гравитационные сингулярности, так как инвариант преобразования координат $R^{ABCD}R_{ABCD}$ расходится.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-02-00496

Литература

1. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, *Phys. Lett.* **В 429** (June, 1998) 263–272, [arXiv:hep-ph/9803315].
2. K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, *Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions*, *Nucl. Phys.* **В 537** (Jan., 1999) 47–108, [arXiv:hep-ph/9806292].

3. N. Arkani-Hamed et al., *Neutrino masses from large extra dimensions*, *Phys. Rev. D* **65** (Jan., 2002) 024032, [arXiv:hep-ph/9811448].
4. G. D. Starkman, D. Stojkovic and M. Trodden, *Large extra dimensions and cosmological problems*, *Phys. Rev. D* **63** (May, 2001) 103511, [arXiv:hep-th/0012226].
5. U. Günther, P. Moniz and A. Zhuk, *Nonlinear multidimensional cosmological models with form fields: Stabilization of extra dimensions and the cosmological constant problem*, *Phys. Rev. D* **68** (Aug., 2003) 044010, [arXiv:hep-th/0303023].
6. R. P. Woodard, *The Theorem of Ostrogradsky*, *ArXiv e-prints* (June, 2015) , [1506.02210].
7. A. de Felice and S. Tsujikawa, *f(R) Theories*, *Living Rev. Relat.* **13** (June, 2010) 3, [1002.4928].
8. S. Capozziello and M. de Laurentis, *Extended Theories of Gravity*, *Phys. Rep.* **509** (Dec., 2011) 167–321, [1108.6266].
9. T. Saidov and A. Zhuk, *AdS non-linear multidimensional (D = 8) gravitational models with stabilized extra dimensions*, *Gravitation and Cosmology* **12** (Dec., 2006) 253–261, [hep-th/0604131].
10. T. Saidov and A. Zhuk, *A nonlinear multidimensional gravitational model R+R-1 with form fields and stabilized extra dimensions*, *Astronomical and Astrophysical Transactions* **25** (Oct., 2006) 447–453.
11. A. A. Kirillov, A. A. Korotkevich and S. G. Rubin, *Emergence of symmetries*, *Phys. Lett.* **B718** (2012) 237–240, [1205.1108].
12. K. A. Bronnikov, R. I. Budaev, A. V. Grobov, A. E. Dmitriev and S. G. Rubin, *Inhomogeneous compact extra dimensions*, *jcap* **10** (Oct., 2017) 001, [1707.00302].
13. K. A. Bronnikov and S. G. Rubin, *Self-stabilization of extra dimensions*, *Phys. Rev. D* **73** (June, 2006) 124019, [arXiv:gr-qc/0510107].
14. S. G. Rubin, *Scalar field localization on deformed extra space*, *Eur. Phys. J.* **C75** (2015) 333, [1503.05011].
15. S. G. Rubin, *Inhomogeneous extra space as a tool for the top-down approach*, *Adv.High Energy Phys.* **2018** (2018) 2767410 **2018** (Sept., 2018) , [1609.07361].

FLAT SYMMETRY SOLUTIONS IN F (R) GRAVITY WITH EXTRA DIMENSIONS

A.V. Mar'in, A.A. Popov

An explicit solution with plane symmetry of a 4-dimensional space in the framework of f(R) gravity with an additional two-dimensional spherical space is obtained. It is shown that gravitational singularities exist in such a space. Restrictions on the parameters of the f(R) model of gravity are found for which a solution exists.

Keywords: f (R) gravity, extra dimensions, plane symmetry

УДК 514.7

МЕТРИКИ ДИАГОНАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯО.И. Мохов¹

¹ *tokhov@mi-ras.ru, tokhov@landau.ac.ru*; кафедра высшей геометрии и топологии, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова; Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

Мы изучаем метрики диагональной кривизны, возникающие в теории интегрируемых систем гидродинамического типа. Полугамильтоновы системы были открыты С.П.Царевым [1]. Этот специальный класс диагонализуемых систем гидродинамического типа обладает самым богатым бесконечномерным множеством законов сохранения и симметрий (коммутирующих потоков) гидродинамического типа среди всех систем гидродинамического типа. Полугамильтоновы системы являются интегрируемыми, они интегрируются (линеаризуются) методом обобщенного годографа [1]. Многие важнейшие системы гидродинамического типа принадлежат именно к этому классу систем. Геометрия полугамильтоновых систем – это в точности геометрия метрик диагональной кривизны (или, другими словами, полугамильтоновых метрик). С каждой полугамильтоновой системой гидродинамического типа связаны метрики диагональной кривизны и, наоборот, с каждой метрикой диагональной кривизны связаны полугамильтоновы системы гидродинамического типа. Метрики диагональной кривизны являются диагонализуемыми и, более того, они обладают ортогональными координатами с некоторыми дополнительными условиями на компоненты тензора кривизны Римана в этих ортогональных координатах (условия диагональной кривизны). Локально метрики диагональной кривизны описываются интегрируемой системой нелинейных уравнений (уравнения Дарбу). Получено эффективное необходимое условие для метрик диагональной кривизны, а именно, обнуление тензора Хантьеса для аффинора Риччи, и развита теория метрик диагональной кривизны.

Ключевые слова: метрика диагональной кривизны, диагонализуемая метрика, ортогональные координаты, диагонализуемый аффинор, тензор Хантьеса, полугамильтонова система гидродинамического типа, интегрируемая система, уравнения Дарбу

Риманова или псевдориманова метрика $g_{ij}(u)$ называется *метрикой диагональной кривизны* (или *полугамильтоновой метрикой*), если для этой метрики существуют (локально) ортогональные координаты (в ортогональных координатах метрика диагональна: $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$), такие что в этих ортогональных координатах

$$R_{il}^{ij}(u) = 0, \quad \forall i, j, l, \quad j \neq l, \quad (1)$$

т.е. для каждого индекса i “операторы кривизны” $R_{il}^{ij}(u)$ диагональны (суммирование по повторяющемуся индексу i в формуле (1) нет). Ортогональные координаты метрики диагональной кривизны, в которых выполняются соотношения (1), мы будем называть *координатами диагональной кривизны* данной метрики диагональной кривизны.

Рассмотрим произвольную диагональную метрику $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$ и введем стандартные классические обозначения: $g_i(u) = H_i^2(u)$, где $H_i(u)$ – коэффициенты

Ламе диагональной метрики.

Условие (1) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial u^j \partial u^l} = \frac{1}{H_j(u)} \frac{\partial H_i}{\partial u^j} \frac{\partial H_j}{\partial u^l} + \frac{1}{H_l(u)} \frac{\partial H_i}{\partial u^l} \frac{\partial H_l}{\partial u^j}, \quad i \neq j, i \neq l, j \neq l. \quad (2)$$

Введем коэффициенты вращения диагональной метрики $\beta_{ij}(u)$:

$$\beta_{ij}(u) = \frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_j}{\partial u^i}, \quad i \neq j. \quad (3)$$

В терминах коэффициентов вращения метрики уравнения (2) приобретают вид

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^l} = \beta_{il} \beta_{lj}, \quad i \neq j, i \neq l, j \neq l. \quad (4)$$

Уравнения (4) называются уравнениями Дарбу, именно эти уравнения и описывают метрики диагональной кривизны. Уравнения Дарбу (4) хорошо известны в математической физике и теории интегрируемых систем как уравнения N -волн, эти уравнения интегрируются методом обратной задачи рассеяния (см. [2]). Отметим, что по решениям уравнений Дарбу (4), по соответствующим коэффициентам вращения метрики $\beta_{ij}(u)$, $i \neq j$, коэффициенты Ламе $H_i(u)$ метрики восстанавливаются из уравнений (3):

$$\frac{\partial H_j}{\partial u^i} = \beta_{ij}(u) H_i(u), \quad i \neq j. \quad (5)$$

Уравнения (5) – совместная линейная система, условиями совместности для которой являются в точности уравнения Дарбу (4).

Особым классом метрик диагональной кривизны являются метрики подмногообразий с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны в псевдоевклидовых пространствах. Метрики подмногообразий с плоской нормальной связностью задают гамильтоновы структуры систем гидродинамического типа. Плоским метрикам отвечают локальные гамильтоновы структуры Дубровина–Новикова [3], метрикам постоянной кривизны отвечают нелокальные гамильтоновы структуры Мохова–Ферапонтова [4], а общим подмногообразиям с плоской нормальной связностью отвечают нелокальные гамильтоновы структуры Ферапонтова [5]. Для метрик диагональной кривизны, которые не являются метриками подмногообразий с плоской нормальной связностью, гамильтонов формализм, связанный с соответствующими им полугамильтоновыми системами гидродинамического типа, неизвестен. Изучение общей полугамильтоновой геометрии и ее связи с гамильтоновым формализмом является важнейшей задачей теории систем гидродинамического типа. Кроме того, ортогональные координаты диагональной кривизны играют важную роль в теории согласованных и почти согласованных метрик, построенной и развитой автором в [6]–[10]. Согласованные метрики подмногообразий с плоской нормальной связностью связаны с согласованными нелокальными скобками Пуассона гидродинамического типа и интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа.

Рассмотрим аффиносор Риччи $R_j^i(u) = g^{is}(u)R_{sj}(u)$ метрики диагональной кривизны $g_{ij}(u)$.

Лемма 1. *Аффинор Риччи метрики диагональной кривизны в координатах диагональной кривизны метрики является диагональным, то есть метрика диагональной кривизны $g_{ij}(u)$ и ее тензор Риччи $R_{ij}(u)$ одновременно диагонализуются в координатах диагональной кривизны метрики.*

Теорема 1. *Тензор Хантьеса аффинора Риччи метрики диагональной кривизны тождественно равен нулю.*

Данная теорема дает легко проверяемое необходимое условие для того, чтобы метрика являлась метрикой диагональной кривизны. В частности, это позволяет построить примеры трехмерных метрик, которые не являются метриками диагональной кривизны (напомним, что ортогональные координаты существуют для любой трехмерной метрики).

Пример 1. Рассмотрим метрику

$$(g_{ij}(u^1, u^2, u^3)) = \begin{pmatrix} u^3 & 0 & 0 \\ 0 & u^1 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления показывают, что тензор Хантьеса аффинора Риччи данной метрики не равен нулю, то есть данная метрика не является метрикой диагональной кривизны.

Теорема 2. *Трехмерная метрика является метрикой диагональной кривизны тогда и только тогда, когда эта метрика и ее тензор Риччи одновременно диагонализуются.*

Возникает важная задача об одновременной диагонализуемости произвольной пары метрик и, в частности, задача об одновременной диагонализуемости метрики и ее тензора Риччи. Одновременная диагонализуемость пары метрик играет также важную роль в теории согласованных и почти согласованных метрик (см. [6]–[10]).

Лемма 2. *Если собственные значения пары метрик $g_{1,ij}(u)$ и $g_{2,ij}(u)$ различны, то эти метрики диагонализуются одновременно тогда и только тогда, когда тензор Хантьеса аффинора $v_j^i(u) = g_1^{is}(u)g_{2,sj}(u)$ тождественно равен нулю.*

Теорема 3. *Если для данной метрики $g_{ij}(u)$ собственные значения аффинора Риччи $R_j^i(u)$ различны, то метрика $g_{ij}(u)$ и ее тензор Риччи $R_{ij}(u)$ одновременно диагонализуются тогда и только тогда, когда тензор Хантьеса аффинора Риччи $R_j^i(u)$ тождественно равен нулю.*

Пример 2. Рассмотрим метрику

$$(g_{ij}(u^1, u^2, u^3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^1 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Для данной диагональной метрики в рассматриваемых ортогональных координатах не выполняется условие диагональной кривизны (1), т.е. эти ортогональные координаты не являются координатами диагональной кривизны. Тем не менее, эта

метрика является метрикой диагональной кривизны: для нее собственные значения аффинора Риччи различны, дискриминант соответствующего характеристического многочлена не равен нулю, а вот тензор Хантьеса аффинора Риччи этой метрики тождественно равен нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №18-11-00316).

Литература

1. Царев С. П. *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа* // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1990. – Т. 54. – № 5. – С. 1048–1068.
2. Захаров В. Е., Шабат А. Б. *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I* // Функци. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8. – № 3. – С. 43–53.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П. *Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 270. – № 4. – С. 781–785.
4. Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. *О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны* // УМН. – 1990. – Т. 45. – № 3. – С. 191–192.
5. Ферапонтов Е. В. *Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа* // Функци. анализ и его прил. – 1991. – Т. 25. – № 3. – С. 37–49.
6. Мохов О. И. *Согласованные и почти согласованные метрики* // УМН. – 2000. – Т. 55. – № 4. – С. 217–218.
7. Мохов О. И. *Плоские пучки метрик и интегрируемые редукции уравнений Ламе* // УМН. – 2001. – Т. 56. – № 2. – С. 221–222.
8. Мохов О. И. *Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики* // Функци. анализ и его прил. – 2001. – Т. 35. – № 2. – С. 24–36.
9. Мохов О. И. *Об интегрируемости уравнений для неособых пар согласованных плоских метрик* // ТМФ. – 2002. – Т. 130. – № 2. – С. 233–250.
10. Мохов О. И. *Пучки согласованных метрик и интегрируемые системы* // УМН. – 2017. – Т. 72. – № 5. – С. 113–164.

METRICS OF DIAGONAL CURVATURE AND THEIR APPLICATIONS

O.I. Mokhov

We study metrics of diagonal curvature arising in the theory of integrable systems of hydrodynamic type. The semi-Hamiltonian systems were discovered by S.P.Tsarev [1]. This special class of diagonalizable systems of hydrodynamic type possesses the richest infinite-dimensional set of conservation laws and symmetries (commuting flows) of hydrodynamic type among all systems of hydrodynamic type. The semi-Hamiltonian systems are integrable, they are integrated (linearized) by the generalized hodograph method [1]. Many the most important systems of hydrodynamic type belong namely to this class of systems. The geometry of the semi-Hamiltonian systems is just exactly the geometry of metrics of diagonal curvature (or, in other words, semi-Hamiltonian metrics). A metric of diagonal curvature is connected to each such system and vice versa. The metrics of diagonal curvature are diagonalizable and, moreover, they possess orthogonal coordinates with some additional conditions on the components of the Riemann curvature tensor in the orthogonal coordinates (the conditions of diagonal curvature). Locally, the metrics of diagonal curvature are described by an integrable system of

nonlinear equations (the Darboux equations). An efficient necessary condition for metrics of diagonal curvature, namely, the vanishing of the Haantjes tensor for the Ricci affiner, is obtained and the theory of metrics of diagonal curvature is developed.

Keywords: metric of diagonal curvature, diagonalizable metric, orthogonal coordinates, diagonalizable affiner, Haantjes tensor, semi-Hamiltonian system of hydrodynamic type, integrable system, Darboux equations

УДК 514.126

ИНДИКАТРИСА ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ГАЛИЛЕЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Р. Нурбаев¹

¹ *abdurashid3717@gmail.com*; Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

В работе даётся определение аналога индикатрисы кривизны в четырёхмерном Галилеевом пространстве, коэффициенты канонического вида индикатрисы принимаются за главные кривизны поверхности.

Ключевые слова: галилеево пространство, особая плоскость, индикатриса поверхности, квадратичная форма

Пусть в аффинном пространстве A_4 даны два вектора $\vec{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\vec{Y}(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Определение. Если в A_4 введено следующее скалярное произведение

а) $(\vec{X}, \vec{Y})_1 = x_1 y_1$, при $x_1 \cdot y_1 \neq 0$

б) $(\vec{X}, \vec{Y})_2 = x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$, при $x_1 \cdot y_1 = 0$

пространство называется четырёхмерным Галилеевым пространством Γ_4 .

Норма вектора определяется как квадратный корень от скалярного произведения вектора на себя, то есть

$$\|\vec{X}\| = \begin{cases} |x_1|, & \text{при } x_1 \neq 0 \\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, & \text{при } x_1 = 0 \end{cases}$$

Расстояние между двумя точками $M(t_1, x_1, y_1, z_1)$ и $N(t_2, x_2, y_2, z_2)$ будет равна

$$\|MN\| = \begin{cases} |t_1 - t_2|, & \text{при } t_1 \neq t_2 \\ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, & \text{при } t_1 = t_2 \end{cases}$$

Плоскости $t = \text{const}$ в Γ_4 называются особыми плоскостями.

Рассмотрим в Γ_4 поверхность, определяемую уравнением в векторной форме:

$$\vec{r}(t, u, v) = t \vec{e} + x(t, u, v) \vec{i} + y(t, u, v) \vec{j} + z(t, u, v) \vec{k}. \quad (1)$$

По аналогии с евклидовым пространством, определим длину дуги кривой линии на поверхности, то есть первую квадратичную форму поверхности (1).

Теорема. Первая квадратичная форма поверхности (1) имеет вид $ds^2 = I_1 = du^2$ если $I_1 = 0$, то $ds^2 = I_2 = Edu^2 + 2Fdu dv + G(u, v)dv^2$

Определим вторую квадратичную форму поверхности (1).

Векторы $\vec{r}_t, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ и $[\vec{r}_u \vec{r}_v]$ составляют базис в точке $M \in F$ пространства Γ_4 . Вектор $[\vec{r}_u \vec{r}_v]$ в Галилеевом смысле является ортогональным векторам к $\vec{r}_t, \vec{r}_u, \vec{r}_v$. Поэтому единичный вектор, направленный вдоль вектора $[\vec{r}_u \vec{r}_v]$ является нормальным к касательной плоскости поверхности F в точке M . Этот вектор имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u \vec{r}_v]|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \\ &= \frac{1}{W} \left(0\vec{e} + \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \vec{k} \right); \\ W^2 &= EG-F^2. \end{aligned}$$

По аналогии с евклидовым пространством, определим вторую квадратичную форму поверхности скалярно умножив вектор $\vec{d}^2 r$ на вектор \vec{n} и учитывая, что

$$(\vec{n} \cdot \vec{r}_t)_1 = (\vec{n} \cdot \vec{r}_u) = (\vec{n} \cdot \vec{r}_v) = 0,$$

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \vec{d}^2 r) &= (\vec{n} \cdot \vec{r}_{tt}) dt^2 + (\vec{n} \cdot \vec{r}_{uu}) du^2 + (\vec{n} \cdot \vec{r}_{vv}) dv^2 + 2(\vec{n} \cdot \vec{r}_{tu}) dt du \\ &+ 2(\vec{n} \cdot \vec{r}_{tv}) dt dv + 2(\vec{n} \cdot \vec{r}_{uv}) du dv \end{aligned}$$

Тогда вторая квадратичная форма поверхности (1) имеет вид

$$II = (\vec{n} \cdot \vec{d}^2 r) = Ldt^2 + Mdu^2 + Ndv^2 + 2Pdtdu + 2Qdt dv + 2Rdu dv$$

Здесь

$$\begin{aligned} L = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{tt}) &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} x_{tt} & y_{tt} & z_{tt} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}; & M = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{uu}) &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ N = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{vv}) &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}; & P = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{tu}) &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} x_{tu} & y_{tu} & z_{tu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ Q = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{tv}) &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} x_{tv} & y_{tv} & z_{tv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}; & R = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{uv}) &= \frac{1}{W} \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \end{aligned}$$

За уравнение индикатрисы поверхности F в точке M Галилеева пространства Γ_4 принимаем следующее

$$Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 + 2Px'y' + 2Qx'z' + 2Ry'z' = \pm 1, \quad (2)$$

которое является поверхностью второго порядка на касательной гиперплоскости Γ_3 .

Рассмотрим преобразование Галилея на касательной гиперплоскости Γ_3 , базисом которой являются единичные векторы направленные вдоль векторов $\vec{r}_u, \vec{r}_v, [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = h_1 x + y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ z' = h_2 x + y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases} \quad (3)$$

Теорема. С помощью преобразования (3) уравнение индикатрисы (2) можно привести к каноническому виду

$$K_1 x^2 + K_2 y^2 + K_3 z^2 = \pm 1,$$

причем

$$\begin{cases} K_1 = L + Mh_1^2 + Nh_2^2 + 2Ph_1 + 2Qh_2 + 2Rh_1h_2, \\ K_2 = M \cos^2 \alpha + N \sin^2 \alpha + 2R \sin \alpha \cos \alpha, \\ K_3 = M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha - 2R \sin \alpha \cos \alpha, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{R}{M-N}, \\ h_1 = \frac{RM(Q-R) + \sqrt{(M-N)^2 + R^2}(R^2 + RQ - 2PN)}{2(MN - R^2)\sqrt{R^2 + (M-N)^2}}, \\ h_2 = \frac{(R-Q)(M^2 - MN + R^2) + \sqrt{(M-N)^2 + R^2}(2PR - RM - MQ)}{2(MN - R^2)\sqrt{R^2 + (M-N)^2}}. \end{cases}$$

Величина K_1, K_2, K_3 называем главными кривизнами поверхности F в точке M .

Литература

- [1] Theodore Shifrin. Differential Geometry: Curves and Surfaces. University of Georgia. 2012.
- [2] Артыкбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени, Т.: Фан, 1991. -180 стр.
- [3] Nurbaev A.R. Properties of Special Ellipsoids Family. European Academic Research. Vol VII, Issue 8/ November 2018.

INDICATRIX OF SURFACES IN FOUR-DIMENSIONAL OF THE GALILEAN SPACE

A.R. Nurbaev

In the thesis, an analogue of the curvature indicatrix in the four-dimensional Galilean space is determined, the coefficients of the canonical form of the indicatrix are taken as the main curvature of the surface.

Keywords: Galilean space, special plane, indicatrix of surface, fundamental form

УДК 514.765

О ПУЧКЕ СВЯЗНОСТЕЙ 4-ГО ТИПА, ИНДУЦИРОВАННОГО КОМПОЗИЦИОННЫМ ОСНАЩЕНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ

О.М. Омелян¹

¹ olga_otelyan2002@mail.ru; Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Институт физико-математических наук и информационных технологий

В статье продолжается исследование распределения плоскостей. Строится пучок связностей 4-го типа, индуцированный композиционным оснащением распределения плоскостей. Дается геометрическая характеристика пучка связностей 4-го типа. Работа основана на методе продолжений и охватов Картана-Лаптева.

Ключевые слова: распределение, расслоение, связность, оснащение Картана, нормализация Нордена, композиционное оснащение, пучок связностей

В многомерном проективном пространстве продолжим рассмотрение распределения плоскостей NS_n , с которым ассоциировано главное расслоение $G(NS_n)$. Ранее произведено [1] композиционное оснащение распределения, представляющее собой аналог оснащения Картана и нормализации 2-го рода Нордена, т.е. к каждой плоскости P_m^* распределения присоединим: а) плоскость Картана $C_{n-m-1} : P_m^* \oplus C_{n-m-1} = P_n$; б) нормаль 2-го рода Нордена $N_{m-1} : A \oplus N_{m-1} = P_m^*$. Эти плоскости зададим совокупностями точек

$$B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A, \quad B_i = A_i + \lambda_i A,$$

причем

$$\Delta \lambda_a^i + \omega_a^i = \lambda_{aJ}^i \omega^J, \quad \Delta \lambda_a + \lambda_a^i \omega_i + \omega_a = \lambda_{aI} \omega^I, \quad \Delta \lambda_i + \omega_i = \lambda_{iJ} \omega^J.$$

Введем понятие пучка связностей 4-го типа и покажем, что композиционное оснащение индуцирует в ассоциированном главном расслоении пучок связностей 4-го типа, из которого выделяется связность 4-го типа. Обратимся к выражениям (1) для дифференциалов точек B_a и B_i .

$$\begin{aligned} dB_a &= (\dots)_a^b B_b + (\nabla \lambda_a^i + l_{aJ}^i \omega^J) B_i + (\Omega_a + (l_{aI} - \lambda_j l_{aI}^j) \omega^I) A, \\ dB_i &= (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + (\nabla \lambda_i + l_{iJ} \omega^J) A, \end{aligned} \quad (1)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} l_{aj}^i &= \Gamma_{aj}^i + \Gamma_{kj}^i \lambda_a^k - \Gamma_{aj}^b \lambda_b^i - \Lambda_{kj}^b \lambda_a^k \lambda_b^i + \delta_j^i \lambda_a, \\ l_{ai} &= \Gamma_{ai} - \Gamma_{ai}^b \lambda_b + \Gamma_{ji} \lambda_a^j - \Lambda_{ji}^b \lambda_a^j \lambda_b, \\ \Omega_a &= \nabla \lambda_a - \lambda_i \nabla \lambda_a^i, \end{aligned} \quad (2)$$

а символ ∇ означает ковариантный дифференциал компонент оснащающего кватизензора относительно пучка связности 1-го типа

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_i &= d\lambda_i - \lambda_j \widehat{\omega}_i^j + \widehat{\omega}_i, & \nabla \lambda_a^i &= d\lambda_a^i + \lambda_a^j \widehat{\omega}_j^i - \lambda_b^i \widehat{\omega}_a^b + \widehat{\omega}_a^i, \\ \nabla \lambda_a &= d\lambda_a - \lambda_b \widehat{\omega}_a^b + \lambda_a^i \widehat{\omega}_i + \widehat{\omega}_a, \end{aligned} \quad (3)$$

причем $\widehat{\omega}$ – формы пучка связности 1-го типа.

Введем обозначения

$$l'_{ai} = l_{ai} - \lambda_j l^j_{ai}, \quad l'_{ab} = l_{ab} - \lambda_i l^i_{ab}. \quad (3)$$

Найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта l' (3), используя сравнения для компонент тензора l :

$$\Delta l'_{ai} \equiv 0, \quad \Delta l'_{ab} - l'_{ai} \omega^i_b \equiv 0. \quad (4)$$

Таким образом, из дифференциальных сравнений (4) следует, что объект l' является тензором. Запишем выражения для компонент тензора используя выражения (2) для компонент тензора l

$$l'_{ai} = \Gamma_{ai} - \lambda_j \Gamma^j_{ki} \lambda^k_a - \Gamma^b_{ai} (\lambda_b - \lambda_j \lambda^j_b) - \lambda_j \Gamma^j_{ai} + \Gamma_{ji} \lambda^j_a - \Lambda^b_{ji} (\lambda^j_a \lambda_b - \lambda^j_a \lambda^k_b \lambda_k) - \lambda_i \lambda_a, \quad (5)$$

$$l'_{ab} = \Gamma_{ab} - \lambda_i \Gamma^i_{jb} \lambda^j_a - \Gamma^c_{ab} (\lambda_c - \lambda_i \lambda^i_c) - \lambda_i \Gamma^i_{ab} + \Gamma_{ib} \lambda^i_a - \Lambda^c_{ib} (\lambda^i_a \lambda_c - \lambda^i_a \lambda^j_c \lambda_j) + \lambda_a \lambda^i_b \lambda_i - \lambda_a \lambda_b. \quad (6)$$

Принимая во внимание определения пучков связностей 1-го и 2-го типов, которые были введены ранее в работах [2,3], дадим

Определение. Будем говорить, что групповая связность Γ принадлежит пучку связностей 4-го типа, если выполняются условия для ковариантных производных оснащающего квазитензора λ и компонент тензора l' :

$$a) \nabla_I \lambda_i = 0, \quad b) \nabla_I \lambda^i_a = 0, \quad c) l'_{aI} = 0. \quad (7)$$

В этом случае обозначим объект пучка связности через $\overset{4}{\Gamma}$ и получим формулы для его компонент, используя понятие пучка, выражения (5-6) для объекта l' и подставляя в них формулы для компонент [2,3] $\overset{2}{\Gamma}_{iI}, \overset{2}{\Gamma}^i_{aI}$ пучка связностей 2-го типа

$$\overset{4}{\Gamma}_{ai} = \overset{2}{\Gamma}^j_{ki} \lambda_j \lambda^k_a + \overset{2}{\Gamma}^b_{ai} (\lambda_b - \lambda_j \lambda^j_b) + \overset{2}{\Gamma}^j_{ai} \lambda_j - \overset{2}{\Gamma}_{ji} \lambda^j_a + \Lambda^b_{ji} (\lambda^j_a \lambda_b - \lambda^j_a \lambda^k_b \lambda_k) + \lambda_i \lambda_a, \quad (8)$$

$$\overset{4}{\Gamma}_{ab} = \overset{2}{\Gamma}^i_{jb} \lambda_i \lambda^j_a + \overset{2}{\Gamma}^c_{ab} (\lambda_c - \lambda_i \lambda^i_c) + \overset{2}{\Gamma}^i_{ab} \lambda_i - \overset{2}{\Gamma}_{ib} \lambda^i_a + \Lambda^c_{ib} (\lambda^i_a \lambda_c - \lambda^i_a \lambda^j_c \lambda_j) - \lambda_a \lambda^i_b \lambda_i + \lambda_a \lambda_b. \quad (9)$$

Теорема 1. Композиционное оснащение распределения плоскостей NS_n индуцирует пучок групповых связностей 4-го типа.

Из этого пучка можно выделить связность 4-го типа с объектом $\overset{04}{\Gamma}$, подставляя в формулы (8-9) охваты параметров пучка. Заметим, что все результаты, полученные для пучка связностей 4-го типа, справедливы и для связности 4-го типа.

Выражения для дифференциалов точек B_a и B_i в пучке связностей 4-го типа приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} dB_a &= (\dots)_a^b B_b + (\nabla^4 \lambda_a^i + t_{aJ}^i \omega^J) B_i + (\Omega_a^4 + l'_{aI} \omega^I) A, \\ dB_i &= (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + (\nabla^4 \lambda_i + t_{iJ} \omega^J) A. \end{aligned} \quad (10)$$

Из сопоставления выражений для дифференциалов точек B_a и B_i относительно пучков связностей 1-го и 2-го типов [см. 2,3] с выражениями (10), получается

Теорема 2. *Параллельные перенесения нормали 2-го рода Нордена N_{m-1} относительно пучка связностей 4-го типа производятся также, как в пучке связностей 2-го типа [см. 2,3], а именно, нормаль 2-го рода Нордена N_{m-1} переносится параллельно в пучке групповых подсвязностей $\Gamma_2 = \{\Gamma_{jK}^0, \Gamma_{iJ}^2\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} , если композиционное оснащение a -специальное ($\nabla^4 \lambda_i|_\rho = 0$)*

Аналогично охарактеризуем параллельные перенесения плоскости Картана C_{n-m-1} в пучке связностей 4-го типа

Теорема 3. *Плоскость Картана C_{n-m-1} переносится параллельно тогда и только тогда, когда она смещается: а) в нормали 1-го рода Нордена P_{n-m} , причем перенесение ($\nabla^4 \lambda_a^i|_\rho = 0$) происходит в пучке групповых подсвязностей $\Gamma_2 = \{\Gamma_{jK}^0, \Gamma_{bI}^0, \Gamma_{aJ}^2\}$, если композиционное оснащение b -специальное и б) в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} , причем перенесение ($\Omega_a^4 = \nabla^4 \lambda_a - \lambda_i \nabla^4 \lambda_a^i|_\rho = 0$) осуществляется в линейной комбинации групповой связности Γ , если Γ принадлежит d -предпучку групповых подсвязностей.*

Литература

1. Омелян О. М. Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей // Тр. межд. конф. по геометрии и анализу. – Пенза, 2003. – С. 63 – 69.
2. Омелян О. М. Пучки связностей 1-го и 2-го типов, индуцированные композиционным оснащением распределения плоскостей // Движ. в обобщ. простр. – Пенза, 2005. – С. 94 – 101.
3. Омелян О. М. О совпадении групповых связностей, индуцированных внутренним композиционным оснащением распределения // Мат. заметки. 2017. – Т. 102:6. – С. 896–907.

ABOUT A BUNCH OF CONNECTION OF THE 4TH TYPE, INDUCED BY COMPOSITE EQUIPMENT OF THE DISTRIBUTION OF PLANES

O.M. Omelyan

In article the research of distribution of the planes continues. The bunch of connections of the 4th type induced by composite equipment of the distribution of planes is under construction. Geometrical characteristic of a bunch of connections of the 4th type is given. Work is based on a method of continuations and Cartan-Laptev's scopes.

Keywords: *distribution, stratification, connection, Cartan's equipping, Norden's normalization, composite equipment, bunch of connections*

UDC 514.822

EVOLUTION OF SUBSPACES IN $f(R)$ MULTIDIMENSIONAL GRAVITY

A.A. Popov¹

¹ *apopov@kpfu.ru*; Kazan Federal University

In this paper we give an overview of the evolution of homogeneous and isotropic subspaces in $f(R)$ multidimensional gravity.

Keywords: $f(R)$ gravity, subspaces, self-consistent solutions.

The compact extra spaces is widely used idea [1, 2, 3, 4]. Any multi-dimensional model has to lead to the effective 4-dim theory. This would imply relations between the observable four-dimensional geometry and a geometry of the higher dimensions.

One of the question remaining not clarified yet is: why specific number of dimensions are compactified and stable while others expand? Which specific property of subspace leads to its quick growth? There are many attempts to clarify the problem, mostly related to introduction of fields other than gravity. It may be a scalar field (most used case) or gauge fields. A static solutions can be obtained using the Casimir effect or form fields. Sometimes one of the subspace is assumed to be Friedmann-Robertson-Walker space by definition. Another possibility was discussed in [5]: it was shown that if the scale factor of our 3D space is much larger than the growing scale factor of the extra dimensions, a contradiction with observations can be avoided.

The origin of our Universe is usually related to its quantum creation from the space-time foam. Here we are interested in the subsequent classical evolution of the metrics rather than a calculation of this probability. Manifolds are nucleated having specific metrics. The set of such metrics is assumed to be very rich. After nucleation, these manifolds evolve classically forming a set of asymptotic manifolds, one of which could be our Universe. In paper [6] we consider models of the $f(R)$ gravity acting in 5 and 6 dimensions. No other fields are attracted to stabilize an extra space. We have found out that a number of asymptotic solutions is quite limited. This conclusion was confirmed both analytically and numerically. There is a set of initial conditions that lead to a common asymptote of classical solutions.

The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University. The work was also supported by the Russian Foundation for Basic Research Grant No. 19-02-00496.

References

1. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // *Phys. Lett. B*, **429** (1998) 263–272.
2. K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta. Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions // *Nucl. Phys. B*, **537** (1999) 47–108.
3. G. D. Starkman, D. Stojkovic and M. Trodden. Large extra dimensions and cosmological problems // *Phys. Rev. D*, **63** (2001) 103511.
4. U. Günther, P. Moniz and A. Zhuk. Nonlinear multidimensional cosmological models with form fields: Stabilization of extra dimensions and the cosmological constant problem // *Phys. Rev. D*, **68** (2003) 044010.

5. M. Yoshimura. Effective action and cosmological evolution of scale factors in higher-dimensional curved spacetime // Phys. Rev. D, **30** (1984) 344–356.
6. Ya. Lyakhova, A. Popov, S. Rubin. Classical evolution of subspaces // Eur. Phys. J. C, **78** (2018) 764.

ЭВОЛЮЦИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ В $F(R)$ МНОГОМЕРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

А.А. Попов

В этой работе дается обзор решений, описывающих эволюцию максимально симметричных подпространств в $f(R)$ многомерной теории гравитации.

Ключевые слова: $f(R)$ теория гравитации, подпространства, самосогласованные решения.

УДК 514.75

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ МНОГООБРАЗИЯ

$P_N^0(\mathbb{H})$

Ю.И. Попов¹

¹ *baschaschina@mail.ru*; Балтийский федеральный университет им. И. Канта

В статье рассматриваются различные типы дифференциально-геометрических структур, ассоциированных с многообразием $P_n^0(\mathbb{H})$.

Ключевые слова: подрасслоение, распределение, почти контактные структуры, аффинор, γ -лифт, π -структура

1. Тройку распределений, образованную соответственно распределением r -плоскостей Λ (Λ -распределение), m -плоскостей M , (M -распределение), гиперплоскостей H (H -распределение), где $r < m < n - 1$, проективного пространства P_n с отношением инцидентности $X \in \Lambda \subset M \subset H$ их соответствующих элементов в каждом центре X назовем трехсоставным распределением проективного пространства P_n или \mathbb{H} -распределением [1], при этом Λ -распределение назовем базисным распределением, а M -распределение и H -распределение – оснащающими распределениями. \mathbb{H} -распределение проективного пространства P_n будем трактовать как \mathbb{H} -подрасслоение многообразия P_n^0 [1], [2]. Многообразии P_n^0 , в котором задано \mathbb{H} -подрасслоение, назовем расслоенным многообразием $P_n^0(\mathbb{H})$ -структуры или, кратко, многообразием $P_n^0(\mathbb{H})$.

В данной работе показано, что к H -подрасслоению внутренним инвариантным образом присоединяются в дифференциальной окрестности 2-го порядка три однопараметрических семейства $(n - 2)$ -плоскостей $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$, $(\mathfrak{B}, \mathfrak{L})$, проходящих через центр A_0 . Введены почти контактные структуры (ПКС) основных структурных подрасслоений многообразия $P_n^0(\mathbb{H})$. Доказано, что Λ -, M -, H -подрасслоения несут по три однопараметрических семейства ПКС и, кроме того, с каждой прямой пучка канонических касательных ассоциируется по три однопараметрических семейства ПКС H -подрасслоения. Выяснены геометрические интерпретации полученных ПКС.

2. Рассматриваются флаговые структуры и π -структуры в дополнительно реперированных Λ -подрасслоении и M -подрасслоении. Указывается строение структурных аффиноров этих π -структур.

3. В различных дифференциальных окрестностях (начиная с первой) найдены пучки π -структур оснащающего H -подрасслоения и оснащающего M -подрасслоения (всего 10 теорем).

Наконец, приведены 3π -структуры и 4π -структуры, естественным образом возникающие в M -подрасслоении и H -подрасслоении многообразия $P_n^0(\mathbb{H})$ (всего приведено 12 различных типов таких пучков - однопараметрических или двухпараметрических).

4. Введем в рассмотрение многообразие $\mathcal{A}(\Lambda)$, базой которого является $B_n \equiv P_n$, а слоями – элементы Λ -подрасслоения (Λ -плоскости), $\dim \mathcal{A}(\Lambda) = n + r$. Построен аффинор P_J^I ($I, J, \dots = \overline{1, n}$), который задает π -структуру (G, Λ) на многообразии $P_n^0(\mathbb{H})$, где G -поле квазитензора $\{G_{ij}^p\}$. Многообразие $\mathcal{A}(\Lambda)$ примем теперь за базу нового расслоенного многообразия $T(\mathcal{A}(\Lambda))$, где $T(\mathcal{A}(\Lambda))$ – касательное расслоение к $\mathcal{A}(\Lambda)$. Строятся охваты компонент $f_{\tilde{B}}^{\tilde{A}}$ ($\tilde{A}, \tilde{B} = 1, 2, \dots, n, n+1, n+r$) аффинора f . Следуя Близникасу В.И. [3] поле аффинора $\{f_{\tilde{B}}^{\tilde{A}}\}$ назовем γ -лифтом тензорного поля $\{P_J^I\}$ в расслоении $T(\mathcal{A})$. Аналогичным образом построены охваты γ -лифта \hat{f} тензорного поля $\{P_J^I\}$ в касательном расслоении $T(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}(G)$ -расслоенное $(2n - r)$ -мерное многообразие, базой которого является $B_n \equiv P_n$, а слоями – элементы поля $(n - r)$ -мерных оснащающих плоскостей G .

Таким образом, построена f -структура ранга $(2r)$, определенная аффинором $\{f_{\tilde{B}}^{\tilde{A}}\}$ на многообразии $\mathcal{A}(\Lambda)$ и \hat{f} -структура ранга $2(n - r)$ на многообразии $\mathfrak{B}(G)$.

Известно [4], что f -структура индуцирует π -структуру, которую назовем π^* -структурой. Найдены охваты компонент структурного аффинора этой π^* -структуры, определенной в расслоении $T(\mathcal{A})$.

5. Доказано, что

а) сеть линий Σ_r^* Базылева В.Т. [5] можно внутренним образом присоединить к Λ -подрасслоению в дифференциальной окрестности 2-го порядка;

б) с каждой нормалью ν пучков (p, q) , (p, m) , (q, m) нормалей 1-го рода оснащающего H -подрасслоения, ассоциируется в M -подрасслоении сеть линий Σ_m^* Базылева В.Т., внутренним образом присоединенная к M -подрасслоению в окрестности 2-го порядка;

с) аналогичным образом построена сеть Σ_{n-1}^* Базылева В.Т., ассоциированная с оснащающим H -подрасслоением.

Литература

1. Попов Ю. И. *Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства* – Калининград.: Изд-во КГУ, 1990. – 181 с. – Деп. в ВИНТИ 5.11.90, – № 5625-В90.
2. Остиану Н. М., Базалюк Т. Н. *Многообразия, погруженные в пространстве проективной структуры* // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.. – М.: ВИНТИ, 1978. – Т. 10. – С. 75–115.
3. Близникас В. И. *Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов* // Лит. матем. сборник. – 1966. – Т. 6. – № 2. – С. 144–209.
4. Ishihara S. *Normal structure satiesfying $f^3 + f = 0$* // Kodai Math. Sci. Rep., 1966. – Vol. 18. – P. 36–47.
5. Базылев В. Т. *Об одном замечательном классе сетей* // Проблемы геометрии. – 1975. – Т. 7. – С. 105–116.

DIFFERENTIAL GEOMETRIC STRUCTURES OF MANIFOLD $P_N^0(\mathbb{H})$

Yu.I. Popov

The article discusses various types of differential geometric structures associated with the manifold $P_n^0(\mathbb{H})$.

Keywords: subbundle, distribution, almost contact structure, affinor, γ -lift, π -structure

UDC 514.763.81

COUPLING AND DECOUPLING OF MATRIX SCHRÖDINGER-HILL OPERATORS BY ISOSPECTRAL FLOWS

A.M. Pupasov-Maksimov¹

¹ pupasov.maksimov@ufff.edu.br; Mathematics Department, Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil

We describe a class of isospectral Darboux transformations of matrix Schrödinger-Hill operator which allows (local) coupling and decoupling of the corresponding potentials. Such transformations are possible when the monodromy matrix has multiple eigenvalues at some energies. Isospectral coupling by a first order Darboux transformation requires a degenerate factorization energy below the ground state. Isospectral coupling by a second order Darboux transformation requires a complex degenerate factorization energy. An example of a non-trivial degenerate factorization energy and the corresponding isospectral deformation of a piece-wise constant potential is presented.

Keywords: Darboux transformation, isospectral deformations, finite-gap integration, hidden symmetries

Existence of deep relations between integrable systems, algebraic and geometric structures is well known and proved to be extremely fruitful both in mathematics and theoretical physics. Neuman oscillator represents a classical example which connects Hamiltonian mechanics, symplectic geometry, finite-gap integration of the periodic KdV initial problem, spectral theory of differential operators, algebraic geometry of compact Riemann surfaces etc. Such a simple system of $n + 1$ uncoupled harmonic oscillators constrained to a unit sphere in configuration space describes n -level Bargmann potentials widely used in quantum mechanics in terms of trajectories asymptotically approaching equilibria. In this example, dynamics of the integrable system correspond to isospectral deformations of the Schrödinger operator. Note that "...the KdV theory is exactly the theory of isospectral symmetries of type (1) of the Schrodinger operator and, therefore, could have arisen independently within the framework of spectral theory" [1]. Remarkable generalization to the case of multi-particle Neuman oscillators and matrix potentials was given in [2].

In this work we study isospectral Darboux transformations of matrix Schrödinger-Hill operators. Consider potential $V(x)$ of the (matrix, or n -channel) Schrödinger operator

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (1)$$

It is real symmetric matrix function. Let $V(x+T) = V(x)$. We also assume that $V(x)$ is a piecewise continuous, $V(x) \in \mathbf{PC}[\mathbb{R}, \text{Sym}_n(\mathbb{R})]$. Let $M(E)$ be the monodromy matrix which corresponds to the potential. Monodromy matrix is a symplectic matrix, $M(E) \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, $E \in \mathbb{C}$, (note that $M(E) \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ for real values of spectral parameter $E \in \mathbb{R}$).

Eigenvalues $\beta_j(E)$ whose absolute value equals 1 correspond to propagating spin-states given by (n-dimensional projection of) eigenvectors, $\vec{b}_j(E)$. Spectral parameter E belongs to the spectrum, if there is at least one pair of propagating spin-states, $E \in \sigma(V)$.

Ground state $E_0 = \inf \sigma(V)$. The aim of the present work is to study isospectral symmetries of matrix Schrödinger operators with periodic potentials (with a possible generalization to the quasi-periodic case, and to the stochastic case) and to apply the results in the theory of integrable systems, analysis of stability of mechanical systems, design of periodic structures with desired spin/polarization transport (something like anisotropic photonic crystals).

First approach to study isospectral symmetries is to consider KdV dynamic of potential $V(x, t)$, which in the matrix case reads

$$V_t = 3VV_x + 3V_xV - V_{xxx}. \quad (2)$$

The second approach is to study so called dressing chain or Darboux transformations

$$V_{i+1} = -W'_i(x) + W_i^2(x) + \mathcal{E}_i = W'_{i+1}(x) + W_{i+1}^2(x) + \mathcal{E}_{i+1}$$

which is the simplest way to introduce isospectral deformations.

In the single-channel case two approaches are roughly equivalent, $V_i(x) = V(x, t_i)$. In the multi-channel case, the first approach was implemented by Goncharenko and Veselov, [3] and [4], while the dressing chains were not studied (up to our knowledge). Dressing chain is related with the factorization of the Schrödinger operator and Darboux transformations [5]. Our preliminary studies of the isospectral Darboux transformations in the n-channel case lead to the following observations A and B.

Let $V_0(x) = \text{diag}[v_1(x), \dots, v_n(x)]$. It is seen that matrix KdV equation (2) (and all equations of the corresponding hierarchy) will preserve diagonal structure of potential. This is in an agreement with a quantum intuition which suggests that switching on an arbitrary small interaction between channels will strongly affect the spectrum by (Feshbach) resonances and threshold effects. Nevertheless, in some cases a hidden symmetry which allows an isospectral coupling can be observed.

A) Existence of an isospectral coupling.

A1) *There exists $\mathcal{E}_0 < E_0$ such that the algebraic multiplicity of an eigenvalue (Floquet multiplier) $\beta_a(\mathcal{E}_0)$ is greater than 1, $\mu_A[\beta_a(\mathcal{E}_0)] = m_a > 1$. Then, in the dressing chain with $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0$ each potential $V_i(x)$ belongs to $m_a - 1$ parametric family of isospectral non-diagonal potentials. These potentials cannot be diagonalized by a constant orthogonal transformation, except finite number of potentials which are diagonal and corresponds to KdV dynamics.*

A2) *There exist $\mathcal{E}_0 \in \mathbb{C}$ such that the algebraic multiplicity of an eigenvalue $\beta_a(\mathcal{E}_0)$ is greater than 1. Then, in the dressing chain with $\mathcal{E}_{2k} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_{2k+1} = \mathcal{E}_0^*$ each potential $V_{2k+2}(x)$ is Hermitian and belongs to $2m_a - 2$ parametric family of isospectral non-diagonal potentials. These potentials cannot be diagonalized by a constant orthogonal transformation, except a finite number of potentials which are diagonal.*

$m_a - 1$ parametric family of potentials corresponds to a family of $m_a - 1$ dimensional subspaces of an m_a dimensional invariant subspace associated with $\beta_a(\mathcal{E}_0)$. That is $\{V_i(x)\} \propto S^{m_a-1}$. Diagonal potentials correspond to coordinate axes (and can be obtained by KdV flows). We are interested mostly in the case of isospectral coupling because it cannot be reproduced by KdV isospectral flows. Therefore, in the matrix case the method of dressing chains seems to be more general. Isospectral coupling is also a powerful ingredient of the inverse (scattering) problems where it allows first separately solve inverse problems for each channel and then to introduce a coupling without destroying spectrum [6], [7].

The main question is to find degenerate points \mathcal{E}_0 of the monodromy matrix. This is a complicated problem already in the case of a diagonal potential.

B) Trivial and non-trivial degeneracies of n-channel monodromy matrix.

B1) In a trivial case

$$\beta_{a,1}(E) = \dots = \beta_{a,m}(E).$$

Scalar potentials in these m channels are isospectral, $\sigma(v_{a,1}(x)) = \dots = \sigma(v_{a,m}(x))$.

B2) In the non-trivial two-channel case $\sigma(v_1(x)) \neq \sigma(v_2(x))$. There exists an infinite number of intersections $\beta_1(\mathcal{E}) = \beta_2(\mathcal{E})$ when $\mathcal{E} > E_0$. Introducing a shift parameter δ , $v_2(x) \rightarrow v_2(x) + \delta$ we can move these roots along the real line which in some cases may lead to $\mathcal{E} < E_0$ thus realizing the case A1. When two such roots suddenly collapse, further increasing of δ move these roots to complex plane, thus realizing the case A2.

The case B1) is trivial since just by a shift one can obtain an isospectral scalar potential, $v_2(x) = v_1(x - x_0)$. Another situation is in the case B2), since one have to solve a transcendental equation to find a factorization constant \mathcal{E}_0 . We have found some particular examples where solutions exist in the case of piecewise constant potentials. Figure 1 shows an example of the corresponding isospectral coupling. Development of a complete theory of isospectral coupling and decoupling in the case of finite gap matrix potentials seems to be an important and reach mathematical problem which connects algebraic geometry, complex analysis, special functions.

Isospectral deformations (2) given by matrix solitons (see [3] and [4]) preserve diagonality of potential, since $V(x, 0) = \text{diag}(v_i)$, $V_x(x, 0) = \text{diag}(v_{i,x})$ and as a result V_t is a diagonal all the time. Isospectral Darboux transformations may produce non-trivial coupling. That is in the case of matrix potentials (solitons), potentials generated by Darboux transformations (with coupling) corresponds to different KdV orbits.

Diagonal superpotentials generate a discrete flow which follows KdV orbit, whereas non-diagonal superpotentials generate a discrete flow which is transversal to a KdV orbit. Taking a continuous limit of discrete Darboux flow one can obtain some new integrable system (whose dynamic is transversal to matrix KdV).

Research is partially supported by CNPQ (409192/2016-3) and FAPEMIG (CEX APQ 00218/15). I am grateful to Mikhail Saygin and quantum optical technologies lab of Moscow State University for hospitality during my scientific visit.

References

1. Veselov A. P., Shabat A. B. *Dressing chains and the spectral theory of the Schrödinger operator.*// – Functional Analysis and Its Applications 27, no. 2 – 1993. – pp. 81-96.

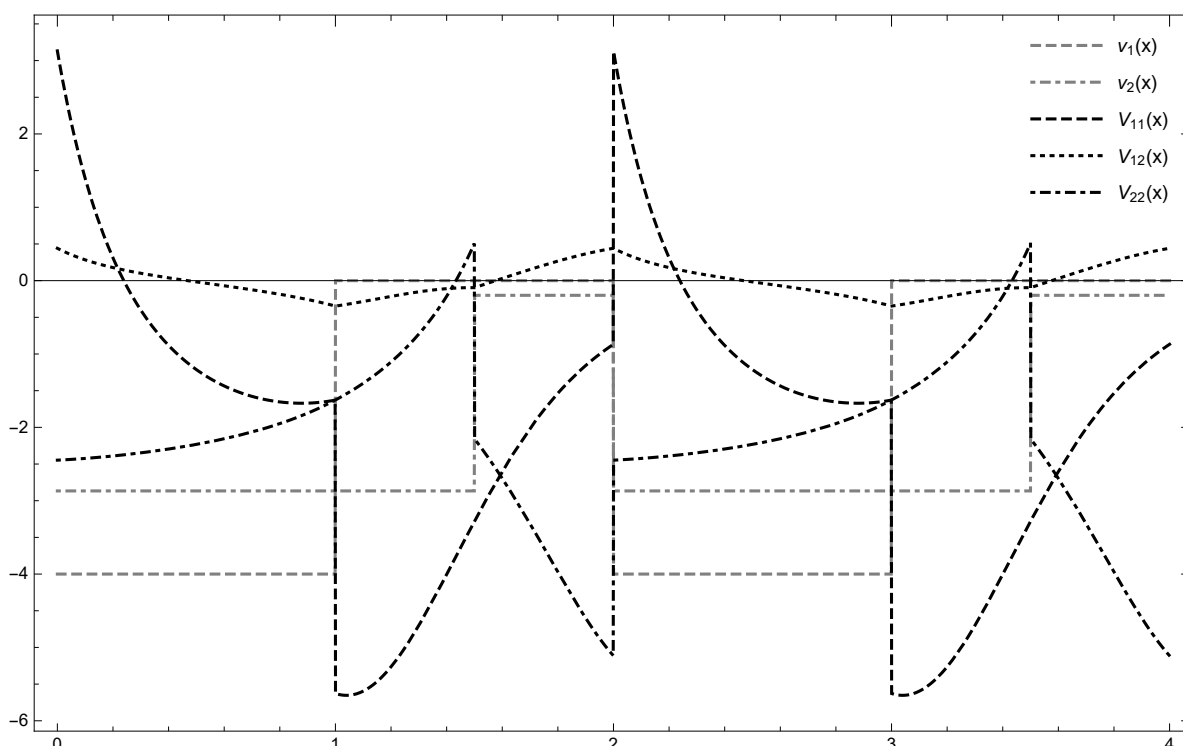


Fig. 1. Isospectral coupling of two Kronig-Penney potentials to illustrate non-trivial case B2. In this case we found a degenerate point of monodromy matrix at real energy below the ground state.

2. Schilling R. J. *Particle representation for finite gap operators (Baker-Akhiezer)*.// – Dissertation. – Univ. of Arizona. – 1982. – p145.
3. Goncharenko V. M., Veselov A. P. *Yang-Baxter maps and matrix solitons*.// – In New trends in integrability and partial solvability. – Springer, Dordrecht, 2004. – pp. 191-197.
4. Goncharenko V. M. *Multisoliton solutions of the matrix KdV equation*.// – Theoretical and Mathematical Physics. – 2001. – 126(1). – pp. 81-91.
5. Suzko A. A. *Intertwining technique for the matrix Schrödinger equation*.// – Physics Letters A. – 2005. – 335(2-3) – pp. 88-102.
6. Pupasov A. M., Samsonov B. F., Sparenberg J.-M., Baye D. *Reconstructing the nucleon-nucleon potential by a new coupled-channel inversion method*.// – Physical review letters. – 2011. – 106(15) – p.152301.
7. Baye D., Sparenberg J.-M., Pupasov-Maksimov A. M., Samsonov B. F. *Single- and coupled-channel radial inverse scattering with supersymmetric transformations*.// – Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2014 – 47(24) – p.243001.

СМЕШИВАНИЕ КАНАЛОВ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА-ХИЛЛА ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ.

А.М. Пупасов-Максимов

Описан класс изоспектральных преобразований Дарбу матричного оператора Шредингера-Хилла, который позволяет управлять связью между каналами. Такие преобразования возникают если при некоторых значениях энергии появляются кратные собственные значения

матрицы монодромии. Изоспектральное преобразование Дарбу первого порядка требует наличия вырожденного (вещественного) значения энергии, меньшего энергии основного состояния. Изоспектральное преобразование Дарбу второго порядка требует наличия вырожденного комплексного значения энергии. Приведен пример нетривиального случая вырожденной энергии факторизации и соответствующей изоспектральной деформации, смешивающий каналы кусочно-постоянного матричного потенциала.

Ключевые слова: преобразования Дарбу, изоспектральные преобразования, скрытые симметрии

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.К. Рыбников¹, К.В. Семенов²

¹ *arybnikov@mail.ru*; Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова

² *ksemen@mech.math.msu.su*; Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова

В работе дается геометрическое определение 1-струй и 2-струй сечений, дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка рассматривается как поле относительного инварианта, вводится фундаментальный объект структуры, ассоциированной с уравнением и изучаются его геометрические свойства.

Ключевые слова: расслоения, главные формы, сечения, струи сечений, поднятия, относительный инвариант, фундаментальный объект

1. Рассмотрим расслоенное многообразие $E = E(M, \pi)$ общего типа с n -мерной базой M , 1-мерными слоями и проекцией π .

Обозначим через x^1, \dots, x^n, z адаптированные локальные координаты в E (x^1, \dots, x^n - базовые координаты, z - слоевая координата). Система главных форм в состоит из базовых форм $\omega^1, \dots, \omega^n$ и слоевой формы ω^{n+1} . Структурные уравнения, которым удовлетворяют эти формы, имеют вид:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega^{n+1} = \omega^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^{n+1} + \omega^j \wedge \omega_j^{n+1}.$$

В каждой точке $Q \in E$ система главных форм представляет собой базис в касательном пространстве T_Q^*E (корепер), сопряженный с адаптированным к E репером в касательном пространстве T_QE , который состоит из векторов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}$. При этом \vec{e}_{n+1} - вектор, касательный к 1-мерному слою, проходящему через точку Q , а векторы \vec{e}_j ($j = 1, \dots, n$) трансверсальны к слою.

Напомним (см. [1]), что струей порядка 1 (короче - 1-струей) в точке $Q \in E$ принято называть класс всех проходящих через Q сечений $\sigma \subset E$, имеющих в точке Q общее касательное пространство, которое мы обозначим h_Q . Струю порядка 1 в точке Q условимся обозначать j_Q^1 . Совокупность всех 1-струй обозначим J^1E . Задание 1-струи j_Q^1 равносильно заданию пары (Q, h_Q) , где $Q(x^1, \dots, x^n, z) \in E$, $h_Q \subset$

$T_Q E$ – общее касательное пространство всех сечений $\sigma \subset E$, принадлежащих 1-струе j_Q^1 . При этом h_Q натянута на векторы $\vec{e}_j^h = pr_h \vec{e}_j$ (проекции векторов \vec{e}_j на h_Q параллельно \vec{e}_{n+1}), которые имеют вид: $\vec{e}_j^h = \vec{e}_j + p_j \cdot \vec{e}_{n+1}$.

Переменные x^i, z, p_j можно рассматривать как локальные координаты в многообразии всех пар (Q, h_Q) и, следовательно, как локальные координаты в многообразии 1-струй $J^1 E$.

Адаптированный к 1-струе j_Q^1 репер в $T_Q E$, состоящий из векторов $\vec{e}_1^h, \dots, \vec{e}_n^h, \vec{e}_{n+1}$, сопряжен с корепером в $T_Q^* E$, состоящим из форм $\omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{n+1} - p_j \omega^j$.

Заметим, что

$$d(\omega^{n+1} - p_j \omega^j) = (\omega^{n+1} - p_j \omega^j) \wedge \omega_{n+1}^{n+1} + \omega^j \wedge \Delta p_j,$$

где

$$\Delta p_j = dp_j - p_m \omega_j^m + p_j \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_j^{n+1}$$

Замечание 1. На всех сечениях $\sigma \subset E$, принадлежащих 1-струе j_Q^1 с координатами x^i, z, p_j , форма $\omega^{n+1} - p_j \omega^j$ обращается в нуль:

$$\omega^{n+1} - p_j \omega^j = 0$$

и, следовательно,

$$\omega^{n+1} = p_j \omega^j \tag{1}$$

Это утверждение справедливо, поскольку $\omega^{n+1} - p_j \omega^j = 0$ на векторах $\vec{e}_1^h, \dots, \vec{e}_n^h$ и, следовательно, на всех векторах, принадлежащих $T_Q \sigma = h_Q$. \square

Многообразие 1-струй $J^1 E$ можно одновременно рассматривать и как расслоение $J^1 E(E, \pi_0^1)$ над базой E (при этом ω^i, ω^{n+1} – базовые формы, Δp_j – слоевые формы), и как расслоение $J^1 E(M, \pi^1)$ над базой M (при этом ω^i – базовые формы, $\omega^{n+1} - p_k \omega^k, \Delta p_j$ – слоевые формы).

2. При правильном продолжении уравнения (1), т.е. при внешнем дифференцировании и последующем разложении по лемме Картана (более детальное описание процесса продолжения см. в [1,2]), возникают дифференциальные уравнения:

$$\Delta p_j = p_{jk} \omega^k \quad (p_{jk} = p_{kj}) \tag{2}$$

при этом p_{jk} – дополнительные (по отношению к x^i, z, p_j) переменные, симметричные по нижним индексам.

Уравнения (1) и (2) в совокупности:

$$\left. \begin{aligned} \omega^{n+1} &= p_j \omega^j \\ \Delta p_j &= p_{jk} \omega^k \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

являются уравнениями сечений $\sigma^1 \subset J^1 E(M, \pi^1)$, которые принято называть *поднятиями* сечений $\sigma \subset E$ в расслоенное многообразие 1-струй $J^1 E(M, \pi^1)$. Сечения $\sigma \subset E$, принадлежащие 1-струе j_Q^1 , имеют общее поднятие в $J^1 E$.

Продолжая уравнения (3), мы получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \omega^{n+1} &= p_j \omega^j \\ \Delta p_j &= p_{jk} \omega^k \\ \Delta p_{jk} &= p_{jkl} \omega^l \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta p_{jk} &= dp_{jk} - p_{mk} \omega_j^m - p_{jm} \omega_k^m + p_{jk} \omega_{n+1}^{n+1} - p_m \omega_{jk}^m + \\ &+ p_j \omega_{k,n+1}^{n+1} + p_k \omega_{j,n+1}^{n+1} + p_j p_k \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{jk}^{n+1} \end{aligned}$$

При этом имеет место симметрия коэффициентов p_{jkl} по всем индексам.

Класс сечений $\sigma \subset E$, которые принадлежат одной 1-струе и имеют общее поднятие в многообразии, элементами которого являются поднятия сечений σ^1 , можно называть струей 2-го порядка (коротко – 2-струей) в точке Q (такое определение 2-струи согласуется с определением, принятым в [1]). Струю порядка 2 в точке Q условимся обозначать j_Q^2 . Совокупность всех 2-струй обозначим J^2E .

Многообразии 2-струй J^2E можно рассматривать как расслоение $J^2E(M, \pi^2)$ над базой M . Переменные x^i, z, p_j, p_{kl} ($p_{kl} = p_{lk}$) можно рассматривать как локальные координаты в многообразии 2-струй J^2E .

Уравнения (4) являются уравнениями поднятий $\sigma^2 \subset J^2E$ сечений $\sigma \subset E$ в расслоение 2-струй $J^2E(M, \pi^2)$.

Замечание 2. Если в качестве главных форм на многообразии E выбраны дифференциалы $\omega^i = dx^i$ ($i = 1, \dots, n$), $\omega^{n+1} = dz$, уравнения (4) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} dz &= p_j dx^j \\ dp_j &= p_{jk} dx^k \\ dp_{jk} &= p_{jkl} dx^l \end{aligned} \right\}$$

В этом случае коэффициенты p_j, p_{jk}, p_{jkl} превращаются в частные производные:

$$p_j = \frac{\partial z}{\partial x^j}; \quad p_{jk} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k}; \quad p_{jkl} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l}. \quad \square$$

3. Заметим, что рассмотрение дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка можно интерпретировать как рассмотрение дифференциально-геометрической структуры, порожденной относительным инвариантом $F = F(x^i, z, p_j, p_{kl})$, поле которого задано на расслоении 2-струй $J^2E = J^2E(M, \pi^2)$.

Равенство:

$$F = 0 \quad (5)$$

можно рассматривать как более общую форму записи дифференциального уравнения. В случае, когда в качестве главных форм на многообразии E выбраны дифференциалы $\omega^i = dx^i$ ($i = 1, \dots, n$), $\omega^{n+1} = dz$, равенство (5), рассматриваемое на поднятиях сечений $\sigma \subset E$, в расслоение 2-струй $J^2E = J^2E(M, \pi^2)$, принимает (в силу Замечания 2) традиционный вид:

$$F\left(x^i, z, \frac{\partial z}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^k \partial x^l}\right) = 0.$$

Решения дифференциального уравнения (5) – это сечения $\sigma \subset E$, на поднятиях которых в J^2E относительный инвариант F равен нулю.

Выбрав в качестве главных форм на J^2E формы $\omega^i, \omega^{n+1} - p_j \omega^j, \Delta p_j - p_{jk} \omega^k, \Delta p_{jk}$, можно представить дифференциальное уравнение относительного инварианта F в виде:

$$dF - F(\omega_m^m + \omega_{n+1}^{n+1}) = F_i \omega^i + F_{n+1}(\omega^{n+1} - p_k \omega^k) + F^j(\Delta p_j - p_{jk} \omega^k) + F^{uv} \Delta p_{uv}$$

Объект с компонентами $F, F_i, F_{n+1}, F^j, F^{uv}$ определяет дифференциально-геометрическую структуру, ассоциируемую с дифференциальным уравнением.

На поднятии сечения $\sigma \subset E$, которое является решением, этот объект превращается в фундаментальный объект сечения (аналог фундаментального объекта гиперповерхности).

Настоящая работа посвящена изучению свойств фундаментального объекта.

Литература

1. Васильев А. М. *Теория дифференциально-геометрических структур*. – М.: МГУ, 1987. – 190 с.
2. Лаптев Г. Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии*. // Труды Геометрического семинара ВИНТИ АН СССР. – М.: 1966. – Т. 1. – С. 139–189.
3. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П., *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*. // Проблемы геометрии. Итоги науки. ВИНТИ АН СССР. – М.: 1979. – Т. 9. – 430 с.
4. Лаптев Г. Ф. *К инвариантной геометрической теории дифференцируемых отображений*. // Труды Геометрического семинара. ВИНТИ АН СССР. – М.: 1979. – Т. 6. – С. 37–42.

ON GEOMETRIC STRUCTURES ASSOCIATED WITH A SECOND ORDER PDES

A.K. Rybnikov, K.V. Semenov

The paper gives a geometric definition of 1-jets and 2-jets of sections, a second order differential equation with partial derivatives is considered as a field of relative invariant, a fundamental object associated with the equation is introduced, and its geometric properties are studied.

Keywords: bundled spaces, main forms, sections, jets, lifts, relative invariant, fundamental object

УДК 514.76

НОВЫЙ ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕНЗОРОВ КРИВИЗНЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВОЙ И АФФИННОЙ СВЯЗНОСТЕЙ

Н.А. Рязанов¹

¹ ryazanov-92@mail.ru; Балтийский федеральный университет им. И. Канта, институт физико-математических наук и информационных технологий

Рассмотрены фундаментально-групповая и аффинная связности. Для каждой связности показан подход, который позволяет найти дифференциальные уравнения на компоненты объекта кривизны соответствующей связности более быстрым путём, чем

дифференцированием выражений этих объектов через объекты связности и их пфаффовы производные.

Ключевые слова: структурные уравнения Лаптева, фундаментально-групповая связность, аффинная связность, объект связности, тензор кривизны

Рассмотрено главное расслоение, базой которого является n -мерное гладкое многообразие, а типовым слоем r -членная группа Ли. Структурные уравнения для форм расслоения и их продолжения имеют вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i;$$

$$D\omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega_i^\alpha, \quad D\omega_i^\alpha = \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha + \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha;$$

$$\omega_\beta^\alpha = 2C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma, \quad \omega_{[jk]}^i \cong 0, \quad \omega_{[ij]}^\alpha \cong 0 \pmod{\omega^i}; \quad (i, \dots = \overline{1, n}, \quad \alpha, \dots = \overline{n+1, n+r}).$$

Фундаментально-групповая и аффинная связности определяются формами связности, которые удовлетворяют структурным уравнениям, в которые входят компоненты объектов кривизны:

$$\Omega^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma_i^\alpha \omega^i, \quad \Omega_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k,$$

$$\Delta\Gamma_i^\alpha + \omega_i^\alpha = \Gamma_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i \omega^l, \quad \Delta\Gamma_i^\alpha = d\Gamma_i^\alpha + \Gamma_i^\beta \omega_\beta^\alpha - \Gamma_j^\alpha \omega_j^i,$$

$$D\Omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma + R_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j, \quad D\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l,$$

$$R_{ij}^\alpha = \Gamma_{[ij]}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_i^\beta \Gamma_j^\gamma, \quad R_{jkl}^i = \Gamma_{j[kl]}^i - \Gamma_{j[k}^i \Gamma_{l]}^i.$$

Для каждой связности показан подход, который позволяет найти дифференциальные уравнения на компоненты объекта кривизны соответствующей связности более быстрым путём, чем дифференцированием выражений этих объектов через объекты связности и их пфаффовы производные. Метод состоит в последовательном разрешении кубических уравнений, полученных при замыкании структурных уравнений форм связностей

$$(\Delta R_{ij}^\alpha - 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{ij}^\beta \Gamma_k^\gamma \omega^k) \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0,$$

$$(dR_{jkl}^i + R_{jkl}^m \Omega_m^i - R_{mkl}^i \Omega_j^m - R_{jml}^i \omega_k^m - R_{jkm}^i \omega_l^m) \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0,$$

сначала по лемме Лаптева

$$(\Delta R_{ij}^\alpha - 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{ij}^\beta \Gamma_k^\gamma \omega^k) \wedge \omega^j = \omega^j \wedge \tilde{\omega}_{ij}^\alpha, \quad \tilde{\omega}_{[ij]}^\alpha \cong 0;$$

$$(dR_{jkl}^i + R_{jkl}^m \Omega_m^i - R_{mkl}^i \Omega_j^m - R_{jml}^i \omega_k^m - R_{jkm}^i \omega_l^m) \wedge \omega^l = \omega^l \wedge \tilde{\omega}_{jkl}^i, \quad \tilde{\omega}_{j[kl]}^i \cong 0;$$

затем по лемме Картана:

$$\Delta R_{ij}^\alpha - 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{ij}^\beta \Gamma_k^\gamma \omega^k + \tilde{\omega}_{ij}^\alpha = \bar{R}_{ijk}^\alpha \omega^k,$$

$$dR_{jkl}^i + R_{jkl}^m \Omega_m^i - R_{mkl}^i \Omega_j^m - R_{jml}^i \omega_k^m - R_{jkm}^i \omega_l^m + \tilde{\omega}_{jkl}^i = \bar{R}_{ijkl}^i \omega^m.$$

Альтренируя эти уравнения и учитывая сравнения по модулю базисных форм

$$\tilde{\omega}_{[ij]}^{\alpha} \cong 0, \quad \tilde{\omega}_{j[kl]}^i \cong 0,$$

мы находим (см. [1]):

$$\Delta R_{ij}^{\alpha} = R_{ijk}^{\alpha} \omega^k, \quad \Delta R_{jkl}^i = R_{ijklm}^i \omega^m.$$

Так выводятся дифференциальные уравнения для компонентов объектов кривизны фундаментально-групповой и аффинной связностей.

Литература

1. Рязанов Н.А. *Объект кривизны фундаментально-групповой связности 2-го порядка* // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. №4 – (2017) С. 10–15.

NEW DERIVATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE CURVATURE TENSORS OF A FUNDAMENTAL GROUP AND AFFINE CONNECTIONS

N.A. Ryazanov

The fundamental group and affine connections are considered. For each connection, an approach is shown that allows to find the differential equations for the components of the curvature tensor of the corresponding connection in a faster way than by differentiating the expressions of these objects in terms of the connection objects and their Pfaffian derivatives.

Keywords: structure equations of Laptev, fundamental-group connection, affine connection, connection object, curvature tensor

УДК 514.822

О РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОЕКТИВНО ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ОТЛИЧНЫХ ОТ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ

А.А. Сабыканов¹, Й. Микеш², П. Пешка³

¹ *almazbek.asanovich@mail.ru*; Киргизский национальный университет

² *josef.mikes@upol.cz*; Palacky University in Olomouc

³ *patrik_peska@seznam.cz*; Palacky University in Olomouc

В статье обсуждается существование не полусимметрических рекуррентных проективно евклидовых пространств. Найдены необходимые и достаточные условия существования этих пространств.

Ключевые слова: рекуррентные пространства, проективно евклидовы пространства

Настоящая заметка посвящена вопросу о существовании n -мерных рекуррентных проективно евклидовых пространств, которые отличны от полусимметрических.

Пространство аффинной связности со связностью ∇ называется *полусимметрическим*, если его тензор кривизны R удовлетворяет следующим условиям $R \circ R = 0$.

Эти пространства обобщают *симметрические пространства*, которые характеризуются ковариантной постоянностью тензора кривизны: $\nabla R = 0$.

П.А. Широков изучал полусимметричные пространства, они неявно начались рассматриваться с условий $R \circ R = 0$, которые являются условиями интегрируемости уравнений $\nabla R = 0$. Название полусимметрическое было явно введено в статье Н.С. Синюкова. Он изучал геодезические отображения симметричных и полусимметричных пространств. Эти исследования были продолжены в работах Й. Микеша. См. [1, 2, 4, 5, 6]

Геометрия симметричных и полусимметричных пространств играет важную роль в теории римановых многообразий и их обобщениях. Большой интерес к полусимметричным пространствам имела гипотеза Номидзу [3], которая была опровергнута [7].

Рекуррентные пространства, введенные Рузе, являются естественным обобщением симметрических пространств, которые характеризуются абсолютной рекуррентностью риманова тензора, $\nabla R = \varphi \cdot R$.

Проективно евклидовы пространства исследовались в различных направлениях. Эти пространства геодезически эквивалентны евклидовым пространствам. П.А. Широковым [4, 5] были получены компоненты аффинной связности симметричных проективно евклидовых пространств.

Симметрические и полусимметрические проективно евклидовых пространства исследовались в работах [8,9]. Заметим, что проективно евклидово пространство полусимметрично тогда и только тогда, когда оно эквиаффинно. Следовательно, проективно евклидово пространство отлично от полусимметричного тогда и только тогда, когда оно не является эквиаффинным.

Компоненты аффинной связности проективного евклидова пространства имеют в проективной системе координат x следующую форму:

$$\Gamma_{ij}^h = \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i,$$

где ψ_i – некоторые функции.

Имеет место

Теорема. В произвольном неполусимметрическом рекуррентном проективно-евклидовом пространстве A_n выполняется одна из систем условий

$$\psi_{ij} = \kappa_i \varphi_j, \quad \kappa_{i,j} = \kappa_i (3\kappa_j + 1/3 \varphi_j), \quad \varphi_{i,j} = \varphi_i (3\kappa_j - 2/3 \varphi_j),$$

or

$$\psi_{ij} = \kappa_i \varphi_j, \quad \kappa_{i,j} = \kappa_i (3\kappa_j + (a-1) \varphi_j), \quad \varphi_{i,j} = \varphi_i (3\kappa_j - a \varphi_j),$$

$$a_{,i} = (6a-4)\kappa_i - b \varphi_i,$$

$$b_{,i} = (6a^2 - 10a + 9b + 4) \kappa_i +$$

$$\varphi_i \{6(a-2/3)^3 - 5/3 b - 7(1/18 + b) \cdot (a-2/3) + 8(a-2/3)^2 +$$

$$a(a-2/3) \cdot f(b a^{-3/2} - 2a^{1/2} - 2/3 a^{-1/2})\},$$

где κ_i , φ_i – некоторые неколлинеарные векторные поля, a , b – некоторые функции и f – некоторая дифференцируемая функция указанного аргумента, запятой « , » – обозначаем ковариантную производную и

$$\Psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j.$$

Указанные выше системы дифференциальных уравнений в ковариантных производных вполне интегрируемы в пространстве A_n .

Работа поддержана грантом IGA 2019015 университета Палацкого в г. Оломоуц.

Литература

1. Mikeš J., et al. *Differential geometry of special mappings*. – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 566 с.
2. Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. *Geodesic mappings and some generalizations*. – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009. – 304 с.
3. Nomizu K. *On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor* // Tôhoku Math. J. (2). – 1968. – Vol. 20. – P. 46–59.
4. Shirokov A. P.: *P. A. Shirokov's work on the geometry of symmetric spaces* // J. Math. Sci., New York. – 1998. – Vol. 89. – № 3. – P. 1253–1260.
5. Shirokov P.A.: *Selected investigations on geometry*. – Kazan Univ. Press, 1966.
6. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств*. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
7. Takagi H.: *An example of Riemannian manifolds satisfying $R(X, Y) \circ R = 0$ but not $\nabla R = 0$* // Tôhoku Math. J. (2). – 1972. – Vol. 24. – P. 105–108.
8. Peška P., Mikeš J., Sabykanov A. S.: *On semisymmetric projective Euclidean spaces* // Proc. 16th Conf. APLIMAT 2017. – 2017. – P. 1182–1188.
9. Sabykanov A. S., Mikeš J., Peška P.: *Recurrent equiaffine projective Euclidean spaces* // Filomat. – 2018. – Vol. 33:4. – P. 7.

ON RECURRENT PROJECTIVE EUCLIDEAN SPACES WHICH ARE NON SEMISYMMETRIC

A.A. Sabykanov, J. Mikeš, P. Peška

This work is devoted to the existence of non semisymmetric recurrent projective Euclidean spaces. The necessary and sufficient conditions for the existence of these spaces are found.

Keywords: recurrent spaces, projective Euclidean spaces

УДК 514.763, 514.764, 514.8

О ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Г.А. Серякин¹

¹ *gseryaki@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Работа посвящена исследованию 4-мерных нелоренцевых многообразий нулевой сигнатуры, обладающих симметриями в форме проективных движений. С каждым проективным движением связана сохраняющаяся величина, которая остается постоянной вдоль каждой 4-геодезической и определяет закон сохранения.

Ключевые слова: косономальный репер, проективное движение

Для того, чтобы векторное поле X было проективным движением, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$L_X G_{AB;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A} \quad (1)$$

здесь $A, B = [1, \dots, 4]$, $L_X G_{AB}$ – производная Ли метрики G_{AB} в направлении проективного движения X , φ есть 1-форма, и точка с запятой означает ковариантное дифференцирование относительно метрики G_{AB} . Уравнения (1) разбиваются на две группы: уравнения Эйзенхарта:

$$h_{AB;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A}$$

и обобщенные уравнения Киллинга:

$$(L_X G_{AB})_{;C} = h_{AB}.$$

Метрики, допускающие нетривиальные решения $h_{AB} = cG_{AB}$ уравнений Эйзенхарта, называются h -метриками, а соответствующие пространства — h -пространствами. Тип проективного движения X и тип метрики G_{AB} определяются алгебраической структурой производной Ли $L_X G_{AB}$, задаваемой в каждой точке $p \in V$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X G_{AB}$. В работе рассматриваются 4-мерные h -пространства с характеристикой Сегре [2,2] и [4]. При помощи метода косономального репера А.В. Аминовой [1] были получены h -метрики указанного типа и исследована их структура.

Литература

1. Аминова А. В., *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*. – М.: Янус-К, 2002. – 606 с.
2. Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия* – М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. – 316 с.

ABOUT PROJECTIVE MOTIONS OF 4-DIMENSIONAL MANIFOLDS OF THE SPECIAL TYPE

G. A. Seryakin

The work is devoted to the problem of determining of 4-dimensional non-Lorentz manifolds of the zero

signature, admitting projective motions. The metrics of special types of such manifolds were founded and corresponding conservation laws were established.

Keywords: skew-normal frame, projective motion

УДК 514.764

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРОВАННОЙ ТЕОРИЕЙ ПРИБЛИЖЕНИЙ БАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Н. Синюкова¹

¹ oachepok@ukr.net; Государственное учреждение "Южноукраинский национальный педагогический университет имени К.Д.Ушинского"

На касательном расслоении пространства аффинной связности рассмотрены объекты связности двух видов. Первый из них порождён инвариантной теорией приближений базового пространства, второй получается из первого с помощью операции типа полного лифта. Для соответствующих пространств исследованы взаимосвязи между понятиями геодезической линии, почти геодезической линии, геодезического отображения, почти геодезического отображения.

Ключевые слова: пространство аффинной связности, касательное расслоение, инвариантная теория приближений, финслерова геометрия, полный лифт

Рассматривается пространство аффинной связности A^n класса C^r ($n > 2, r > 1$) с объектом связности Γ , который относительно каждой локальной системы координат (x^1, x^2, \dots, x^n) , определяется компонентами $\Gamma_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $h, j, k = \overline{1, n}$. Строится [2] так называемое расширение объекта связности Γ – объект связности $\tilde{\Gamma}$, определяемый компонентами $\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n)$,

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n) = \Gamma_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n) - \frac{1}{3} R_{(jk)\alpha}^h(x^1, x^2, \dots, x^n) y^\alpha,$$

где $h, j, k, \alpha = \overline{1, n}$, $R_{jk\alpha}^h(x^1, x^2, \dots, x^n)$ – компоненты тензора кривизны пространства A^n , круглые скобки обозначают симметрирование без деления по заключенным в них индексам. В отличие от компонент объекта Γ , компоненты объекта $\tilde{\Gamma}$ зависят уже от $2n$ переменных, естественно считать, что указанным образом они определены на пространстве касательного расслоения $T(A^n)$. В то же время, исходя из количества компонент $\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n)$, расширенную связность $\tilde{\Gamma}$ можно рассматривать как связность на A^n , зависящую не только от точки пространства A^n , но и от касательного элемента в ней. Таким образом, связность $\tilde{\Gamma}$ в некоторой степени аналогична связностям Картана и Бервальда финслеровой геометрии. Связность $\tilde{\Gamma}$ естественным образом возникает в инвариантной теории приближений пространств A^n , порождает геометрию, связанную с этой теорией, именно в этой теории находит свои приложения [2].

На основе связности $\tilde{\Gamma}$, с помощью операции типа полного лифта [3], на $T(A^n)$ построена связность $s\tilde{\Gamma}$, компоненты $s\tilde{\Gamma}_{jk}^h$, $h, j, k = \overline{1, 2n}$, которой имеют вид

$$c\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n) = \tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n), \quad h, j, k = \overline{1, n};$$

$$c\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n) = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{jk}^{h-n}(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n)}{\partial x^\alpha} y^\alpha,$$

$$h = \overline{n+1, 2n}, \quad j, k, \alpha = \overline{1, n};$$

$$c\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n) = \tilde{\Gamma}_{j \ k-n}^{h-n}(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n),$$

$$h, k = \overline{n+1, 2n}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$c\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n) = \tilde{\Gamma}_{j-n \ k}^{h-n}(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n),$$

$$h, j = \overline{n+1, 2n}, \quad k = \overline{1, n};$$

$$c\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n) = 0, \quad j = \overline{n+1, 2n}, \quad h, k = \overline{1, n};$$

$$c\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n) = 0, \quad h = \overline{1, n}, \quad j, k = \overline{n+1, 2n};$$

$$c\tilde{\Gamma}_{jk}^h(x^1, x^2, \dots, x^n; y^1, y^2, \dots, y^n) = 0, \quad h, j, k = \overline{n+1, 2n}.$$

С помощью связности $c\tilde{\Gamma}$ в пространстве $T(A^n)$ введено ковариантное дифференцирование, традиционным образом ([1]) определены понятия геодезической линии, как кривой, вдоль которой её касательное векторное поле рекуррентно, почти геодезической линии, как кривой, вдоль которой существует компланарное двумерное распределение, содержащее касательный вектор этой кривой в каждой её точке. Установлены взаимосвязи между понятиями «геодезическая линия» и «почти геодезическая линия» в пространстве A^n относительно связности Γ , в пространстве A^n относительно связности $\tilde{\Gamma}$, в пространстве $T(A^n)$ относительно связности $c\tilde{\Gamma}$, геодезическими и почти геодезическими отображениями соответствующих пространств. При этом предполагается, что пространство A^n естественным образом вложено в пространство $T(A^n)$.

Литература

1. Синюков Н. С. *Геодезические отображения римановых пространств* – М.: Наука, 1979. – 256 с.
2. Синюков Н. С., Синюкова Е. Н., Мовчан Ю. А. *Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и её обобщений* // Изв. вузов, Математика. – 1994. – № 3(382). – С. 76–80.
3. Yano K., Ishihara Sh. *Tangent and cotangent bundles: differential geometry* – New York : Marcel Dekker, Inc., 1973. – 423 p.

ELEMENTS OF GEOMETRY OF TANGENT BUNDLE OF A SPACE OF AFFINE CONNECTION THAT IS INDUCED BY THE THEORY OF APPROXIMATIONS OF THE BASE SPACE

H.N. Sinykova

Two types of objects of affine connection are considered in the tangent bundle of a space of affine connection. The first one is generated by invariant theory of approximations of the base space, the second one is received from the first one with the help of the operation of the kind of complete lift. Interdependencies between the concepts of a geodesic line, an almost geodesic line, a geodesic mapping, an almost geodesic mapping are investigated for the corresponding spaces.

Keywords: space of affine connection, tangent bundle, invariant theory of approximations, Finsler geometry, complete lift

УДК 004.93

КРУГОВАЯ ТРИ-ТКАНЬ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ И ЕЁ ИНВАРИАНТЫ

В.В. Славский¹, В.А. Самарин², О.В. Самарина³

¹ slavsky2004@mail.ru; Югорский государственный университет

² samarin_va@bk.ru; Югорский государственный университет

³ samarina_ov@mail.ru; Югорский государственный университет

В работе предложен подход к анализу и обработке цифрового RGB-изображения, основанный на теории круговых три-тканей В. Бляшке. Определяются и исследуются инварианты три-ткани RGB-изображения относительно максимально широкой "топологической" группы преобразований.

Ключевые слова: круговые три-ткани, инварианты

Введение Цифровое трехканальное изображение в математике представляют как три прямоугольных двумерных массива чисел. При этом каждое число принимает целое значение в шкале $[0, 255]$ и соответствует одному элементу изображения или пикселю. Если отвлечься от технических деталей и не учитывать дискретность (пиксельное строение), то цифровое трехканальное RGB-изображение задается в виде трех неотрицательных функций $u_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ в некоторой области D на плоскости. С точностью до цветовой коррекции (переходу к другой шкале) такое изображение определяется семействами линий уровня функций $u_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, где $u_i(x, y) \in C^3(D)$:

$$L_1 = \{(x, y) : u_1(x, y) = \text{const}\}$$

$$L_2 = \{(x, y) : u_2(x, y) = \text{const}\}.$$

$$L_3 = \{(x, y) : u_3(x, y) = \text{const}\}$$

Будем называть эти три семейства линий топографической сеткой или три-тканью данного изображения [1].

Функцией три-ткани называется любая функция $W(u_1, u_2, u_3)$ нетождественно равная константе, такая что в области D выполняется тождество

$$W(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)) \equiv 0.$$

Эта функция выражает зависимость, связывающую три функции в окрестности данной точки. При общих преобразованиях изображения, относящихся к группе гомеоморфизмов, и имеющих вид

$$x = \varphi_1(x', y'), \quad y = \varphi_2(x', y')$$

функция три-ткани не меняется и, следовательно, является “топологическим инвариантом изображения”.

Круговая три-ткань цифрового RGB-изображения

Пусть имеются два уравнения $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = 0$ задающие окружности на плоскости:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= a_{1,1}(x^2 + y^2) + a_{1,2}x + a_{2,1}y + a_{3,3}, \\ g_2(x, y) &= b_{1,1}(x^2 + y^2) + b_{1,2}x + b_{2,1}y + b_{3,3}. \end{aligned}$$

Уравнение вида

$$u = f \cdot g_1 + (1 - f) \cdot g_2 = 0$$

назовём уравнением линейного пучка окружностей с вершинами g_1 , g_2 . Разрешая равенство $u = 0$ относительно f , получим функцию $f(x, y)$ все линии уровня которой есть окружности.

Три-ткань $W(u_1, u_2, u_3)$, образованная тремя линейными пучками окружностей, называется круговой тканью.

В работе [2] дана полная классификация регулярных круговых тканей. Ниже приведены условия на функцию $f(x, y)$ при которых линии уровня прямые (или окружности).

Теорема. Пусть $f(x, y)$ функция класса C^3 регулярная на плоскости, т.е. $\nabla f \neq 0$. Тогда, если $C_1(f) \equiv 0$, то все линии уровня прямые, а если $C_2(f) \equiv 0$, то все линии уровня окружности, где:

$$\begin{aligned} C_1(f) &= f^{(0,2)} p^2 - 2pqf^{(1,1)} + f^{(2,0)} q^2, \\ C_2(f) &= (p^2 + q^2) \left(p^3 f^{(0,3)} - 3p^2 q f^{(1,2)} + 3p q^2 f^{(2,1)} - q^3 f^{(3,0)} \right) \\ &\quad + 3f^{(1,1)} \left(q^4 f^{(2,0)} - p^4 f^{(0,2)} \right) + 6pq \left(f^{(1,1)} \right)^2 (p^2 - q^2) \\ &\quad - 3pq \left(f^{(0,2)} - f^{(2,0)} \right) \left(p^2 f^{(0,2)} - 3pqf^{(1,1)} + q^2 f^{(2,0)} \right), \end{aligned}$$

здесь $f^{(i,j)} = f^{(i,j)}(x, y) = \frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial^i x \partial^j y}$, $i, j = 0, 1, \dots$; $p = f^{(1,0)}$, $q = f^{(0,1)}$.

Доказательство. Пусть $\{x = x(t), y = y(t)\}$ натуральная параметризация линии $f(x, y) = const$, где t -длина дуги. Единичный касательный вектор и единичный вектор нормали в этом случае имеют вид $\tau = \{\dot{x}, \dot{y}\}$, $n = \{-\dot{y}, \dot{x}\}$ соответственно (здесь точка – производная по t). Из формул Френе-Серре следует

$$\ddot{x} = -\kappa \dot{y}, \quad \ddot{y} = \kappa \dot{x} - \kappa^2 \dot{y}, \quad \ddot{\tau} = \dot{\kappa} \dot{x} - \kappa^2 \dot{y}, \quad (1)$$

где κ – кривизна линии. Из четырёх равенств

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \equiv 1, \quad \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) \equiv 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}f(x(t), y(t)) \equiv 0, \quad \frac{d^3}{dt^3}f(x(t), y(t)) \equiv 0$$

с учетом (1) в пакете Mathematica вычисляем \dot{x} , \dot{y} , κ , $\dot{\kappa}$:

$$\kappa = \frac{C_1(f)}{(p^2 + q^2)^{3/2}}, \quad \dot{\kappa} = \frac{C_2(f)}{(p^2 + q^2)^3}.$$

Условию $\kappa \equiv 0$ соответствует равенство $C_1(f) \equiv 0$, а условию $\dot{\kappa} \equiv 0$ соответствует равенство $C_2(f) \equiv 0$.

Замечание. При исследовании цифровых изображений возникает важная задача улучшения цифрового изображения путем удаления “шума”. Естественный способ это сделать путем минимизации следующих интегральных характеристик:

$$IC_1 = \iint |C_1(f)(x, y)| dx dy,$$

$$IC_2 = \iint |C_2(f)(x, y)| dx dy.$$

Используя разностные отношения эти функционалы легко считаются для цифровых изображений.

Инвариантные характеристики круговой три-ткани В [1] определены следующие инвариантные характеристики три-ткани: поверхностный элемент Ω , связность ткани γ и кривизна κ . Эти величины являются инвариантными характеристиками и для круговых три-тканей и определяются следующими выражениями:

$$\Omega = W_1 W_2 du_1 \wedge du_2 = \dots, \quad \gamma = - \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial u_i} \ln(W_i) du^i + d \ln(W_1 W_2 W_3),$$

$$\kappa = A_{23} + A_{31} + A_{12},$$

где величины A_{rs} имеют вид:

$$A_{rs} = \frac{1}{W_r W_s} \frac{\partial^2}{\partial u_r \partial u_s} \ln \frac{W_r}{W_s} = \frac{W_{rrs}}{W_r^2 W_s} - \frac{W_{rss}}{W_r W_s^2} + \frac{W_{rs}}{W_r W_s} \left(\frac{W_{ss}}{W_s^2} - \frac{W_{rr}}{W_r^2} \right).$$

Замечание. В общем случае кривизна κ выражается через функции u_i в виде громоздкой формулы. В частном случае, когда первые две функции имеют вид координатных функций $u_1 = x$ и $u_2 = y$, а третья функция $u_3 = f(x, y)$ – произвольная, три раза непрерывно дифференцируемая функция, формула упрощается [3]. В данном случае функция ткани имеет вид $W(u_1, u_2, u_3) = f(u_1, u_2) - u_3$, а кривизна Бляшке три-ткани RGB-изображения определена формулой:

$$\kappa = \frac{f^{(0,2)} f^{(1,1)} p^2 - f^{(1,2)} q p^2 + p q^2 f^{(2,1)} - q^2 f^{(1,1)} f^{(2,0)}}{(pq)^3},$$

где для краткости введены обозначения $f^{(i,j)} = f^{(i,j)}(x, y) = \frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial^i x \partial^j y}$, $i, j = 0, 1, \dots$;
 $p = f^{(1,0)}$, $q = f^{(0,1)}$.

Построение круговой три-ткани и вычисление её инвариантных характеристик

Рассмотрим практический пример построения конкретной круговой три-ткани в математическом пакете Mathematica. Круговая три-ткань в рассматриваемом примере будет образована тремя функциями u_1 , u_2 , u_3 , линии уровней которых три пучка окружностей с центрами в точках $C_1 = (0, 0)$, $C_2 = (0, 1)$, $C_3 = (1, 0)$ на плоскости. Значения функций меняются в пределах от 0 до 1 на квадрате $[0, 2] \times [0, 2]$. Функция яркости RGB-изображения в данном случае имеет вид:

$$\left\{ u_1 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{x^2 + (-1 + y)^2}}{\sqrt{5}}, \quad u_3 = \frac{\sqrt{(-1 + x)^2 + y^2}}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Исключая из равенств координаты $\{x, y\}$ получим функцию данной три-ткани:

$$W(u_1, u_2, u_3) = 2 + 128u_1^4 - 10u_2^2 + 25u_2^4 - 10u_3^2 + 25u_3^4 - 80u_1^2(u_2^2 + u_3^2).$$

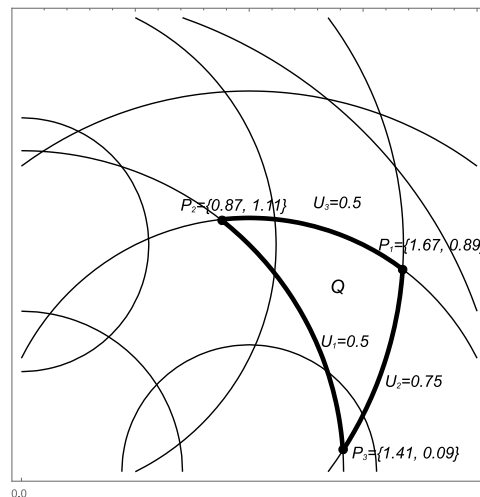


Рис. 1. Три-ткань заданного RGB-изображения

На рисунке 1 представлена соответствующая три-ткань и иллюстрация к формуле (16.6) из книги В. Бляшке “Введение в геометрию тканей”

$$N(u_1, u_2, u_3) = \ln \frac{W_1(P_3)W_2(P_1)W_3(P_2)}{W_1(P_2)W_2(P_3)W_3(P_1)},$$

которую можно использовать как “метку” или дескриптор изображений.

В работе [3] предложена методика вычисления инвариантных характеристик цифрового трехканального изображения, основанная на переходе к дискретной сетке точек (пикселей изображения).

Заключение Предложенный в работе подход к анализу цифрового RGB-изображения, основанный на теории три-ткани В. Бляшке, является актуальным и перспективным направлением в области обработки цифрового изображения. Представленные методы построения круговой три-ткани цифрового трехканального изображения, а также определения и вычисления инвариантных характеристик три-ткани цифрового RGB-изображения могут найти применение в решении

широкого класса задач классификации, анализа и обработки изображений, поиска соответствия по образцу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

Литература

1. Бляшке В. *Введение в геометрию тканей. Пер. с нем.* – М.: Физмат, 1959.
2. Лазарева В. Б. *Классификация регулярных круговых три-тканей с точностью до круговых преобразований* // *Фундамент. и прикл. матем.* – 2010. – С. 95–107.
3. Samarina O. V., Slavsky V. V. W. *Blaschke's theory application in digital image processing* // *Journal of Mathematical Sciences and Applications.* – 2013. – P. 17–23.

CIRCLE THREE-WEB FOR DIGITAL IMAGE AND ITS INVARIANTS

V.V. Slavsky, V.A. Samarin, O.V. Samarina

This paper describes the approach to digital RGB-image analysis and processing, based on circle three-web theory W. Blaschke. Three-web invariants of the widest "topological" group of transformations are defined and investigated.

Keywords: circle three-webs, invariants

УДК 514.126

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ В ГАЛИЛЕЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ж.А. Собиров¹, Т.Н. Сафаров²

¹ aartykbaev@mail.ru; Навоийский Государственный Педагогический Институт

² aartykbaev@mail.ru; Термезский Государственный Университет

В работе рассматривается аналог кратчайшей в Галилеевом пространстве, как кривой с наименьшей вариацией поворота. Также приводятся теоремы, характеризующие сумму углов треугольника в двумерном Галилеевом пространстве.

Ключевые слова: галилеево пространство, метрика, квадратичная форма, кратчайшая

Галилеево пространство R_3^1 – наиболее простое полуевклидово пространство с вырожденной проективной метрикой [1].

Вырожденность метрики порождает вырожденную первую квадратичную форму поверхности, которая не позволяет определять кратчайшую на поверхности. Поэтому мы рассматриваем кривые с ограниченной вариацией поворота на поверхности F пространства R_3^1 и изучаем их свойства.

Кривую, соединяющую две точки на поверхности с наименьшей вариацией поворота, называем кратчайшей на поверхности. Аналогично евклидовому пространству определяется геодезическая и многоугольник на поверхности.

В общем случае касательная плоскость к поверхности F в R_3^1 является плоскостью Галилея [2]. На Галилеевой плоскости сумма внутренних углов треугольника равна нулю (угол – параболический).

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Если поверхность $F \in C^2(D)$ в R_3^1 выпуклая, то сумма внутренних углов треугольника больше нуля.

Теорема 2. Если поверхность $F \in C^2(D)$ в R_3^1 седловая, то сумма внутренних углов треугольника меньше нуля.

Литература

[1] Artykbaev A. *Recovering convex surfaces from the extrinsic curvature in Galilean space*, Mat. Sb. (N.S.), 1982, Volume 119 161, Number 2 10, 204-224.

[2] Яглом И.М. *Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия*. М.: Наука, 1969. - 304.

INTERIOR GEOMETRY OF THE SURFACE IN THE GALILEAN SPACE

J.A. Sobirov, T.N. Safarov

In the thesis, an analogue of the shortest in the Galilean space is given, as a curve with the least variation of rotation, also theorems characterizing the sum of the angles of a triangle on the surface of the Galilean space.

Keywords: Galilean space, metric, fundamental form, shortest

УДК 514.753.2

О ДЕЙСТВИЯХ С СОХРАНЕНИЕМ ПУЧКА ПРЯМЫХ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО ГРУПП ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Е.Н. Сосов¹

¹ *evgenii.sosov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследуются три группы преобразований пространства Лобачевского, порожденные группой всех движений этого пространства и однопараметрическими группами преобразований, сохраняющими эллиптический пучок, гиперболический пучок, параболический пучок прямых соответственно. Установлено, что каждая из полученных таким образом групп преобразований действует на плоскости Лобачевского 3-транзитивно.

Ключевые слова: группа преобразований, пространство Лобачевского, 3-транзитивность

Пусть $\Lambda = B(O, 1)$ — открытый шар с центром в фиксированной точке O радиуса 1 евклидова пространства E . Точки пространства будем задавать их радиус-векторами относительно точки O . Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского [1, 2, 3]. В этой модели расстояние между точками $x, y \in \Lambda$ вычисляется по формуле [1]

$$\rho(x, y) = \text{Arch} \frac{1 - (x, y)}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}},$$

где (x, y) — скалярное произведение радиус-векторов точек $x, y \in \Lambda$ и x^2 — скалярный квадрат радиус-вектора точки x . Пусть $\lambda \in \mathbb{R}, p \in \Lambda$. В статье [1] (подробнее в [2]) было найдено отображение $\lambda_p : \Lambda \rightarrow \Lambda$,

$$\lambda_p(x) = \frac{p \operatorname{ch} A \operatorname{sh}((1 - \lambda)C) + x \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C)}{\operatorname{ch} A \operatorname{sh}((1 - \lambda)C) + \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C)},$$

где $A = \rho(0, p), B = \rho(0, x), C = \rho(p, x)$. Если λ пробегает множество всех ненулевых вещественных чисел, то формула определяет действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского. Пусть в пространстве Λ заданы прямая P и гиперплоскость Π с уравнениями

$$r = r_0 + ta, \quad (n, x) = q, \tag{1}$$

где r_0 — радиус-вектор фиксированной точки, t — параметр, a — направляющий вектор прямой P , n — единичный вектор евклидовой нормали гиперплоскости Π , $0 \leq q < 1$ — константа. Имеют место теоремы [3]

Теорема 1. Пусть в пространстве Λ фиксированы прямая P , гиперплоскость Π с уравнениями (1), а x_Q — обозначение для ортогональной проекции по Лобачевскому произвольной точки $x \in \Lambda$ на $Q \in \{P, \Pi\}$. Тогда отображения $\lambda_Q : \Lambda \rightarrow \Lambda, \lambda_Q(x) = \frac{x_Q \operatorname{ch} A_Q \operatorname{sh}((1 - \lambda)C_Q) + x \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C_Q)}{\operatorname{ch} A_Q \operatorname{sh}((1 - \lambda)C_Q) + \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C_Q)}$,

где $A_Q = \rho(0, x_Q), B = \rho(0, x), C_Q = \rho(x_Q, x)$, определяют при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на Λ .

Теорема 2. Пусть единичный вектор τ евклидова пространства является радиусом-вектором центра параболического пучка в пространстве $\Lambda, h \in \mathbb{R}$. Тогда отображение $h_\tau : \Lambda \rightarrow \Lambda$,

$$h_\tau(x) = \tau + \frac{2(\tau, \tau - x)}{(\tau - x)^2 + (1 - x^2)e^{-2h}}(x - \tau)$$

определяет действие аддитивной группы вещественных чисел на Λ такое, что $\rho(x, h_\tau(x)) = |h|$ для каждого $x \in \Lambda$.

Пусть n — единичный вектор евклидова пространства \mathbb{E} . Представим радиус-вектор произвольной точки x этого пространства в виде $x = x_1 n + x_2$, где вектор x_2 — ортогонален вектору n , и рассмотрим в полупространстве $\Pi_+ = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{E} : x_1 > 0\}$ модель Пуанкаре с метрикой [2]

$$\rho_{\Pi_+}((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = \operatorname{Arch} \frac{x_1^2 + y_1^2 + (x_2 - y_2)^2}{2x_1 y_1} = 2\operatorname{Arsh} \frac{|x - y|}{2\sqrt{x_1 y_1}}.$$

Доказана теорема [3]

Теорема 3. Имеют место следующие утверждения.

А. Отображение $\Phi : (\Lambda, \rho) \rightarrow (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}), \Phi((x_1; x_2)) = \frac{(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}; x_2)}{1 + x_1}$ -изометрия.

В. При $\tau = -n$ отображению $h_\tau : \Lambda \rightarrow \Lambda$ в модели Пуанкаре соответствует при изометрии Φ преобразование

$$H_\tau = \Phi \circ h_\tau \circ \Phi^{-1} : (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}) \rightarrow (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}), \quad H_\tau((x_1; x_2)) = ((e^{-h} x_1; x_2)),$$

которое определяет действие аддитивной группы вещественных чисел на Π_+ такое, что $\rho_{\Pi_+}(x, H_\tau(x)) = |h|$ для каждого $x \in \Pi_+$.

Определим группы преобразований G_1, G_2, G_3 в плоскости Лобачевского Λ . В модели Бельтрами–Клейна плоскости Λ для получения: а) группы G_1 к движениям добавляем преобразования λ_0 для любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0, p \in \Lambda$; б) группы G_2 к движениям добавляем преобразования λ_Π для любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0, \Pi \subset \Lambda$. В модели Пуанкаре плоскости Π_+ для получения группы G_3 к движениям добавляем преобразования H_τ для любых $h \in \mathbb{R}$. Доказана теорема [4]

Теорема 4. *Группа преобразований G_i действует на плоскости Лобачевского 3-транзитивно для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Для полученных групп преобразований и их обобщений могут быть найдены применения в специальной теории относительности, фрактальной геометрии и при исследованиях квазикомформных отображений пространства Лобачевского.

Литература

1. Сосов Е. Н. О действии мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского // Уч. записки Казан. ун-та. – 2012. – Т. 154. – № 4. – С. 156–160.
2. Сосов Е. Н. Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности: учебно-методическое пособие. – Казань: Казан. ун-т, –2016.
3. Sosov E. N. On the Real Group Actions Preserving a Pencil of Straight Lines on the Lobachevskii space // Russian Mathematics. – 2019. – V. 63. – № 3. – P. 25–30.
4. Nigmatullina L. I. On 3-Transitive Transformation Groups of the Lobachevsky Plane / L. I. Nigmatullina, E. N. Sosov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39. – № 9. – P. 1221–1224.

ON THE REAL GROUP ACTIONS PRESERVING A PENCIL OF STRAIGHT LINES ON THE LOBACHEVSKII SPACE

E.N. Sosov

We consider the Lobachevskii space. In terms of the Beltrami–Klein model we obtain explicit expressions for the real group actions preserving hyperbolic or parabolic pencil of straight lines on the Lobachevskii space.

Keywords: transformation group, Lobachevskii space, 3-transitivity

УДК 514.75+517.95

ПРОЕКТИВНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ 3-ТКАНЕЙ

И.С. Стрельцова¹

¹ strelzova_is@mail.ru; Астраханский государственный университет

В данной работе приводится описание поля рациональных проективных дифференциальных инвариантов плоских прямолинейных 3-тканей. Доказывается, что дифференциальные инварианты любого порядка могут быть получены из дифференциальных инвариантов второго порядка при помощи инвариантных дифференцирований.

Ключевые слова: проективные дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования

В данной работе мы изучаем проективные дифференциальные инварианты плоских прямолинейных тканей. n -тканью на плоскости $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ [1] называется набор из n слоений с условием, что слои каждой пары слоений трансверсальны друг другу. Ткань называется прямолинейной, если слои всех слоений являются прямыми. Такие ткани могут быть заданы n различными решениями уравнения Эйлера [3],[4]:

$$w_y = w w_x. \quad (1)$$

Мы будем рассматривать действие группы проективных преобразований плоскости $SL_3(\mathbb{R})$ на множестве всех прямолинейных тканей. Это действие, в силу (1), переносится на пространство решений уравнения Эйлера. Представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$, отвечающее проективному действию группы Ли $SL_3(\mathbb{R})$, задается векторными полями X_A на плоскости, которые имеют вид:

$$X_A = (a_{13} + (a_{11} - a_{33})x + a_{12}y - a_{32}xy - a_{33}x^2)\partial_x + \\ + (a_{23} + a_{21}x + (a_{22} - a_{33})y - a_{31}xy - a_{32}y^2)\partial_y,$$

где матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,2,3} \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$.

Описание $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ -действия на пространстве решений уравнения Эйлера дает следующее предложение [2]:

Предложение 1. *Векторные поля*

$$\bar{X}_A = X_A + \lambda_A(w)\partial_w,$$

где

$$\lambda_A(w) = (a_{21} - a_{31}y)w^2 + (a_{11} - a_{22} - a_{31}x + a_{32}y)w + a_{32}x - a_{12},$$

задают представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ на тотальном пространстве расслоения

$$\pi' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi'(x, y, w) \mapsto (x, y).$$

Векторные поля \bar{X}_A являются точечными симметриями уравнения Эйлера.

Плоские прямолинейные 3-ткани задаются тремя различными решениями u , v , w уравнения Эйлера, и $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ -действие на них, в силу предыдущего предложения, имеет следующий вид:

Предложение 2. *Векторные поля*

$$\bar{X}_A = X_A + \lambda_A(u)\partial_u + \lambda_A(v)\partial_v + \lambda_A(w)\partial_w$$

задают представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ на тотальном пространстве расслоения

$$\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, u, v, w) \mapsto (x, y).$$

Эти векторные поля являются точечными симметриями системы трех уравнений Эйлера

$$u_y = u u_x, \quad v_y = v v_x, \quad w_y = w w_x \quad (2)$$

Система уравнений (2) определяет подмногообразие

$$E_1 \subset J^1(\pi), \quad E_1 = \{uu_x - u_y = 0, vv_x - v_y = 0, ww_x - w_y = 0\}$$

в многообразии $J^1(\pi)$ 1-джетов сечений расслоения.

Пусть $E_k \subset J^k(\pi)$ – его k -е продолжение.

Подмногообразия E_k являются неприводимыми алгебраическими многообразиями. Рациональные функции на E_k , инвариантные относительно продолженного $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ -действия, мы будем называть проективными рациональными дифференциальными инвариантами порядка $\leq k$ прямолинейных 3-тканей [5].

Пусть F_k – поле рациональных дифференциальных инвариантов порядка $\leq k$, а

$$F = \varprojlim F_k$$

– поле всех рациональных проективных дифференциальных инвариантов.

Легко видеть, что поле F_1 содержит только константы.

Решая систему дифференциальных уравнений

$$\overline{X}_A^{(2)}(I) = 0,$$

и используя теорему Розенлихта [6],[7], мы получаем следующий результат:

Теорема 1. Поле F_2 проективных дифференциальных инвариантов порядка ≤ 2 порождено инвариантами второго порядка

$$I_{21} = \frac{v_{xx}}{w_{xx}}, \quad I_{22} = -\frac{(-v+w)u_x + (u-w)v_x - w_x(u-v)}{\sqrt{w_{xx}(v-w)(u-w)(u-v)}}, \quad I_{23} = \frac{u_{xx}}{w_{xx}}.$$

Это поле разделяет регулярные $SL_3(\mathbb{R})$ -орбиты в E_2 .

Для описания поля всех проективных дифференциальных инвариантов плоских прямолинейных 3-тканей мы воспользуемся теоремой Ли-Трессе [4].

Инвариантные дифференцирования, существование которых утверждается в этой теореме, можно найти из геометрических соображений.

Окончательно, используя теорему Ли-Трессе [4], мы получаем следующее описание поля проективных инвариантов:

Теорема 2. Поле рациональных проективных дифференциальных инвариантов порождено базисными инвариантами I_{21} , I_{22} , I_{23} и инвариантными дифференцированиями

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= -\frac{(-v+w)u}{uv_x - uw_x - u_xv + u_xw + vw_x - v_xw} \frac{d}{dx} \\ &\quad + \frac{-v+w}{uv_x - uw_x - u_xv + u_xw + vw_x - v_xw} \frac{d}{dy}, \\ \nabla_2 &= -\frac{(w-u)v}{uv_x - uw_x - u_xv + u_xw + vw_x - v_xw} \frac{d}{dx} \\ &\quad + \frac{w-u}{uv_x - uw_x - u_xv + u_xw + vw_x - v_xw} \frac{d}{dy}. \end{aligned}$$

Это поле разделяет регулярные орбиты.

Литература

1. Бляшке В. *Введение в геометрию тканей*. – М.: Физматгиз, 1959. – 144 с.
2. Стрельцова И. С. *Проективные инварианты плоских 2-тканей* // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 6. – С. 92–97.
3. Goldberg V. V., Lychagin V. V. *Geodesic webs on a two-dimensional manifold and Euler equations* // Acta Applicandae Mathematicae. – 04/2012; 109(1):5-17. – DOI 10.1007/s10440-009-9437-1.
4. Kruglikov B. S., Lychagin V. V. *Global Lie-Tresse theorem* // Selecta Mathematica. – 02/2016. – DOI 10.1007/s00029-015-0220-z.
5. Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. *Contact geometry and nonlinear differential equations*. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. – xxii+496 P.
6. Rosenlicht M. *Some basic theorems on algebraic groups* // Am. J. Math. – 78. –401-403(1956).
7. Rosenlicht M. *A remark on quotient spaces* // An. Acad. Brasil. Ci. – 35. –487-489(1963).

PROJECTIVE INVARIANTS FOR LINEAR 3-WEBS

I.S. Streltsova

In this paper we describe the structure of the field of projective differential rational invariants for linear planar 3-webs. We show that this field is generated by basic differential invariants of the second order and invariant derivatives.

Keywords: projective differential invariants, invariant derivatives

УДК 514.765

О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С ПРАВИЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ И РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ

В.И. Субботин¹

¹ *geometry@mail.ru*; Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)

В статье представлен результат полного перечисления класса RR -многогранников — замкнутых выпуклых многогранников в E^3 , у которых существуют симметричные ромбические вершины и существуют правильные грани одного типа. Одним из многогранников этого класса является удлинённый ромбический додекаэдр, имеющий приложения в кристаллографии.

Ключевые слова: симметричные ромбические вершины, RR -многогранник, звезда ромбической вершины

В работе рассматриваются замкнутые выпуклые многогранники в E^3 , у которых существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причём все грани, не входящие в звезду ромбической вершины, являются правильными многоугольниками одного типа. Для краткости такие многогранники называются RR -многогранниками (от слов *rombic* и *regular*) [1], [2].

Если гранная звезда $Star(V)$ вершины V состоит из n равных и одинаково расположенных ромбов, имеющих общей вершиной V , то V называется ромбической.

Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами.

Теорема. Следующие многогранники исчерпывают класс всех RR -многогранников:

1) шесть многогранников с двумя n -ромбическими вершинами, $6 \leq n < 12$, и правильными треугольными гранями;

2) 24-гранник с двумя 4-ромбическими вершинами и правильными треугольными гранями;

3) 20-гранник с двумя 5-ромбическими вершинами и квадратными гранями;

4) Удлиненный ромбический додекаэдр;

5) 12-гранник с двумя неизолрованными 4-ромбическими вершинами и четырьмя квадратами;

6) семь многогранников с двумя неизолрованными n -ромбическими вершинами, $4 < n < 12$, и треугольными гранями;

четыре многогранника с одной ромбической вершиной:

7) 7-гранник с треугольными гранями и 3-ромбической вершиной;

8) 12-гранник с треугольными гранями и 4-ромбической вершиной;

9) 15-гранник с треугольными гранями и 5-ромбической вершиной;

10) 13-гранник с треугольными гранями и тупоугольной 3-ромбической вершиной.

Литература

1. Субботин В. И. О многогранниках с симметричными ромбическими вершинами и правильными гранями // Материалы Международной конференции, посвящ. 100-летию со дня рождения В.Т.Базылева. – М.: Изд-во МПГУ. 2019. – С. 139–140.

2. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2018. – Т. 476.. – С. 153–164.

ON POLYHEDRA WITH SYMMETRIC RHOMBIC VERTICES AND REGULAR FACES

V.I. Subbotin

The article presents the result of a complete enumeration of the class of RR -polyhedrons — closed convex polyhedra in E^3 , which have symmetric rhombic vertices and regular faces of the same type. One of the polyhedra of this class is an elongated rhombic dodecahedron, which has applications in crystallography.

Keywords: symmetric rhombic vertices, RR polyhedron, star of rhombic vertex

УДК 514.76

**О МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ АЛГЕБР ЛИ АФФИННЫХ ВЕКТОРНЫХ
ПОЛЕЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ ГОЛОМОРФНЫХ ЛИНЕЙНЫХ
СВЯЗНОСТЕЙ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА**

А.Я. Султанов¹¹ sultanovaya@rambler.ru; Пензенский государственный университет

В работе доказано, что максимальная размерность алгебр Ли на касательных расслоениях $T^{m-1}(M)$ ($m \geq 2$) гладкого многообразия M ($\dim M \geq 2$), снабженных синектическими связностями А.П. Широкова, равна точно $(mn - 1)^2 + 4$, где n – размерность многообразия M .

Ключевые слова: касательное расслоение, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли, синектическая связность

Приведем необходимые для дальнейшего исследования основные понятия и результаты.

Касательное расслоение порядка $m - 1$ ($m \geq 2$) представляет собой расслоение А. Вейля над гладким класса C^∞ многообразием M , возникающим при помощи алгебры $\mathbb{A} = \mathbb{R}(\varepsilon^{m-1})$ плюральными числами размерности m . Будем считать, что в алгебре \mathbb{A} выбран естественный базис, состоящий из элементов $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon^s = \varepsilon \cdot \varepsilon^{s-1}$ ($s = 1, \dots, m - 1$), где ε – элемент, порождающий максимальный нильпотентный идеал \mathbb{I} алгебры \mathbb{A} . Из определения базисных элементов следует, что они перемножаются по следующему правилу: $\varepsilon^\alpha \cdot \varepsilon^\beta = \varepsilon^{\alpha+\beta}$. Обозначим через \mathbb{A}^* векторное пространство линейных форм над полем действительных чисел \mathbb{R} , заданных на \mathbb{A} и принимающих значения в \mathbb{R} .

Пусть $C^\infty(M)$ – вещественная алгебра гладких класса C^∞ функций, заданных на M и принимающих значения в \mathbb{R} . Обозначим через $M_q^\mathbb{A}$ множество всевозможных гомоморфизмов $j_q : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{A}$, где $q \in M$, удовлетворяющих условию $j_q(f) \equiv f(q) \pmod{\mathbb{I}}$. Множество $M^\mathbb{A} = \bigcup_{q \in M} (M)_q^\mathbb{A}$ можно естественным образом наделять структурой гладкого многообразия над алгеброй \mathbb{A} и гладкой структурой над \mathbb{R} [1]. отображение $\pi : M^\mathbb{A} \rightarrow M$, определенное условием $\pi(j_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка $(M^\mathbb{A}, \pi, M)$ – расслоением А. Вейля, в нашем случае – касательным расслоением порядка $m - 1$. Функция $f^\mathbb{A}$, определенная условием $f^\mathbb{A}(j_q) = j_q(f)$ для каждого гомоморфизма j_q , называется естественным продолжением функции f , а функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ – вертикальным лифтом функции $f \in C^\infty(M)$ с M на $M^\mathbb{A}$.

Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*, f \in C^\infty(M)$. Зададим функцию $f_{(a^*)} : M^\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ равенством $f_{(a^*)} = a^* \circ f^\mathbb{A}$. При помощи этих функций можно определить лифты векторных полей с M в $M^\mathbb{A}$. Пусть $a \in \mathbb{A}$ произвольный фиксированный элемент алгебры \mathbb{A} , X – произвольное гладкое векторное поле на M . На расслоении $M^\mathbb{A}$ существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}$$

для любой функции $f \in C^\infty(M)$. В этом равенстве $b^* \cdot a \in \mathbb{A}^*$ определяется по правилу $b^* \cdot a(b) = b^*(ab)$. Для векторного поля X можно построить его естественное продолжение $X^\mathbb{A}$ на $M^\mathbb{A}$. Оно задается условием $X^\mathbb{A} f^\mathbb{A} = (Xf)^\mathbb{A}$ для любой функции $f \in C^\infty(M)$. Векторное поле \tilde{X} на \mathbb{A} называется голоморфным тогда и только тогда, когда $\tilde{X} = \varepsilon^\alpha X_\alpha^\mathbb{A}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, m-1$). Линейная связность $\tilde{\nabla}$, заданная на $M^\mathbb{A}$, называется голоморфной, если векторное поле $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ является голоморфным для любых голоморфных векторных полей \tilde{X} и \tilde{Y} , заданных на $M^\mathbb{A}$. А.П. Широковым доказано, что любая голоморфная связность $\tilde{\nabla}$ на касательном расслоении \mathbb{A} может быть представлена в виде $\tilde{\nabla} = \nabla^\mathbb{A} + \varepsilon \Gamma_1^\mathbb{A} + \dots + \varepsilon^{m-1} \Gamma_{m-1}^\mathbb{A}$, где $\nabla = \Gamma_0$ – линейная связность, а Γ_λ ($\lambda \neq 0$) – тензорные поля типа (1,2) на M [1]. Вещественную реализацию ∇^{Sh} голоморфной связности $\tilde{\nabla}$ будем называть синектической связностью А.П. Широкова.

Имеет место тождество:

$$\nabla_{X(a)}^{Sh} Y^{(b)} = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{(\varepsilon^\alpha ab)}.$$

Известно, что линейная связность ∇^{Sh} без кручения, заданная на $M^\mathbb{A}$ при условии $dim \mathbb{A} \geq 2$ и $dim M \geq 2$ с отличным от нуля тензорным полем кривизны R^{Sh} имеет отличное от нуля тензорное поле Γ Вейля проективной кривизны W^{Sh} [3]. На основании теоремы И.П. Егорова о максимальной размерности алгебры Ли аффинных векторных полей, заключаем, что размерность алгебры Ли аффинных векторных полей связности ∇^{Sh} не больше, чем $(mn)^2 - 2mn + 5 = (mn-1)^2 + 4$ [1]. Покажем точность этой оценки. Для этого рассмотрим касательное расслоение $\mathbb{R}_n^\mathbb{A}$ ($n \geq 2$), снабженное связностью А.П. Широкова $\nabla^{Sh} \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = \varepsilon_\sigma (\varepsilon^\nu \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\mu) (\Gamma_{\nu jk}^i)_{(\mu)}$, причем $\Gamma_{\nu jk}^i = 0$ для всех $\nu = 0, 1, \dots, m-2$, а $\Gamma_{(m-1)23}^1 = \Gamma_{(m-1)32}^1 = x^2$, $\Gamma_{(m-1)j_1 k_1}^{i_1} = 0$ для всех упорядоченных наборов $(i_1, j_1, k_1) \neq (1, 2, 3)$ или $(i_1, j_1, k_1) \neq (1, 3, 2)$. Тогда, $\Gamma_{23(m-1)}^{001} = x_0^2$, $\Gamma_{32(m-1)}^{001} = x_0^2$, а остальные коэффициенты $\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0$. Вычислив компоненты тензорного поля кривизны $R_{jkl\sigma}^{\alpha\beta\gamma i}$ получим, что $R_{223(m-1)}^{0001} = 1$, $R_{232(m-1)}^{0001} = -1$, все другие компоненты тензорного поля R^{Sh} равны 0. Так как $R^{Sh} \neq 0$, то $W^{Sh} \neq 0$. Во множестве мультииндексов (i_α) , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ введем отношение линейного порядка следующими условиями:

(а) если $i < j$, то $(i_\alpha) < (j_\beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \{0, 1, \dots, m-1\}$;

(б) если $i = j$, то $(i_\alpha) < (i_\beta)$ для всех α, β , удовлетворяющих условию $\alpha < \beta$.

Тогда рассматриваемый случай будет представлять пример, приведенный И.П. Егоровым для доказательства точности $d^2 - 2d + 5$ алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства \mathbb{R}^d с линейной связностью ∇ с компонентами $\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = x^2$, другие $\Gamma_{jk}^i = 0$ [1].

Таким образом, доказана

Теорема. Максимальная размерность алгебры Ли аффинных векторных полей касательных расслоений порядка $m-1$ гладкого многообразия, снабженного синектической связностью А.П. Широкова, равна точно $(m-1)^2 + 4$.

Литература

1. Вишневский В. В. *Пространства над алгебрами* / В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Шурыгин. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1984. – 264 с.
2. Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности*. — Казань: Изд-во Казанского гос.унив-та, 1965.
3. Султанов А. Я. *О вещественной реализации голоморфной линейной связности над алгеброй* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский тематический сборник трудов. – Калининград, 2007. – Вып. 38. – С. 136-139.

ON THE MAXIMAL DIMENSION OF LIE ALGEBRAS OF AFFINE VECTOR FIELDS OF REAL REALIZATIONS OF HOLOMORPHIC LINEAR CONNECTIONS ON TANGENT BUNDLES OF ARBITRARY ORDER

A.Ya. Sultanov

In this paper, it is proved that the maximal dimension of Lie algebras on the tangent bundles $T^{m-1}(M)$ ($m \geq 2$) of a smooth variety M ($\dim M \geq 2$) equipped with the synectic connections of A.P. Shirokov, is exactly equal to $(mn - 1)^2 + 4$, where n is the dimension of M .

Keywords: tangent bundle, infinitesimal affine transformation, algebra of Lie, synectic connection

УДК 514.126

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ В ГАЛИЛЕЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Б.М. Султанов¹

¹ bek_4747@bk.ru; Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

В работе рассматриваются параболические точки поверхности Галилея пространства. Параболические точки поверхности делятся на два различных типа.

Ключевые слова: галилеево пространство, поверхность, линейное преобразование, индикатриса, параболическая точка

Классификация точек поверхности Галилея пространства рассмотрено в работе А. Артикбаева [1]. В статье А.Артикбаева в отличие от евклидова пространства, точки поверхности Галилея пространства разделены на четыре класса, т.е. эллиптические, гиперболические, параболические и циклические.

При этом точки гиперболического типа поверхности разделены на два класса, названные гиперболическими и циклическими точками [1].

Известно, что поверхности евклидова пространства, все точки которых являются эллиптическими, составляют класс выпуклых поверхностей. Также известно, что поверхности, все точки которых являются гиперболические, называются седловыми поверхностями. Конические и цилиндрические поверхности это поверхности, которые состоят из параболических точек. Но в Галилеевом пространстве седловые поверхности делятся на два класса. При этом поверхности, точки которых состоят из циклических точек, называются циклическими поверхностями. В данной

работе мы рассмотрим геометрию поверхности Галилеева пространства, все точки которой являются параболическими.

Пусть в аффинном пространстве A_3 даны два вектора $\vec{X}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{Y}(x_2, y_2, z_2)$.

Определение 1. Пространство Галилея – аффинное пространство A_3 , в котором скалярное произведение векторов $\vec{X}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{Y}(x_2, y_2, z_2)$ определено следующим образом:

$$\begin{cases} (X, Y)_1 = x_1 x_2, \\ (X, Y)_2 = y_1 y_2 + z_1 z_2, \text{ при } (X, Y)_1 = 0 \end{cases}$$

Норма вектора определяется как квадратный корень из скалярного произведения вектора на себя, то есть

$$\|\vec{X}\| = \begin{cases} |x_1|, \text{ при } x_1 \neq 0, \\ \sqrt{y_1^2 + z_1^2}, \text{ при } x_1 = 0 \end{cases}$$

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равно норме вектора \overrightarrow{AB}

$$|AB| = \begin{cases} |x_2 - x_1|, \text{ при } x_1 \neq x_2, \\ \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ при } x_1 = x_2 \end{cases}$$

Мы используем классификацию точек поверхности, приведённую в работах [1,2], в которых индикатриса кривизны определена формулой

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = \pm 1,$$

причем

$$a_{11} = L - \frac{M^2}{N}, \quad a_{22} = N$$

являются главными кривизнами поверхности, а L, M, N - коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Параболическими называются точки поверхности, в которых $K = a_{11} \cdot a_{22} = 0$, то есть хотя бы одна из главных кривизн равна нулю.

Касательная плоскость к поверхности Γ_3 будет плоскостью Галилея. Вращение Галилеевой системы координат задается уравнением

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = hx + y \end{cases} \quad -\infty < h < +\infty. \quad (1)$$

При вращении (1) направление оси Oy не меняется, следовательно, нельзя перевести ось Ox в ось Oy .

Это особенность вращения плоскости Галилея требует изучения свойств параболической точки поверхности в которой либо $a_{11} = 0$, либо $a_{22} = 0$ по отдельности.

Поэтому, при $a_{11} = 0$ точка поверхности, как и в евклидовом случае, называется «параболической точкой» поверхности.

В случае $a_{22} = 0$, точка поверхности называется «особой параболической точкой» поверхности и изучается отдельно.

Литература

1. Артыкбаев А. *Классификация точек поверхности в Галилеевом пространстве*//Исследование по теории поверхностей в многообразиях знакопостоянной кривизны. Л., 1987. С.П-15.
2. Артыкбаев А., Соколов Д.Д. *Геометрия в целом в плоском пространстве – времени*, Т.: Фан, 1991. -180 стр.

RESEARCH OF PARABOLIC POINTS OF THE SURFACE IN GALILEAN SPACE

B.M. Sultanov

The thesis considers parabolic points of the surface of the Galilean space. Parabolic points of the surface are divided into two different types.

Keywords: Galilean space, surface, linear transformation, indicatrix, parabolic point

УДК 514.76

ОБ УСЛОВИЯХ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ С НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА

Г.А. Султанова¹

¹ *sultgaliya@yandex.ru*; Филиал военной академии материально-технического обеспечения (г. Пенза)

В работе исследуются условия интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта над пространствами общей несимметрической связности.

Ключевые слова: касательное расслоение, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли, общая несимметрическая связность

Пусть M – связное гладкое многообразие класса C^∞ размерности $n(n \geq 2)$, $C^\infty(M)$ – алгебра вещественнозначных функций класса C^∞ на M , ∇ – линейная связность, заданная на M . Для линейной связности ∇ построим еще одну линейную связность $\hat{\nabla}$, задаваемую условием

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ [2]. Линейные связности ∇ и $\hat{\nabla}$ связаны тождеством

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - T(X, Y),$$

где $T(X, Y)$ – тензорное поле T кручения связности ∇ . Тензорные поля кручения T и \hat{T} связностей ∇ и $\hat{\nabla}$ удовлетворяют соотношению $\hat{T} + T = 0$. С помощью этих линейных связностей определим отображение $\overset{0}{\nabla} : \mathfrak{S}_0^1(M) \otimes \mathfrak{S}_0^1(M) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M)$ условием

$$\overset{0}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_{\hat{X}} Y).$$

Отображение $\overset{0}{\nabla}$ является линейной связностью на M , причем, тензорное поле $\overset{0}{T}$ кручения ее равно нулю. Следуя И.П. Егорову [1], линейную связность ∇ с ненулевым тензорным полем кручения T будем называть общей несимметрической связностью, а линейную связность $\overset{0}{\nabla}$ — сопутствующей связностью без кручения для связности ∇ .

Рассмотрим касательное расслоение TM многообразия M . Атлас естественной гладкой структуры на TM состоит из карт $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$, где $\pi : TM \rightarrow M$ — каноническая проекция. Приведем определения лифтов некоторых объектов с базы в касательное расслоение. Все рассматриваемые объекты будем предполагать гладкими класса C^∞ . Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом, а функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ — полным лифтом функции f с многообразия M в его касательное расслоение TM .

Если на многообразии M задано векторное поле $X \in \mathfrak{X}_0^1(M)$, то на касательном расслоении TM существуют векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$, в локальных координатах имеющие вид $X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1$, $X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1$ [5].

Определение. [3] Полным лифтом линейной связности ∇ на M называется единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$ на TM , удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned}\nabla_{X^{(0)}}^{(0)} Y^{(0)} &= (\nabla_X Y)^{(0)}, \\ \nabla_{X^{(0)}}^{(0)} Y^{(1)} &= \nabla_{X^{(1)}}^{(0)} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)}, \\ \nabla_{X^{(1)}}^{(0)} Y^{(1)} &= 0,\end{aligned}$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M)$. В локальной системе координат (x_0^i, x_1^i) компоненты полного лифта линейной связности $\nabla^{(0)}$ имеют вид:

$$\Gamma_{ij0}^{00k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}, \Gamma_{ij1}^{00k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(1)}, \Gamma_{ij1}^{10k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}, \Gamma_{ij1}^{01k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)},$$

все остальные коэффициенты связности $\nabla^{(0)}$ равны нулю.

Составляющие тензорных полей кручения $T^{(0)}$ и кривизны $\overset{0}{R}^{(0)}$ связности $\nabla^{(0)}$ относительно естественного подвижного репера $(\partial_i^\alpha) (\alpha = 0, 1)$ задаются следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned}T_{ij0}^{00k} &= (T_{ij}^k)_{(0)}, T_{ij1}^{10k} = (T_{ij}^k)_{(0)}, T_{ij1}^{01k} = (T_{ij}^k)_{(0)}, T_{ij1}^{00k} = (T_{ij}^k)_{(1)}, \\ \overset{0}{R}_{ljk0}^{000i} &= (\overset{0}{R}_{ljk}^i)_{(0)}, \overset{0}{R}_{ljk1}^{000i} = (\overset{0}{R}_{ljk}^i)_{(1)}, \overset{0}{R}_{ljk1}^{100i} = (\overset{0}{R}_{ljk}^i)_{(0)}, \\ \overset{0}{R}_{ljk1}^{010i} &= (\overset{0}{R}_{ljk}^i)_{(0)}, \overset{0}{R}_{ljk1}^{001i} = (\overset{0}{R}_{ljk}^i)_{(0)},\end{aligned}$$

остальные компоненты равны нулю.

Определение. [1] Векторное поле X называется инфинитезимальным аффинным преобразованием связности ∇ , если

$$L_X \nabla = 0,$$

где $L_X \nabla$ – производная Ли, задаваемая тождеством

$$L_X \nabla(Y, Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Исходя из определения линейных связностей $\hat{\nabla}, \overset{0}{\nabla}$ можно показать, что уравнение $L_X \nabla = 0$ равносильно системе уравнений

$$L_X \overset{0}{\nabla} = 0, L_X T = 0, \quad (1)$$

где T – тензорное поле кручения связности ∇ .

Условиями интегрируемости системы (1) будут следующие соотношения:

$$L_X \nabla^k T = 0, L_X \overset{0}{\nabla}{}^k \overset{0}{R} = 0, \quad (2)$$

где $\nabla^k T, \overset{0}{\nabla}{}^k \overset{0}{R}$ – ковариантные дифференциалы тензорных полей кручения T связности ∇ и кривизны $\overset{0}{R}$ связности $\overset{0}{\nabla}$.

Рассмотрим уравнение $L_{\tilde{X}} \nabla^{(0)} = 0$, в координатной форме равносильное системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta X_\sigma^i + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} \partial_j^\alpha X_\tau^m + \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i} \partial_k^\beta X_\tau^m - \Gamma_{jkt}^{\alpha\beta m} \partial_m^\tau X_\sigma^i + X_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0, \quad (3)$$

где X_α^i – координаты векторного поля $\tilde{X} = X_\alpha^i \partial_i^\alpha$.

Систему (3) можно переписать в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, введя новые неизвестные, полагая

$$A_{k\sigma}^{\alpha i} = \partial_k^\alpha X_\sigma^i. \quad (4)$$

Условия интегрируемости системы (3), (4) будут иметь вид:

$$L_{\tilde{X}} \nabla^k T^{(0)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots), L_{\tilde{X}} \overset{0}{\nabla}{}^k \overset{0}{R}^{(0)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

При $k = 0$ считаем, по определению, $\nabla^0 T^{(0)} = T^{(0)}, \overset{0}{\nabla}{}^k \overset{0}{R}^{(0)} = \overset{0}{R}^{(0)}$. Этому случаю соответствует первая серия условий интегрируемости $L_{\tilde{X}} T^{(0)} = 0, L_{\tilde{X}} \overset{0}{R}^{(0)} = 0$ уравнения $L_{\tilde{X}} \nabla^{(0)} = 0$. В данной работе мы ограничимся исследованием условия $L_{\tilde{X}} T^{(0)} = 0$. В локальных координатах это равенство равносильно системе

$$T_{mk\sigma}^{\tau\beta i} A_{j\tau}^{\alpha m} + T_{jm\sigma}^{\alpha\tau i} A_{k\tau}^{\beta m} - T_{jkt}^{\alpha\beta m} A_{m\sigma}^{\tau i} + X_\tau^m \partial_m^\tau T_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \quad (5)$$

Систему (5) представим в развернутой форме, придавая индексам α, β, σ значения 0, 1. Всего упорядоченных двоичных наборов (α, β, σ) будет 8. Мы здесь перечислим лишь те уравнения относительно X_τ^m и $A_{l\tau}^{\mu m}$, которые остаются после исключения

следствий системы уравнений (5).

$$\begin{aligned}
 & (T_{mk}^i)_{(0)} A_{j0}^{0m} + (T_{jm}^i)_{(1)} A_{k0}^{1m} + (T_{jm}^i)_{(0)} A_{k1}^{1m} - (T_{jk}^m)_{(0)} A_{m1}^{1i} + X_0^m \partial_m^0 (T_{jk}^i)_{(0)} = 0, \\
 & (T_{mk}^i)_{(1)} A_{j0}^{1m} + (T_{mk}^i)_{(0)} A_{j1}^{1m} + (T_{jm}^i)_{(0)} A_{k0}^{0m} - \\
 & \quad - (T_{jk}^m)_{(0)} A_{m1}^{1i} + X_0^m \partial_m^0 (T_{jk}^i)_{(0)} = 0, \\
 & (T_{mk}^i)_{(0)} A_{j0}^{0m} + (T_{jm}^i)_{(0)} A_{k0}^{0m} - (T_{jk}^m)_{(0)} A_{m0}^{0i} - \\
 & \quad - (T_{jk}^m)_{(1)} A_{m0}^{1i} + X_0^m \partial_m^0 (T_{jk}^i)_{(0)} = 0, \\
 & (T_{mk}^i)_{(1)} A_{j0}^{0m} + (T_{jm}^i)_{(1)} A_{k0}^{0m} + (T_{mk}^i)_{(0)} A_{j1}^{0m} + \\
 & \quad + (T_{jm}^i)_{(0)} A_{k1}^{0m} - (T_{jk}^m)_{(0)} A_{m1}^{0i} - (T_{jk}^m)_{(1)} A_{m1}^{1i} + \\
 & \quad + X_0^m \partial_m^0 (T_{jk}^i)_{(1)} + X_1^m \partial_m^1 (T_{jk}^i)_{(1)} = 0, \\
 & (T_{jk}^m)_{(0)} A_{m0}^{1i} = 0, \quad (T_{mk}^i)_{(0)} A_{j0}^{1m} = 0, \quad (T_{jm}^i)_{(0)} A_{k0}^{1m} = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Полученную систему мы будем исследовать, учитывая структуру инфинитезимального аффинного преобразования \tilde{X} .

Х. Шадыевым [4] доказано, что векторное поле \tilde{X} в пространстве $(TM, \overset{0}{\nabla})$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) существуют векторные поля X, Y , тензорные поля G, F типа (1,1) на M такие, что

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + G^{V\gamma} + F^{H\gamma}, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 G^{V\gamma} &= (G_i^j)_{(0)} x_1^i \partial_j^1, \\
 F^{H\gamma} &= (F_m^r)_{(0)} x_1^m (\partial_r^0 - (\Gamma_{rj}^k)_{(0)} x_1^j \partial_k^1).
 \end{aligned}$$

(2) имеют место равенства

$$L_X \overset{0}{\nabla} = 0; L_Y \overset{0}{\nabla} = 0; \overset{0}{\nabla} G = 0; \overset{0}{\nabla} F = 0; R_{mkl}^i F_j^m = F_m^i R_{jkl}^m = 0; R_{mkl}^i G_j^m - G_m^i R_{jkl}^m = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим первую серию условий интегрируемости (6) системы (3) с учетом разложения (7). Подставив (7) в (6), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & (T_{mk}^i)_{(0)} (\partial_j X^m)_{(0)} + (T_{jm}^i)_{(0)} (\partial_k X^m)_{(0)} - \\
 & \quad - (T_{jk}^m)_{(0)} (\partial_m X^i)_{(0)} + (X^m)_{(0)} (\partial_m \overset{0}{R}_{jk}^i)_{(0)} = 0, \\
 & (T_{mk}^i)_{(0)} (\partial_j Y^m)_{(0)} + (T_{jm}^i)_{(0)} (\partial_k Y^m)_{(0)} - \\
 & \quad - (T_{jk}^m)_{(0)} (\partial_m Y^i)_{(0)} + (Y^m)_{(0)} (\partial_m \overset{0}{R}_{jk}^i)_{(0)} = 0, \\
 & T_{mk}^i F_j^m = T_{jm}^i F_k^m = T_{jk}^m F_m^i = 0; \\
 & T_{mk}^i G_j^m - T_{jk}^m G_m^i = 0; \\
 & T_{jm}^i G_k^m - T_{jk}^m G_m^i = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Равенства (9) можно представить в виде соотношений:

$$L_X T = 0, \quad L_Y T = 0, \tag{10}$$

$$T_{jk}^m F_m^i = T_{mk}^i F_j^m = T_{jm}^i F_k^m = 0, \quad (11)$$

$$T_{mk}^i G_j^m = T_{jm}^i G_k^m = T_{jk}^m G_m^i. \quad (12)$$

Таким образом, получена система условий интегрируемости уравнений инфинитезимальных преобразований в касательном расслоении полного лифта общей несимметрической линейной связности.

Литература

1. Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности*. — Казань: Изд-во Казанского гос.унив-та, 1965.
2. Егоров И. П. *Геометрия*. — М.: Просвещение, 1979.
3. Султанов А. Я. *Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля* // Изв. вузов. Матем. — 1999. — №9. — С. 64-72.
4. Шадыев Х. *Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении* // Тр.геом.сем. — 1984. — Т. 16. — С. 117-127.
5. Yano K. *Tangent and cotangent bundles. Differential Geometry*. — New York, Marcel Dekker, 1973.

ON THE CONDITIONS OF INTEGRABILITY OF THE EQUATIONS OF INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS OF TANGENT BUNDLES WITH ASYMMETRIC CONNECTION OF A COMPLETE LIFT

G.A. Sultanova

In this article we study the integrability conditions for the equations of infinitesimal affine transformations of tangent bundles with a complete lift connection over spaces of a common asymmetric connection.

Keywords: tangent bundle, infinitesimal affine transformation, algebra of Lie, common asymmetric connection

УДК 514.132.01:519.688

О РЕГУЛЯРНОМ ЗАМОЩЕНИИ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

П.И. Трошин¹

¹ paul.troshin@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Приводится алгоритм построения замощения плоскости Лобачевского, основанный на применении группы движений этой плоскости к исходной протоплитке. Плоскость покрывается набором плиток последовательно от центра модели Бельтрами–Клейна к окружности абсолюта. Для предложенного алгоритма дается оценка роста количества плиток при построении замощения.

Ключевые слова: регулярное замощение, плоскость Лобачевского, гиперболическая геометрия

Под замощением плоскости мы понимаем ее покрытие без дыр и существенных пересечений некоторым классом фигур. В случае многоугольников можно говорить о вершинах, ребрах и гранях замощения по аналогии с планарными графами. В представленном исследовании мы ограничимся регулярными замощениями.

Напомним, что *регулярным* называют замощение плоскости правильными p -угольниками с кратностью вершин q (число ребер в каждой вершине), для его обозначения используют символ Шлефли $\{p, q\}$.

Известно, что для регулярных замощений евклидовой плоскости $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, что соответствует покрытиям правильными треугольниками, шестиугольниками и квадратами. На плоскости Лобачевского, в силу положительного дефекта треугольника, приведенное выше равенство заменяется на неравенство

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2},$$

ему удовлетворяет бесконечно много натуральных чисел $p, q \geq 3$, что позволяет строить гораздо более обширный класс регулярных замощений в геометрии Лобачевского.

Э. Пуанкаре одним из первых предложил групповой подход для изучения замощений гиперболической плоскости [1]. Нельзя не упомянуть о художественных мозаичных рисунках М.К. Эшера, консультировавшегося с Г.С.М. Коксетером о применении циркуля, линейки и транспортира в модели Пуанкаре. Основы теории замощений неевклидовых пространств можно найти в книгах [2, 3]. При построении замощений изначально использовались групповой и комбинаторный подходы с использованием автоматических групп для получения списка преобразований без повторений [4, 5]. В данной работе мы предлагаем алгоритм, наиболее близкий к подходу Д. Данхема [6], в котором замощение строится послойно. Актуальность исследования подтверждается продолжающимся развитием практических и теоретических применений геометрии Лобачевского и, в частности, ее замощений.

Мы будем использовать группу движений плоскости Лобачевского для получения плиток регулярного замощения из исходной протоплитки (правильного p -угольника). Формулы движений в различных моделях плоскости Лобачевского, а также формулы изоморфизмов между этими моделями можно найти в [7].

Для построения регулярного замощения мы используем предварительные факты о его геометрии.

В Лемме 1 приводится связь между символами Шлефли $\{p, q\}$ и метрическими характеристиками грани замощения.

Лемма 1. *В модели Бельтрами–Клейна с константой кривизны 1 для регулярного замощения $\{p, q\}$ плоскости Лобачевского радиус (в метрике Лобачевского) описанной окружности плитки равен*

$$R = \text{Arch} \left(\text{ctg} \frac{\pi}{p} \text{ctg} \frac{\pi}{q} \right). \quad (1)$$

Для определенности в этой работе мы рассмотрим замощения $\{p, q\}$, одна из вершин которых совпадает с центром O модели Бельтрами–Клейна (рис. 1). Введем

следующие обозначения. Слоем \mathcal{F}_1 назовем набор из q различных плиток, с общей вершиной O . Слоем \mathcal{F}_{n+1} , $n \geq 1$, назовем плитки, имеющие общую вершину с одной или двумя плитками из \mathcal{F}_n , но не принадлежащие этому слою. Таким образом, замощением плоскости Лобачевского является $\sqcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ (дизъюнктное объединение). Обозначим также $\mathcal{O}_n = \sqcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, $n \geq 1$. Пусть W_{n+1} — грани из \mathcal{F}_{n+1} , имеющие одну общую вершину с гранями из \mathcal{F}_n , а H_{n+1} — грани из \mathcal{F}_{n+1} , имеющие общее ребро с гранями из \mathcal{F}_n (обозначены серым цветом на рис. 1), $n \geq 1$. Остальные регулярные замощения получаются из описанного выше с помощью группы движений плоскости Лобачевского.

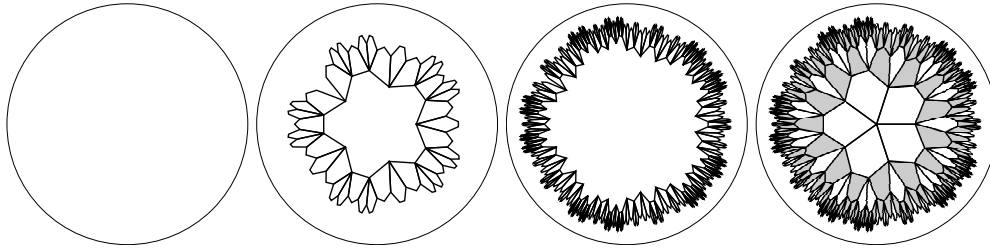


Рис. 1. Слои $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ и их объединение \mathcal{O}_3 на примере замощения $\{5,5\}$

Следующая лемма дает оценку роста количества плиток во множествах \mathcal{F}_n и \mathcal{O}_n , $n \geq 1$. Пусть $\text{Card}(\cdot)$ — мощность множества и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица.

Лемма 2. Для регулярного замощения $\{p, q\}$ обозначим

$$M = \begin{pmatrix} (p-2)(q-3) - 1 & (p-3)(q-3) - 1 \\ p-2 & p-3 \end{pmatrix},$$

тогда при $q > 3$

$$\begin{pmatrix} \text{Card}(W_{n+1}) \\ \text{Card}(H_{n+1}) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \text{Card}(W_n) \\ \text{Card}(H_n) \end{pmatrix} = \dots = qM^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 0,$$

при $q = 3$

$$\begin{pmatrix} \text{Card}(W_{n+1}) \\ \text{Card}(H_{n+1}) \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p-6 & p-5 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ p-4 \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

При этом для $n \geq 0$

$$\text{Card}(\mathcal{F}_{n+1}) = q(1, 1)M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Card}(\mathcal{O}_{n+1}) = q(1, 1)(1 + M + \dots + M^n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = q(1, 1)(E - M^{n+1})(E - M)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы строим замощение последовательно, получая на каждой итерации с номером $n = 1, 2, \dots$ слой \mathcal{F}_n . Плитки слоя \mathcal{F}_{n+1} получаем поворотом плиток из слоя \mathcal{F}_n вокруг их вершин. Основное требование к алгоритму — отсутствие повторяющихся плиток. Плитки замощения будем задавать и хранить упорядоченным набором координат их вершин.

Как и в Лемме 2 (а также в ее доказательстве), приходится рассматривать общий случай $p, q > 3$ и два частных случая $p = 3, q = 3$. Во всех трех случаях мы разделяем слои \mathcal{F}_n на классы W_n и H_n , так как плитки из этих классов по-разному порождают (поворотом вокруг своих вершин) плитки из слоя \mathcal{F}_{n+1} . Более подробно алгоритм и его реализация будут изложены в докладе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в соответствии с исследовательским проектом № 18-31-00295.

Литература

1. Poincaré H. *Théorie des groupes fuchsians* // Acta Math. – 1882. – V. 1. – P. 1–62.
2. Magnus W. *Noneuclidean tessellations and their groups*. – New York : Academic Press, 1974. – 208 p.
3. Beardon A. F. *The geometry of discrete groups*. – New York : Springer, 1983. – 337 p.
4. Levy S. *Automatic generation of hyperbolic tilings* // Leonardo. – 1992. – V. 25. – N. 3. – P. 349–354.
5. Epstein D. B. A., Cannon J., Levy S., Holt D., Patterson M. and Thurston W. *Word processing in groups*. – Boston : Jones and Bartlett, 1992. – 352 p.
6. Dunham D. *Hyperbolic symmetry* // Computers & Mathematics with Applications. – 1986. – V. 12B. – N. 1/2. – P. 139–153.
7. Сосов Е. Н. *Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности: Учебно-методическое пособие*. – Казань : Казан. ун-т, 2016. – 84 с.

ON A REGULAR TESSELLATION OF LOBACHEVSKII PLANE

P.I. Troshin

We suggest an algorithm for regular tessellation of the Lobachevskii plane, which produces the tessellation layer by layer, without repetition of the tiles, by means of proper rigid motions applied to the one initial prototile. We also give formulae for the estimation of the number of tiles in layers for the suggested algorithm.

Keywords: regular tessellation, Lobachevskii plane, hyperbolic geometry

УДК 514.765

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ КВАЗИКОРРЕКТНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Е.В. Тюриков¹

¹ etyurikov@hotmail.com; Донской государственный технический университет

Найден критерий безусловной разрешимости для одного класса задач мембранной теории выпуклых оболочек.

Ключевые слова: выпуклая оболочка, задача Римана-Гильберта, индекс граничного условия

Рассматриваемые ниже вопросы восходят к основополагающей работе И. Н. Векуа [1] о разрешимости задачи Римана–Гильберта для обобщённых аналитических функций с гёльдеровым коэффициентом граничного условия, положившей начало систематическому применению методов комплексного анализа в безмоментной (мембранной) теории тонких упругих оболочек и теории изгибаний поверхностей. К настоящему времени окончательные результаты в этом направлении получены для выпуклых оболочек с гладким краем (т. е. с гладкой границей её срединной поверхности) [2]. Наиболее значимые из них — корректность (квазикорректность) основной задачи со статическим граничным условием для оболочек с односвязной (многосвязной) срединной поверхностью являются следствием того факта, что индекс соответствующей задачи Римана–Гильберта есть инвариант связности поверхности. Применение метода И. Н. Векуа к геометрическим аналогам задач мембранной теории выпуклых оболочек с кусочно-гладким краем [3, 4] выявило связь между «геометрией» срединной поверхности в окрестности её угловой точки и картиной разрешимости соответствующих задач Римана–Гильберта с разрывным коэффициентом граничного условия. Дальнейшее развитие этого метода в работе автора [5] позволило получить эффективную формулу для индекса при условии омбиличности угловых точек срединной поверхности и, как следствие, геометрический критерий квазикорректности основной граничной задачи. Для регулярных выпуклых поверхностей общего вида, удовлетворяющих в угловых точках дополнительному условию так называемой *локальной симметрии*, в некоторых частных случаях также получены эффективные формулы для индекса [6, 7]. В настоящей работе этот вопрос изучен в максимально возможной общности.

Пусть S — односвязная поверхность с кусочно-гладким краем $L = \bigcup_{j=1}^n L_j$ и угловыми точками p_i ($i = 1, \dots, n$), \mathcal{L} — множество всех непрерывных вдоль L полей направлений ℓ , каждое из которых принадлежит поверхности S_0 и является *допустимым* (по И. Н. Векуа [2]). Предполагается, что S есть внутренняя часть поверхности S_0 строго положительной гауссовой кривизны класса регулярности $W^{3,r}$, $r > 2$, а каждая из гладких дуг L_j принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Напомним, что основной граничной задачей мембранной теории называют задачу T о реализации безмоментного напряжённого состояния тонкой упругой оболочки V со срединной поверхностью S при заданной вдоль L проекции вектора усилий на направление поля $\ell \in \mathcal{L}$. В математической постановке задача T есть задача Римана–Гильберта (задача $R(T)$) с разрывным коэффициентом граничного условия для обобщённой аналитической по И. Н. Векуа функции. Если задача T рассматривается при условии *концентрации напряжений* (терминология А. Л. Гольденвейзера [8]) в угловых точках, то отыскиваются решения задачи $R(T)$, допускающие *интегрируемую бесконечность* в точках разрыва, т. е. решения класса H^* по терминологии Н. И. Мусхелишвили [9]. В противном случае следует отыскивать ограниченное решение задачи $R(T)$.

Перейдём теперь к описанию срединных поверхностей, угловые точки которых удовлетворяют условию *локальной симметрии*. Пусть p — какая-либо из угловых точек p_i границы L , $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ — главные направления на поверхности S в этой точке, k_1, k_2 — соответствующие им главные кривизны ($k_1 > k_2$), $\delta = \frac{k_2}{k_1}$, ν — величина

внутреннего угла в точке p . Точку p назовём s -симметрической (или s -точкой), если направление биссектрисы внутреннего угла поверхности S в точке p совпадает с направлением \mathbf{k}_s ($s = 1, 2$). Поверхность S назовём *симметрическим куполом* (или S -куполом), если каждая угловая точка есть s -симметрическая точка ($s = 1$ или $s = 2$). Будем использовать обозначения: $P_s^{(2\nu)}$ — s -симметрическая угловая точка p с внутренним углом 2ν ($s = 1, 2; 0 < \nu < \pi, \nu \neq \frac{\pi}{2}$). Согласно [6, 7] направление поля $\ell \in \mathcal{L}$ в точке p есть направление *обобщённой касательной* ($\ell \in \mathcal{K}(p)$) либо направление *обобщённой нормали* ($\ell \in \mathcal{N}(p)$), причём $\mathbf{k}_s \in \mathcal{K}(p)$ для s -симметрической точки p ($s = 1, 2$), и $\mathbf{k}_m \in \mathcal{N}(p)$ для s -симметрической точки p при $s \neq m$ ($s = 1, 2; m = 1, 2$). Для удобства изложения рассмотрим сначала точки $P_s^{(2\nu)}$, соответствующие s -симметрическим *выходящим* угловым точкам, в которых $0 < \nu < \frac{\pi}{2}$.

Предложение. На поверхности S определены *типовые* функции $t_{sm}^{(k)}(P)$ ($s = 1, 2; m = 1, 2; k = 1, 2$) точки $P \in S$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) если точка P — s -симметрическая точка границы L с внутренним углом $2t_{sm}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) и $\ell(P) = \mathbf{k}_m$, то соответствующая точка разрыва граничного условия задачи $R(T)$ есть особенный узел [9] (см. также [3]);
- 2) $0 < t_{sm}^{(1)} < \arctg \delta^{(-1)^s} < t_{sm}^{(2)} < \frac{\pi}{2}$.

Случаи $s = m = 1, s = m = 2$ рассмотрены в [7]. В общем случае установлено, что $t_{sm}^{(k)} = \arctg \xi_{sm}^{(k)}$ для каждого s, m, k , где $\xi_{sm}^{(k)}$ — положительный корень вполне определённого кубического уравнения с коэффициентами, зависящими от δ .

Введём классификацию угловых точек задачи T . Для этого точку $P_s^{(\nu)}$ ($s = 1, 2$) назовём p_{ss} -узлом, если $\ell \in K(p)$, и p_{sm} -узлом ($s \neq m$), если $\ell \in N(p)$. Каждый из узлов задачи T , соответствующей выходящей ($0 < \nu < \pi$) угловой точки p , отнесём к r -типу ($r = 1, 2, 3$) по правилу: $r = 1$, если $0 < \nu \leq 2t_{sk}^{(1)}$; $r = 2$, если $2t_{sk}^{(1)} < \nu \leq 2t_{sk}^{(2)}$; $r = 3$, если $2t_{sk}^{(2)} < \nu < \pi$, где $t_{sm}^{(k)}$ — значение функции $t_{sm}^{(k)}(P)$ в точке p . Точно также каждый из узлов, соответствующий *входящей* ($\pi < \nu < 2\pi$) угловой точке p отнесём к r -типу ($r = 4, 5, 6$) по правилу: $r = 4$, если $\pi < \nu \leq 2(\pi - t_{sk}^{(2)})$; $r = 5$, если $2(\pi - t_{sk}^{(2)}) < \nu \leq 2(\pi - t_{sk}^{(1)})$; $r = 6$, если $2(\pi - t_{sk}^{(1)}) < \nu < 2\pi$.

Теорема 1. Пусть K_r (N_r) — число p_{ss} -узлов (p_{sm} -узлов, $s \neq m$) r -типа ($r = 1, \dots, 6$) задачи T . Тогда индекс κ задачи $R(T)$ в классе ограниченных решений вычисляется по формуле

$$\kappa = -4 + \sum_{r=1}^6 (3-r)K_r + \sum_{r=1}^3 (2-r)N_r + \sum_{r=4}^6 (4-r)N_r. \quad (1)$$

Следствие 1. Если в определении r -типа p_{sm} -узла нестрогие неравенства заменить на строгие, то формула для индекса κ^* задачи $R(T)$ в классе H^* принимает вид:

$$\kappa^* = -4 + N^*, \quad (2)$$

где $N^* = \sum_{r=1}^6 (4-r)K_r + \sum_{r=1}^3 (3-r)N_r + \sum_{r=4}^6 (5-r)N_r$.

Следствием формулы (2) и результатов работы [3] является

Теорема 2. Задача T для S -куполом при условии концентрации напряжений в угловых точках квазикорректна тогда и только тогда, когда $N^* \geq 3$.

Литература

1. Векуа И. Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Мат. сб. — 1952. — Т. 31, № 2. — С. 217–314.
2. Векуа И. Н. Обобщённые аналитические функции. — М.: Физматлит, 1959. — 512 с.
3. Тюриков Е. В. Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Матем. сб. — 1977. — Т. 7, № 3. — С. 445–462.
4. Тюриков Е. В. Геометрический аналог задачи Векуа–Гольденвейзера // Докл. РАН. — 2009. — Т. 424, № 4. — С. 445–458.
5. Тюриков Е. В. Об одном классе граничных задач мембранной теории выпуклых оболочек // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. — 2012. — № 3. — С. 18–24.
6. Тюриков Е. В. Граничная задача мембранной теории выпуклых оболочек для одного класса симметрических куполов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. — 2018. — № 1. — С. 7–12.
7. Tjurikov E. V. One case of extended boundary value problem of the membrane theory of convex shells by I. N. Vekua // Проблемы анализа ◦ Issues Of Analysis. — 2018. — № 7. — P. 153–162.
8. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М., 1976. — 512 с.
9. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Физматлит, 1968. — 511 с.

GEOMETRIC CRITERION OF QUASI-CORRECTNESS FOR ONE CLASS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MEMBRANE THEORY OF CONVEX HULLS

E.V. Tyurikov

The criterion of unconditional solvability is found for one class of problems of the membrane theory of convex shells.

Keywords: convex shell, Riemann–Hilbert boundary problem, index of the boundary value condition

УДК 514

ЛОКАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА ГРОМОВА–ХАУСДОРФА И ВПОЛНЕ НЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНЕЧНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

А.М. Филин¹

¹ arsenii.filin@yandex.ru; Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

В статье исследуется геометрия метрического пространства \mathcal{M} классов изометрии компактных метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа в окрестностях конечных метрических пространств с тривиальной группой изометрий. Доказано, что достаточно малые окрестности таких пространств в подпространстве всех n -точечных пространств в \mathcal{M} изометричны соответствующим окрестностям точек пространства \mathbb{R}^N с нормой $|(x_1, \dots, x_N)| = \max_i |x_i|$.

Ключевые слова: пространство Громова–Хаусдорфа, расстояние Громова–Хаусдорфа, конечные метрические пространства, метрическая геометрия

Введение

“Пространства подмножеств” изучаются специалистами не только благодаря своей теоретической значимости, но и в силу важности таких приложений, как сравнение и распознавание образов, построение деформации одного геометрического объекта в другой и т.д. Один из возможных подходов к изучению таких пространств — определить функцию расстояния между подмножествами как “меру несхожести” соответствующих объектов. М. Громов обобщил метрику Хаусдорфа на семейство всех метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии). Полученное метрическое пространство \mathcal{M} называют пространством Громова–Хаусдорфа.

А. Иванов и А. Тужилин сформулировали следующую задачу: *выяснить любой ли счетный метрический компакт может быть изометрично вложен в \mathcal{M} ?* При её решении было определено понятие *вполне несимметричного метрического пространства*, как пространства с тривиальной группой изометрий. В данной статье изучается геометрия \mathcal{M} в окрестности таких пространств, в частности, обобщены основные результаты [3].

Заметим, что вполне несимметричные метрические пространства представляют отдельный интерес. А. Иванов и А. Тужилин активно изучают их в работе [4], основным результатом которой является доказательство того, что пространство Громова–Хаусдорфа само вполне несимметрично.

Основные определения

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ обозначим открытый шар с центром в точке x и радиусом r ; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a \in A} U_r(a)$.

Для непустых $A, B \subset X$ пусть

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B* .

Через $\text{diam } X$ будем обозначать *диаметр* метрического пространства X , т.е. величину $\sup\{|xx'| : x, x' \in X\}$.

Пусть X и Y — метрические пространства.

Определение. *Тройку (X', Y', Z) , состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y' , изометричных соответственно X и Y , назовем реализацией пары (X, Y) .*

Определение. *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ Громова–Хаусдорфа между X и Y называется точная нижняя грань чисел r , для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \leq r$.*

Хорошо известно [1], [2], что на множестве \mathcal{M} метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии) функция d_{GH} является метрикой.

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$.

Определение. Отношение R между X и Y называется соответствием, если ограничения канонических проекций π_X и π_Y на R — сюръекции, где $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$ для любой пары $(x, y) \in X \times Y$.

Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ можно рассматривать, как многозначное отображение пространства X в пространство Y , поэтому подмножество пространства Y , соответствующее точке $x \in X$, будем обозначать $R(x)$, то есть $R(x) = \{y \in Y : (x, y) \in R\}$.

Определение. Пусть X и Y — метрические пространства, тогда для каждого соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ определено его искажение

$$\text{dis } R = \sup \{ ||xx' - yy' || : (x, y) \in R, (x', y') \in R \}.$$

Предложение. ([1], [2].) Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем: $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \}$.

Определение. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ называется оптимальным, если $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{dis } R$.

Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$.

Предложение. ([5], [6], [7].) Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y) \neq \emptyset$.

Определение. Изометрией произвольного метрического пространства X называется взаимно-однозначное отображение X в себя, сохраняющее все расстояния.

Множество всех изометрий метрического пространства образует группу относительно композиции.

Определение. Будем говорить, что метрическое пространство X является вполне несимметричным пространством, если его группа изометрий тривиальна.

Для конечного метрического пространства X определим величины:

$$s(X) = \min \{ |xy| : x \neq y \},$$

$$e(X) = \min \{ ||xy - zw|| : x \neq y, z \neq w, \{x, y\} \neq \{z, w\} \},$$

$$t(X) = \min \{ |xy| + |yz| - |xz| : x \neq y \neq z \neq x \}.$$

Лемма. Для любого конечного метрического пространства X , состоящего из трех и более точек, верно следующее неравенство: $s(X) \geq t(X)$.

Через $S(X)$ будем обозначать группу перестановок точек конечного метрического пространства X . Тожественную перестановку будем обозначать id .

Для перестановки $\sigma \in S(X)$, как для любого другого отношения, определено искажение: $\text{dis } \sigma = \max \{ ||\sigma(x)\sigma(y) - xy|| : x, y \in X \}$.

Для метрического пространства X положим $e'(X) = \inf \{ \text{dis } \sigma : \sigma \in S(X), \sigma \neq \text{id} \}$.

Лемма. Пусть $|X| < \infty$. Тогда условие $e'(X) > 0$ эквивалентно тому, что X вполне несимметрично.

Замечание Для счетных метрических компактов эта лемма неверна. Например, у метрического пространства $M = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0\} \subset \mathbb{R}$, являющегося сходящейся в своей метрике последовательностью, группа изометрий тривиальна, так как все расстояния разные, но, $e'(M) = 0$.

Устройство \mathcal{M} в окрестности конечного вполне несимметричного пространства

Расстояние по Громову–Хаусдорфу между вполне несимметричным конечным метрическим пространством и близким к нему произвольным метрическим компактом достигается на единственном оптимальном соответствии.

Предложение. Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — конечное метрическое пространство такое, что $e'(M) > 0$. Тогда для любого $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \min(s(M), e'(M))$ и каждого метрического компакта X такого, что $2d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, существует единственное оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}_{opt}(M, X)$. Это соответствие порождает разбиение $X = \sqcup_{i=1}^n R(i)$, обладающее следующими свойствами:

1. $\text{diam } R(i) < \varepsilon$;
2. для любых $i, j \in M$ и любых $x_i \in R(i)$ и $x_j \in R(j)$ (здесь индексы i и j могут быть равны друг другу) выполняется $||x_i x_j| - |i j|| < \varepsilon$.

Лемма. Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — конечное метрическое пространство. Тогда для любого $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} s(M)$ и каждого n -точечного метрического пространства $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ такого, что $2d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, расстояние по Громову–Хаусдорфу между M и X достигается на биективном соответствии.

Предложение. Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — конечное метрическое пространство такое, что $e'(M) > 0$. Тогда для любого $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \min(s(M), e'(M))$ и любых n -точечных метрических пространств $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ таких, что $4d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, $4d_{GH}(M, Y) < \varepsilon$, расстояние по Громову–Хаусдорфу между X и Y достигается на единственном биективном соответствии $R = R_X R_Y^{-1}$, где R_X, R_Y — биективные оптимальные соответствия между M и X и между M и Y соответственно.

Пусть \mathbb{R}_∞^k — пространство действительных k -мерных векторов $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ с нормой $||\vec{x}|| = \max_i |x_i|$. Расстояние между двумя векторами в \mathbb{R}_∞^k , порожденное этой нормой, будем обозначать $|\vec{x} \vec{y}|_\infty$.

Теорема. Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — конечное метрическое пространство, а $\vec{d}_M = (|12|, \dots, |1n|, \dots, |(n-1)(n)|)$ — вектор в $\mathbb{R}_\infty^{n(n-1)/2}$, компоненты которого — элементы множества расстояний пространства M . Тогда в условиях предыдущего предложения множество расстояний пространства X можно единственным образом упорядочить и представить в виде вектора $\vec{d}_X \in \mathbb{R}_\infty^{n(n-1)/2}$ так, что $2d_{GH}(M, X) = |\vec{d}_M \vec{d}_X|_\infty$, а множество расстояний пространства Y можно единственным образом упорядочить

и представить в виде вектора $\vec{d}_Y \in \mathbb{R}_\infty^{n(n-1)/2}$ так, что $2d_{GH}(X, Y) = |\vec{d}_X \vec{d}_Y|_\infty$ и $2d_{GH}(M, Y) = |\vec{d}_M \vec{d}_Y|_\infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_{[n]}$ подмножество в пространстве Громова–Хаусдорфа, состоящее из n -точечных метрических пространств. Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ – n -точечное вполне несимметричное метрическое пространство такое, что $t(M) > 0$. Положим $\delta = \frac{1}{2} \min(e'(M), t(M))$, $U = U_{\delta/4}(M) \subset \mathcal{M}_{[n]}$, $V = U_{\delta/4}(\vec{d}_M) \subset \mathbb{R}_\infty^{n(n-1)/2}$.

Теорема. *Отображение $v : U \rightarrow V, X \mapsto \frac{1}{2} \vec{d}_X$ является биективной изометрией.*

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору А.О.Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также профессору А.А.Тужилину за полезные обсуждения. Работа частично поддержана грантом РФФИ, проект 16–01–00378, и грантом Президента РФ поддержки Ведущих научных школ России(соглашение 075-02-2018-867).

Литература

1. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
2. Иванов А. О., Тужилин А. А. *Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов.* // Москва: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2017.
3. Iliadis S., Ivanov A., Tuzhilin A. *Local structure of gromov-hausdorff space, and isometric embeddings of finite metric spaces into this space.* // Topology and its Applications, 2017. – Vol. 221. – P. 393-398. (ArXiv e-prints, arXiv:1604.07615)
4. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. *Isometry group of gromov-hausdorff space.* // Matematicki Vesnik, 2019. – Vol. 71, no. 1-2. – P. 123–154. (ArXiv e-prints, arXiv:1806.02100).
5. Ivanov O., Iliadis S., Tuzhilin A. *Realizations of Gromov–Hausdorff Distance.* // ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.
6. Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces.* // ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.
7. <http://mathoverflow.net/questions/135184/for-which-metric-spaces-is-gromov-hausdorff-distance-actually-achieved?rq=1>

LOCAL GEOMETRY OF GROMOV–HAUSDORFF METRIC SPACE AND TOTALLY ASYMMETRIC FINITE METRIC SPACES

A.M. Filin

In the present paper we investigate the structure of the metric space \mathcal{M} of compact metric spaces considered up to an isometry and endowed with the Gromov-Hausdorff metric in a neighbourhood of a finite metric space, whose isometry group is trivial. It is shown that a sufficiently small ball in the subspace of \mathcal{M} consisting of finite spaces with the same number of points centered at such a space is isometric to a corresponding ball in the space \mathbb{R}^N endowed with norm $|(x_1, \dots, x_N)| = \max_i |x_i|$.

Keywords: Gromov–Hausdorff space, Gromov–Hausdorff distance, finite metric spaces, metric geometry

УДК 514.76

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА С ПОМОЩЬЮ ДВУХЪЯРУСНОЙ ГЛАВНОЙ СВЯЗНОСТИ

Ю.И. Шевченко¹, Е.В. Скрыдлова²

¹ *iushevchenko@kantiana.ru*; Балтийский федеральный университет им. И. Канта, институт физико-математических наук и информационных технологий

² *eskrydlova@kantiana.ru*; Балтийский федеральный университет им. И. Канта, институт физико-математических наук и информационных технологий

Над гладким многообразием рассмотрено двухъярусное главное расслоение с типовым слоем – группой Ли, содержащей подгруппу. В главном расслоении задана связность. Расслоение превратилось в пространство двухъярусной главной связности. Найдены дифференциальные сравнения для компонент тензора кривизны, который имеет подтензор. В пространстве двухъярусной главной связности произведено каноническое сечение, которое превратило его в пространство со связностью Картана. Тензор кривизны-кручения и тензор кручения связности Картана с точностью до постоянных слагаемых совпали с тензором кривизны главной связности и его подтензором. Таким образом получена интерпретация связности Картана, эквивалентная интерпретации Кобаяси.

Ключевые слова: главное расслоение, главная связность, тензор кривизны, связность Картана

Рассмотрим $(r + n)$ -мерную группу Ли G_{r+n} со структурными уравнениями

$$d\vartheta^I = C_{JK}^I \vartheta^J \wedge \vartheta^K, \quad C_{(JK)}^I = 0, \quad C_{J\{K}^I C_{LM\}}^J = 0 \quad (I, \dots = \overline{1, r+n}). \quad (1)$$

Значения индексов разбиваются на две серии

$$I = (\alpha, i); \quad \alpha, \dots = \overline{1, r}; \quad i, \dots = \overline{r+1, r+n}.$$

Пусть выполняются условия $C_{\alpha\beta}^i = 0$, тогда система уравнений $\vartheta^i = 0$ вполне интегрируема, а для постоянных $C_{\beta\gamma}^\alpha$ выполняются тождества Якоби. Значит, это структурные постоянные r -членной подгруппы $H_r \subset G_{r+n}$, а сама группа является главным расслоением $H_r(K_n)$ с внешними уравнениями

$$d\vartheta^i = \vartheta^j \wedge (C_{jk}^i \vartheta^k + 2C_{j\alpha}^i \vartheta^\alpha), \quad (2)$$

$$d\vartheta^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\gamma + \vartheta^i \wedge (C_{ij}^\alpha \vartheta^j + 2C_{i\beta}^\alpha \vartheta^\beta), \quad (3)$$

причем базой расслоения служит n -мерное однородное пространство $K_n = G_{r+n}/H_r$, а типовым слоем – подгруппа H_r .

Возьмем n -мерное гладкое многообразие M_n со структурными уравнениями Лаптева

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i. \quad (4)$$

Построим над ним главное расслоение $G_{r+n}(M_n)$, структурные уравнения слоевых форм которого обобщают уравнения (1) или (2, 3):

$$d\omega^I = C_{JK}^I \omega^J \wedge \omega^K + \theta^j \wedge \omega_j^I; \quad (5)$$

$$d\omega^i = \omega^j \wedge (C_{jk}^i \omega^k + 2C_{j\alpha}^i \omega^\alpha) + \theta^j \wedge \omega_j^i, \quad (6)$$

$$d\omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge (C_{ij}^\alpha \omega^j + 2C_{i\beta}^\alpha \omega^\beta) + \theta^j \wedge \omega_j^\alpha. \quad (7)$$

Структурные уравнения (4, 6, 7) расслоения $G_{r+n}(M_n)$ показывают, что оно является двухъярусным расслоением $H_r(K_n(M_n))$. Расширенная база $K_n(M_n)$ есть однородное расслоение со структурными уравнениями (4, 6), базой M_n и типовым слоем – однородным пространством K_n . Фиксация точки расширенной базы вполне интегрируемой системой уравнений $\theta^i = 0$, $\omega^i = 0$ выделяет подгруппу H_r .

Зададим связность в главном расслоении $G_{r+n}(M_n)$ способом Лаптева-Лумисте с помощью форм $\tilde{\omega}^I = \omega^I - \Gamma_j^I \theta^j$, причем компоненты объекта связности Γ_j^I удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta \Gamma_j^I + \omega_j^I = \Gamma_{jk}^I \theta^k, \quad (8)$$

$$\Delta \Gamma_j^I = d\Gamma_j^I + \Gamma_j^J \Omega_J^I - \Gamma_k^I \theta_j^k, \quad \Omega_J^I = 2C_{JK}^I \omega^K. \quad (9)$$

Формы связности ω^I подчиняются структурным уравнениям

$$d\tilde{\omega}^I = C_{JK}^I \tilde{\omega}^J \wedge \tilde{\omega}^K + R_{jk}^I \theta^j \wedge \theta^k, \quad (10)$$

где компоненты объекта кривизны R_{jk}^I выражаются по формуле

$$R_{jk}^I = \Gamma_{[jk]}^I - C_{LM}^I \Gamma_j^L \Gamma_k^M. \quad (11)$$

Главное расслоение $G_{r+n}(M_n)$ с заданной связностью назовем двухъярусным пространством главной связности $G_{r+n,n}$, и определим структурными уравнениями (4, 10).

Замкнем уравнения (4) и разрешим полученные кубические уравнения по лемме Лаптева [1]:

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \theta^k \wedge \theta_{jk}^i, \quad (12)$$

причем выполняются условия полуголономности [2] многообразия M_n :

$$\theta_{[jk]}^i = \lambda_{jkl}^i \theta^l, \quad \lambda_{(jk)l}^i = 0, \quad \lambda_{\{jkl\}}^i = 0. \quad (13)$$

Внешние дифференциалы форм Ω_j^I (9₂) приводятся к виду

$$d\Omega_j^I = \Omega_j^K \wedge \Omega_K^I + \theta^k \wedge \Omega_{jk}^I, \quad \Omega_{jk}^I = 2C_{JK}^I \omega_k^K. \quad (14)$$

С помощью структурных уравнений (4) продолжим уравнения (5):

$$d\omega_j^I = \omega_j^I \wedge \Omega_j^I - \omega_k^I \wedge \theta_j^k + \theta^k \wedge \omega_{jk}^I, \quad (15)$$

причем выполняются условия слоевой полуголономности расслоения $G_{r+n}(M_n)$:

$$\omega_{[jk]}^I = \mu_{jkl}^I \theta^l, \quad \mu_{(jk)l}^I = 0, \quad \mu_{\{jkl\}}^I = 0. \quad (16)$$

С помощью структурных уравнений (4, 12, 14, 15) продолжим дифференциальные уравнения (8), проальтернируем результат и запишем его в виде дифференциальных сравнений. Найдем сравнения для компонент агрегата $C_{LM}^I \Gamma_j^L \Gamma_k^M$ и вычтем их из предыдущих сравнений, тогда согласно формуле (11) получим

$$\Delta R_{jk}^I - \Gamma_l^I \theta_{[jk]}^l + \omega_{[jk]}^I \cong 0 \pmod{\theta^i}.$$

При условиях полуголономности (13, 16) эти сравнения принимают тензорный вид: $\Delta R_{jk}^I \cong 0$. Раскроем действие дифференциального оператора Δ , используем обозначение (14₂) и условие $C_{\alpha\beta}^i = 0$:

$$dR_{jk}^i + R_{jk}^l 2C_{l\alpha}^i \omega^\alpha - R_{lk}^i \theta_j^l - R_{jl}^i \theta_k^l \cong 0, \quad (17)$$

$$dR_{jk}^\alpha + R_{jk}^\beta 2C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - R_{lk}^\alpha \theta_j^l - R_{jl}^\alpha \theta_k^l + R_{jk}^l 2C_{l\beta}^\alpha \omega^\beta \cong 0. \quad (18)$$

Утверждение. Объект кривизны R_{jk}^I двухъярусного пространства главной связности $G_{r+n,n}$ образует тензор, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (17, 18). Тензор кривизны содержит подтензор R_{jk}^i .

Запишем подробнее структурные уравнения (10):

$$d\tilde{\omega}^i = C_{jk}^i \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k + 2C_{ja}^i \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^a + R_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k, \quad (19)$$

$$d\tilde{\omega}^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^\gamma + 2C_{\beta i}^\alpha \tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^i + C_{ij}^\alpha \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j + R_{ij}^\alpha \theta^i \wedge \theta^j. \quad (20)$$

Если в пространстве $G_{r+n,n}$ произвести приклеивание с помощью канонического сечения $\tilde{\omega}^i = \theta^i$ [3, с.175], то получим структурные уравнения пространства со связностью Картана:

$$d\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge 2C_{ja}^i \tilde{\omega}^a + K_{jk}^i \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k, \quad (21)$$

$$d\tilde{\omega}^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^\gamma + 2C_{\beta i}^\alpha \tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^i + K_{jk}^\alpha \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k. \quad (22)$$

Объект $K_{jk}^I = C_{jk}^I + R_{jk}^I$ является тензором кривизны-кручения, содержащим тензор кручения K_{jk}^i .

Вывод. Уравнения (4, 19, 20) Евтушик называл структурными уравнениями связности Картана [3, с.174], а (21, 22) – уравнениями специализированной связности Картана [3, с.175]. Термин "связность Картана" лучше использовать в последнем случае. Тогда переход (4, 19, 20) \rightarrow (21, 22) эквивалентен интерпретации Кобаяси [4, с.167] связности Картана.

Литература

1. Лаптев Г.,Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. Т.1 М. (1966) С. 139–189.
2. Шевченко Ю.И. Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Дифф. геом. многообр. фигур. Вып. 46. Калининград, (2015) С. 168–177.

3. Евтушик Л. Е. *Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученные методом подвижного репера* // Современ. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. Т. 30. Геометрия –3. М. ВИНТИ, (2002) С. 170–204.

4. Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии* // М., (1986) 244 с.

INTERPRETATION OF CARTAN CONNECTION USING TWO-TIER PRINCIPAL CONNECTION

Ju.I. Shevchenko, E.V. Skrydlova

Over a smooth manifold a two-tier principal bundle with a type layer a Lie group containing a subgroup is considered. The principle bundle is constructed. The bundle has become the space of a two-tier principle connection. Differential comparisons are found for the components of the curvature tensor, which has a subtensor. A canonical section was made in the space of a two-tier principle connection, which turned it into a space with a Cartan connection. The curvature-torsion tensor and the torsion tensor of the Cartan connection with up to constant terms coincide with the curvature tensor of the principle connection and its subtensor. Thus, an interpretation of the Cartan connection equivalent to the Kobayashi interpretation is obtained.

Keywords: principal bundle, principal connection, curvature tensor, Cartan connection

Научное издание

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ - 2019

**Сборник трудов
Международной научной конференции
Казань, 4 – 7 сентября 2019 г.**

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - **А.А. Агафонов**
Техническая редакция, набор и верстка: **А.А. Агафонов, А.А. Попов,
К.А. Митничук, П.Н. Иваньшин**
Оформление обложки - **А.А. Агафонов**

Подписано в печать 27.08.2019
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 10.
Тираж 100 экз. Заказ 152/8

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37
тел: (843) 233-73-59, 233-73-28