

УДК 517.54

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО КРУГА НА РИМАНОВУ ПОВЕРХНОСТЬ

П.Н. Иваньшин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В статье приведен метод построения конформного отображения единичного круга на риманову поверхность (отображение с неоднолистным образом). В случае области, лежащей на римановой поверхности, построение конформного отображения единичного круга на нее сведено к решению интегрального уравнения. Дан вывод необходимых соотношений из формул Сохотского. Построен пример, иллюстрирующий метод для двулистно накрывающей плоскость римановой поверхности.

Необходимое и достаточное условие того, что заданная на замкнутой кривой функция является граничным значением некоторой функции, аналитической в находящейся на римановой поверхности области, ограниченной данной кривой, примененное для отображения единичного круга на односвязную и однолистную область и обеспечивающее появление интегрального уравнения, следует несколько изменить.

Для функции $\phi(z) = \ln(\zeta(z)/z)$ можно выписать уравнения, аналогичные уравнениям для однолистной области, но на участках контура, ограничивающих область двулиственности, необходимо поделить правую часть на три.

Ключевые слова: конформное отображение, риманова поверхность, аналитическая функция, уравнение Фредгольма

Введение

Известно много методов построения конформного отображения односвязной области на единичный круг и, наоборот, единичного круга на область комплексной плоскости. Рассмотрим сначала отображение области на круг. В случае метода оскуляции [1] происходит отображение области D на подобласть единичного круга при помощи функций \sqrt{z} или $\ln z$, затем на большую подобласть и т. д., до тех пор, пока не получится отображение области на единичный круг. Развитием метода оскуляции является метод Грассмана [2], когда сначала ищется возможность отображения области на круг без сектора, потом применяется преобразование Мебиуса. Рассмотрим теперь метод $\sinh\text{-log}$ [3]. Этот метод основан на том, что в логарифмическом методе Кебе на определенном этапе на каждой итерации логарифмический образ области обычно не только лежит в левой полуплоскости, но и в некоторой горизонтальной полосе, то есть мнимая часть всех ее точек ограничена сверху и снизу. Соответствующее вещественно-аффинное преобразование отображает эту половину полосы на нормированную полуполосу $\{\text{Im}[z] \in (-\pi/2, \pi/2)\}$. В свою очередь, функция \sinh отображает эту полуполосу на всю левую полуплоскость. В результате гораздо большая часть полуплоскости, чем в логарифмическом методе Кебе, занята образом области до того, как полуплоскость отображается на единичный круг на последнем шаге итеративной процедуры. Методы Шварца–Кристоффеля для многоугольных областей [4, 5] работают для областей, которые

можно эффективно приблизить многоугольниками. Сложность этого метода заключается в поиске вспомогательных параметров для удачной первой итерации. Г.Т. Симм предложил решать задачу построения конформного отображения сведением к интегральному уравнению [6]. Им было предложено несколько линейных уравнений, но не был предложен алгоритм решения этих уравнений.

Существуют также методы построения конформного приближенного отображения единичного круга на односвязную область. Метод Теодорсена [7] применим только для звездных областей. Этот метод использует гармонически сопряженные функции для нахождения перепараметризации границы контура и последовательные итерации. Метод Форнберга [8] – итерационный метод построения полиномиального отображения – требует хорошего первого приближения. Все эти методы требуют хорошо подобранного начального приближения отображения. Итерационный метод Вегмана [9, 10] предлагает для численного построения конформного отображения решение вспомогательных краевых задач для построения соответствующих итераций. Алгоритм zipper [11] отображает единичный круг на многоугольную область. Этот алгоритм строит отображение как композицию конформных отображений на полуплоскости с разрезами, то есть опять представляет собой последовательность итераций.

Аналитический метод перепараметризации граничной кривой, предложенный впервые в [12], строго обоснованный в [13] и примененный в настоящей работе, имеет следующие преимущества перед перечисленными методами: решение имеет полиномиальный вид, что облегчает приложения решения к другим задачам [14, 15], решение не использует вспомогательные построения (см. [8, 16–18]) и итерации (см. [10, 19, 20]). Аналитический метод основан на приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода сведением к системе линейных уравнений и легко программируется. Интегральное уравнение Фредгольма – следствие необходимого и достаточного условия того, чтобы заданная на контуре функция была граничным значением функции, аналитической в соответствующей области [21]. Это соотношение дано в [21] для произвольной однолистной области и основано на формуле Сохоцкого и интегральной формуле Коши. Здесь для случая самопересекающейся границы и многолистной области задача тоже сводится к интегральному уравнению Фредгольма, для вывода которого применяется измененная интегральная формула Коши для разных подобластей. Метод демонстрируется на примере области, расположенной на двулистной римановой поверхности.

В случае области, лежащей на римановой поверхности, сведение построения конформного отображения к интегральному уравнению возможно аналогично случаю однолистной области. При этом необходимое и достаточное условие того, что заданная на замкнутой кривой функция является граничным значением некоторой функции, аналитической в находящейся на римановой поверхности области, ограниченной данной кривой, примененное в для отображения единичного круга на односвязную и однолистную область и обеспечивающее появление интегрального уравнения, следует несколько изменить. В работе построен пример подобного отображения единичного круга на двулистную область.

Пусть $\zeta(z)$ – искомое отображение. Функция $\phi(z)$ является аналитической в области D тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{|z(t)|} + i(\theta(t) - \arg z(t)) = & \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln \frac{1}{|z(\tau)|} + i(\theta(\tau) - \arg z(\tau))}{z(\tau) - z(t)} z'(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{3\pi i} \int_{L_2} \frac{\ln \frac{1}{|z(\tau)|} + i(\theta(\tau) - \arg z(\tau))}{z(\tau) - z(t)} z'(\tau) d\tau. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь $\theta(t)$ – функция, выражающая зависимость полярного угла θ единичной окружности от параметра t контура $L = L_1 \cup L_2$, ограничивающего область D . Рассмотрим теперь мнимую часть последнего соотношения, обозначим разность $\theta(t) - \arg z(t)$ через $q(t)$ и получим следующее уравнение Фредгольма второго типа на $q(t)$:

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(\tau) \frac{\partial(\arg(z(\tau) - z(t)))}{\partial \tau} d\tau + \\ \quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln |z(\tau)| \frac{\partial[\ln |z(\tau) - z(t)|]}{\partial \tau} d\tau, & t \in L_1, \\ \frac{1}{3\pi} \int_0^{2\pi} q(\tau) \frac{\partial(\arg(z(\tau) - z(t)))}{\partial \tau} d\tau + \\ \quad + \frac{1}{3\pi} \int_0^{2\pi} \ln |z(\tau)| \frac{\partial[\ln |z(\tau) - z(t)|]}{\partial \tau} d\tau, & t \in L_2. \end{cases} \quad (2)$$

Схема решения после построения основной системы уравнений для данной многолистной области повторяет шаги, представленные в [13] для односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Если решение интегрального уравнения представляет собой ряд Фурье

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt), \quad (3)$$

то приближенное решение этого уравнения можно представить в виде

$$q(t) = \sum_{n=1}^M \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt). \quad (4)$$

Здесь число M нужно брать настолько большим, чтобы функция $\theta(t) = q(t) + \arg(z(t))$ была монотонно возрастающей. Решаем полученную конечную систему линейных уравнений на α_n, β_n и восстанавливаем $q(t)$.

Построение конформного отображения единичного круга на область, расположенную на римановой поверхности

Рассмотрим сначала решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$X(t) = \int_0^{2\pi} G(\tau, t) X(\tau) d\tau + Y(t). \quad (5)$$

Здесь $X(t)$ – неизвестная функция, $G(\tau, t)$ – 2π -периодическая функция по обоим переменным, $Y(t)$ – 2π -периодическая функция по t . Соответственно, решение тоже 2π -периодично, то есть представимо в виде ряда Фурье. Заметим, что интегральное уравнение вида (5) появляется, например, при решении задачи Дирихле для плоской области методом потенциалов [22].

Пусть интегральное уравнение однозначно разрешимо в линейном пространстве интегрируемых функций. Сведем решение уравнения к решению бесконечной системы линейных уравнений. Тогда приближенное решение интегрального уравнения будет иметь вид конечной частной суммы ряда Фурье, так как бесконечная

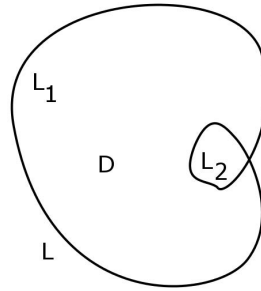


Рис. 1. Двулистная область

система заменяется усеченной конечной системой. Оказывается, что для усеченной системы линейных уравнений достаточно высокого порядка решение тоже будет существовать и сходиться к решению интегрального уравнения.

Напомним основное утверждение, обеспечивающее существование конформного приближенного отображения [13].

Лемма. Пусть существуют такие числа $j, p > 1$ и константа $U > 0$, что

$$\left| \frac{\partial^{j+p} G(\tau, t)}{\partial t^j \partial \tau^p} \right| \leq U,$$

и функция $Y(t)$ обладает ограниченной второй производной: $|Y''(t)| < T$. Тогда приближенное решение однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма второго рода (5), может быть сведено к решению конечной линейной системы с ошибкой, которую можно оценить как $O(1/N^2)$. Здесь N – порядок конечной системы.

В случае области, лежащей на римановой поверхности, сведение построения конформного отображения к интегральному уравнению также возможно. При этом необходимое и достаточное условие того, что заданная на замкнутой кривой функция является граничным значением некоторой функции, аналитической в находящейся на римановой поверхности области, ограниченной данной кривой, примененное в [13] и обеспечивающее появление интегрального уравнения, следует несколько изменить. Рассмотрим это на примере двулистной области.

Пусть $L = \partial D$ – граница двулистной области D , тогда для интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

определены $\Phi^+(z)$, $z \in D$, $\Phi^-(z)$, $z \notin D$ [21]. Пусть функция ϕ аналитична в области D . Обозначим часть контура, не накладываемую на сам контур, через L_1 . Участки контура, ограничивающие область неоднолистности, обозначим через L_2 (рис. 1).

Для точек z в зависимости от их расположения относительно D получим

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \\ \pi i, & z \in L_1, \\ 3\pi i, & z \in L_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\phi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau \right] &= \Phi^+(t) - \phi(t), \\ \lim_{z \rightarrow t^-} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\phi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau \right] &= \Phi^-(t), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\phi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau &= \Phi(t) - \phi(t)/2, \quad t \in L_1, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\phi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau &= \Phi(t) - 3\phi(t)/2, \quad t \in L_2. \end{aligned}$$

Для $t \in L_2$ получим $\Phi^+(t) - \phi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - 3\phi(t)/2$. Тогда в терминологии [21]

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= -\frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L_2, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{3}{2}\phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\phi(t) = \frac{2}{3} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{3\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L_2.$$

$\ln \frac{\zeta(z)}{z}$ – аналитическая функция в D в том и только том случае [21], когда

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{|z(t)|} + i(\theta(t) - \arg z(t)) &= \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\ln \frac{1}{|z(\tau)|} + i(\theta(\tau) - \arg z(\tau))}{z(\tau) - z(t)} z'(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{3\pi i} \int_{L_2} \frac{\ln \frac{1}{|z(\tau)|} + i(\theta(\tau) - \arg z(\tau))}{z(\tau) - z(t)} z'(\tau) d\tau, \quad (6) \end{aligned}$$

где $\theta(t)$ – зависимость полярного угла θ на границе единичного круга от исходного параметра t контура L – границы D .

Значит, для $\phi(z) = \ln(\zeta(z)/z)$ получим уравнения, аналогичные уравнениям из [13], но на участках контура, ограничивающих область неоднолиственности, необходимо поделить правую часть на 3 согласно формуле (2).

Далее, следуя рассуждениям, проведенным в [13] для односвязной области: 1) составляем бесконечную систему относительно коэффициентов Фурье искомой функции; 2) решаем конечную систему в соответствии с приведенной леммой; 3) найдя соответствие между параметрами t и θ , приближенно восстанавливаем $z(\zeta)$ в виде полинома, перепараметризуя граничную кривую.

Затем строим приближенное решение интегрального уравнения по формулам (3), (4).

Приближенное решение интегрального уравнения по лемме сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} AA & AB \\ BA & BB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_M \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_M \end{pmatrix}.$$

Векторы

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_M \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_M \end{pmatrix}$$

правой части системы согласно формуле (2) состоят из элементов

$$f_l = \left(- \sum_j \operatorname{Im} z_j^l + \sum_k \operatorname{Im} \hat{z}_k^{-l} \right) \frac{1}{l} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln |z(\tau)| d\tau \int_{L_1} L(\tau, t) \cos(lt) dt + \\ + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln |z(\tau)| d\tau \int_{L_2} L(\tau, t) \cos(lt) dt,$$

$$g_l = \left(\sum_j \operatorname{Re} z_j^l + \sum_k \operatorname{Re} \hat{z}_k^{-l} \right) \frac{1}{l} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln |z(\tau)| d\tau \int_{L_1} L(\tau, t) \sin(lt) dt + \\ + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln |z(\tau)| d\tau \int_{L_2} L(\tau, t) \sin(lt) dt, \quad l = 1, \dots, M.$$

Блок-матрицы AA , AB , BA , BB порядка M согласно формуле (2) состоят из элементов

$$AA = \left(\delta_{ln} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(n\tau) d\tau \int_{L_1} K(\tau, t) \cos(lt) dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(n\tau) d\tau \int_{L_2} K(\tau, t) \cos(lt) dt \right)_{l,n=1}^M,$$

$$AB = \left(-\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin(n\tau) d\tau \int_{L_1} K(\tau, t) \cos(lt) dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin(n\tau) d\tau \int_{L_2} K(\tau, t) \cos(lt) dt \right)_{l,n=1}^M,$$

$$BA = \left(-\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(n\tau) d\tau \int_{L_1} K(\tau, t) \sin(lt) dt - \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(n\tau) d\tau \int_{L_2} K(\tau, t) \sin(lt) dt \right)_{l,n=1}^M,$$

$$BB = \left(\delta_{ln} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin(n\tau) d\tau \int_{L_1} K(\tau, t) \sin(lt) dt - \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin(n\tau) d\tau \int_{L_2} K(\tau, t) \sin(lt) dt \right)_{l,n=1}^M.$$

Здесь δ_{ln} – дельта-функция Кронекера.

Пример. Построим приближенное отображение единичного круга на область, лежащую на двулистной римановой поверхности и ограниченную самопересекающейся кривой

$$z(t) = -0.05e^{4it} - 0.55e^{2it} + e^{it} - 0.05e^{-2it} + 0.05e^{-4it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Решим систему, соответствующую уравнениям (2). Получим для полинома степени 35, отображающего единичный круг на область, ограниченную заданной самопересекающейся кривой и лежащей на римановой поверхности, картину, представленную на рис. 2.

Полином, дающий отображение единичного круга на неоднолистную область с заданной границей, имеет вид

$$\begin{aligned} & -0.00164298\zeta^{35} - 0.00136456\zeta^{34} - 0.0011142\zeta^{33} - 0.00120001\zeta^{32} - \\ & - 0.00138477\zeta^{31} - 0.0011375\zeta^{30} - 0.000504466\zeta^{29} - 0.000313748\zeta^{28} - \\ & - 0.000801963\zeta^{27} - 0.00126193\zeta^{26} - 0.000746909\zeta^{25} + 0.000038404\zeta^{24} - \\ & - 0.000517881\zeta^{23} - 0.0020071\zeta^{22} - 0.00287575\zeta^{21} - 0.00138472\zeta^{20} - \\ & - 0.000646775\zeta^{19} - 0.00278893\zeta^{18} - 0.005697\zeta^{17} - 0.00624325\zeta^{16} - \\ & - 0.000982626\zeta^{15} - 0.00192618\zeta^{14} - 0.00649747\zeta^{13} - 0.0126356\zeta^{12} - \\ & - 0.00905622\zeta^{11} + 0.00769869\zeta^{10} - 0.00675355\zeta^9 - 0.0099969\zeta^8 - \\ & - 0.0398029\zeta^7 + 0.00415075\zeta^6 + 0.0478242\zeta^5 - 0.0585483\zeta^4 + \\ & + 0.0140739\zeta^3 - 0.507787\zeta^2 + 1.01976\zeta. \end{aligned}$$

Наибольшее отклонение исходной граничной кривой от границы области, полученной построенным отображением единичного круга на двулистную область, равно 0.02.

На рис. 2 видно, что образы окружностей радиусов 1 и 0.9 имеют самопересечения, а образ окружности радиуса 0.8 его не имеет.

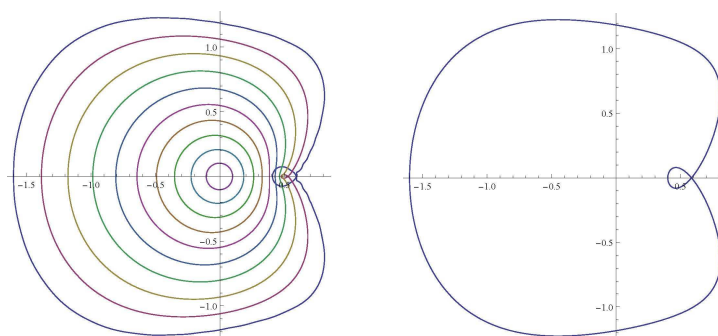


Рис. 2. Аппроксимация двулистного отображения: слева – граница неодностной области при построенном полиномиальном отображении степени 35 и образ концентрических окружностей, справа – исходная кривая

Литература

1. Conway J.B. Functions of One Complex Variable. – N. Y.; Berlin: Springer-Verlag, 1978. – XIV, 322 p. – doi: 10.1007/978-1-4612-6313-5.
2. Grassmann E. Numerical experiments with a method of successive approximation for conformal mapping // Z. Angew. Math. Phys. – 1979. – V. 30, No 6. – P. 873–884. – doi: 10.1007/BF01590486.
3. Porter R.M. An accelerated osculation method and its application to numerical conformal mapping // Complex Var. Theory Appl. – 2003. – V. 48, No 7. – P. 569–582. – doi: 10.1080/0278107031000110892.
4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. Schwarz–Christoffel Mapping. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. – XVI, 132 p. – doi: 10.1017/CBO9780511546808.
5. Driscoll T.A., Vavasis S.A. Numerical conformal mapping using cross-ratios and Delaunay triangulation // SIAM J. Sci. Comput. – 1998. – V. 19, No 6. – P. 1783–1803. – doi: 10.1137/S1064827596298580.
6. Symm G.T. An integral equation method in conformal mapping // Numer. Math. – 1966. – V. 9, No 3. – P. 250–258. – doi: 10.1007/BF02162088.
7. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis. V. 3: Discrete Fourier analysis, Cauchy integrals, construction of conformal maps, univalent functions – . N. Y.: John Wiley & Sons, 1986. – 637 p.
8. Fornberg B. A numerical method for conformal mappings // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1980. – V. 1, No 3. – P. 386–400. – doi: 10.1137/0901027.
9. Wegman R., Murid A.H.M., Nasser M.M.S. The Riemann–Hilbert problem and the generalized Neumann kernel // J. Comput. Appl. Math. – 2005. – V. 182, No 2. – P. 388–415. – doi: 10.1016/j.cam.2004.12.019.
10. Wegman R. An iterative methods for conformal mapping // J. Comput. Appl. Math. – 1986. – V. 14, No 1–2. – P. 7–18. – doi: 10.1016/0377-0427(86)90128-7.
11. Marshall D.E., Rohde S. Convergence of a variant of the zipper algorithm for conformal mapping // SIAM J. Numer. Anal. – 2007. – V. 45, No 6. – P. 2577–2609.
12. Shirokova E.A. On approximate conformal mapping of the unit disk on an simply connected domain // Russ. Math. – 2014. – V. 58, No 3. – P. 47–56. – doi: 10.3103/S1066369X14030050.

13. *Shirokova E.A., Ivanshin P.N.* Approximate conformal mappings and elasticity theory // *J. Complex Anal.* – 2016. – V. 2016. – Art. 4367205, P. 1–8. – doi: 10.1155/2016/4367205.
14. *Abzalilov D.F., Shirokova E.A.* The approximate conformal mapping onto simply and doubly connected domains // *Complex Var. Elliptic Equations.* – 2017. – V. 62, No 4. – P. 554–565. – doi: 10.1080/17476933.2016.1227978.
15. *Abzalilov D.F., Shirokova E. A.* The approximate conformal mapping onto multiply connected domains // *Probl. Anal. Issues Anal.* 2019. – V. 8, No 1. – P. 3–16. – doi: 10.15393/j3.art.2019.5050.
16. *DeLillo Th.K., Elcrat A.R.* A Fornberg-like conformal mapping method for slender regions // *J. Comput. Appl. Math.* – 1993. – V. 46, No 1–2. – P. 49–64. – doi: 10.1016/0377-0427(93)90286-K.
17. *Warschawski S.E.* On conformal mapping of variable regions // *Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser.* – 1952. – V. 18. – P. 175–187.
18. *Li B.C., Syngellakis S.* Numerical conformal mapping based on the generalised conjugation operator // *Math. Comput.* – 1998. – V. 67, No 222. – P. 619–639.
19. *Hough D.M., Papamichael N.* An integral equation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains // *Numer. Math.* – 1983. – V. 41, No 3. – P. 287–307. – doi: 10.1007/BF01418327.
20. *Kress R.* Inverse problem and conformal mapping // *Complex Var. Elliptic Equations.* – 2012. – V. 57, No 2–4. – P. 301–316. – doi: 10.1080/17476933.2011.605446.
21. *Gakhov F.D.* *Boundary Value Problems.* – Pergamon, 1966. – 584 p.
22. *Tricomi F.G.* *Integral equations.* – N. Y.: Dover Publ. Inc., 1985. – 256 p.

Поступила в редакцию
13.09.17

Иваньшин Петр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *pivanshi@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 4, pp. 738–749

A Construction Method for Conformal Mapping of the Unit Disk onto a Riemann Surface

*P.N. Ivanshin**Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*E-mail: *pivanshi@yandex.ru*

Received September 13, 2017

Abstract

A construction method for approximate conformal mapping of the unit disk onto a Riemann surface (a map with a self-overlapping image) has been described. An example has been provided to illustrate the applicability of the method to conformal mapping of the unit disk onto a two-sheeted covering of the domain by a Riemann surface.

The function construction is based on the approximate solution of the second kind Fredholm integral equation by reducing it to the finite linear equation system, so the construction is easily programmable.

The necessary and sufficient condition for the function given on the closed curve to be the boundary value of some function analytic in the region on the Riemann surface bounded by the given curve is naturally somewhat different from that for one-connected and one-sheeted domains. We have applied this condition for a multiply-sheeted region.

Let $z(\zeta)$ be the function that maps the unit disk onto a multiply-sheeted region conformally. For the function $\phi(z) = \ln(\zeta(z)/z)$, we write the equations similar to that for one-connected and one-sheeted domains. Note that for our example with two-sheeted domain it is necessary to divide the right-hand side of our relations by 3 for the points on the contour sections bounding the nonunivalent region.

The solution then repeats the steps of the one-sheeted domain situation for our case.

Keywords: conformal mapping, Riemann surface, analytic function, Fredholm equation

Figure Captions

Fig. 1. The two-sheeted domain.

Fig. 2. Approximation of the two-sheeted mapping: on the left – the border of the self-overlapping domain in case of the constructed 35-degree polynomial mapping and the image of concentric circles, on the right – the source curve.

References

1. Conway J.B. *Functions of One Complex Variable*. New York, Berlin, Springer-Verlag, 1978. XIV, 322 p. doi: 10.1007/978-1-4612-6313-5.
2. Grassmann E. Numerical experiments with a method of successive approximation for conformal mapping. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1979, vol. 30, no. 6, pp. 873–884. doi: 10.1007/BF01590486.

3. Porter R.M. An accelerated osculation method and its application to numerical conformal mapping. *Complex Var. Theory Appl.*, 2003, vol. 48, no. 7, pp. 569–582. doi: 10.1080/0278107031000110892.
4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. *Schwarz–Christoffel Mapping*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2002. XVI, 132 p. doi: 10.1017/CBO9780511546808.
5. Driscoll T.A., Vavasis S.A. Numerical conformal mapping using cross-ratios and Delaunay triangulation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1998, vol. 19, no. 6, pp. 1783–1803. doi: 10.1137/S1064827596298580.
6. Symm G.T. An integral equation method in conformal mapping. *Numer. Math.*, 1966, vol. 9, no. 3, pp. 250–258. doi: 10.1007/BF02162088.
7. Henrici P. *Applied and Computational Complex Analysis*. Vol. 3: Discrete Fourier analysis, Cauchy integrals, construction of conformal maps, univalent functions. New York, John Wiley & Sons, 1986. 637 p.
8. Fornberg B. A numerical method for conformal mappings. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1980, vol. 1, no. 3, pp. 386–400. doi: 10.1137/0901027.
9. Wegman R., Murid A.H.M., Nasser M.M.S. The Riemann–Hilbert problem and the generalized Neumann kernel. *J. Comput. Appl. Math.*, 2005, vol. 182, no. 2, pp. 388–415. doi: 10.1016/j.cam.2004.12.019.
10. Wegman R. An iterative methods for conformal mapping. *J. Comput. Appl. Math.*, 1986, vol. 14, nos. 1–2, pp. 7–18. doi: 10.1016/0377-0427(86)90128-7.
11. Marshall D.E., Rohde S. Convergence of a variant of the zipper algorithm for conformal mapping. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2007, vol. 45, no. 6, pp. 2577–2609.
12. Shirokova E.A. On approximate conformal mapping of the unit disk on an simply connected domain. *Russ. Math.*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 47–56. doi: 10.3103/S1066369X14030050.
13. Shirokova E.A., Ivanshin P.N. Approximate conformal mappings and elasticity theory. *J. Complex Anal.*, 2016, vol. 2016, art. 4367205, pp. 1–8. doi: 10.1155/2016/4367205.
14. Abzalilov D.F., Shirokova E.A. The approximate conformal mapping onto simply and doubly connected domains. *Complex Var. Elliptic Equations*, 2017, vol. 62, no. 4, pp. 554–565. doi: 10.1080/17476933.2016.1227978.
15. Abzalilov D.F., Shirokova E. A. The approximate conformal mapping onto multiply connected domains. *Probl. Anal. Issues Anal.*, 2019, vol. 8, no. 1, pp. 3–16. doi: 10.15393/j3.art.2019.5050.
16. DeLillo Th.K., Elcrat A.R. A Fornberg-like conformal mapping method for slender regions. *J. Comput. Appl. Math.*, 1993, vol. 46, nos. 1–2, pp. 49–64. doi: 10.1016/0377-0427(93)90286-K.
17. Warschawski S.E. On conformal mapping of variable regions. *Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser.*, 1952, vol. 18, pp. 175–187.
18. Li B.C., Syngellakis S. Numerical conformal mapping based on the generalised conjugation operator. *Math. Comput.*, 1998, vol. 67, no. 222, pp. 619–639.
19. Hough D.M., Papamichael N. An integral equation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains. *Numer. Math.*, 1983, vol. 41, no. 3, pp. 287–307. doi: 10.1007/BF01418327.
20. Kress R. Inverse problem and conformal mapping. *Complex Var. Elliptic Equations*, 2012, vol. 57, nos. 2–4, pp. 301–316. doi: 10.1080/17476933.2011.605446.

-
21. Gakhov F.D. *Boundary Value Problems*. Pergamon, 1966. 584 p.
22. Tricomi F.G. *Integral Equations*. New York, Dover Publ. Inc., 1985. 256 p.
-

⟨ **Для цитирования:** Иваньшин П.Н. Метод построения конформного отображения единичного круга на риманову поверхность // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 738–749. ⟩

⟨ **For citation:** Ivanshin P.N. A construction method for conformal mapping of the unit disk onto a Riemann surface. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 738–749. (In Russian) ⟩