УДК 519.21

ДИХОТОМИЯ ДЛЯ КЛАССА КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С.Г. Халиуллин

Аннотация

Понятие контигуальности последовательностей вероятностных мер впервые ввел Л. Ле Кам в своих исследованиях по математической статистике для решения задачи различения близких гипотез. В данной статье это понятие обобщается на случайные последовательности, для которых доказаны теоремы о дихотомии.

Ключевые слова: контигуальность последовательностей вероятностных мер, квазистационарные случайные последовательности, дихотомия.

Введение

В статистических задачах типа задачи различения близких гипотез часто требуется предсказать взаимное асимптотическое поведение двух последовательностей конечномерных распределений. В качестве некоторого критерия их «близости» может служить контигуальность. Понятия контигуальности и полной асимптотической разделимости пары последовательностей вероятностных мер являются естественными обобщениями понятий эквивалентности и сингулярности пары вероятностных мер (см. Ле Кам [1], Р.Ш. Липцер, Ф. Пукельшейм, А.Н. Ширяев [2]).

Говорят, что для класса $\mathcal{M}$ вероятностных мер (последовательностей вероятностных мер) выполнено условие дихотомии, если любые две меры (соответственно последовательности мер) класса $\mathcal{M}$ либо эквивалентны, либо сингулярны (соответственно, либо контигуальны, либо вполне асимптотически разделимы).

После выхода в свет известной теоремы Какутани об эквивалентности и сингулярности продакт-мер (см. [3]) были получены различные обобщения этого результата (см. Фельдман [4], Гаек [5], Ферник [6], Кантер [7], Оказаки [8]). Самый общий результат в этой области получен автором в работе [9] для квазиинвариантных эргодических вероятностных мер на линейном пространстве с измеримым сдвигом. Он легко обобщается на класс квазиинвариантных эргодических относительно некоторого преобразования мер, заданных на произвольном вероятностном пространстве. Оказывается, что таким преобразованием служит преобразование сдвига относительно квазистационарной случайной последовательности. Понятие квазистационарной случайной последовательности, являющейся естественным обобщением стационарных последовательностей, вводится и изучается в настоящей работе. Для них получен закон «нуля или единицы» и теоремы о дихотомии.

С последними результатами тесно связаны теоремы о дихотомии для классов последовательностей вероятностных мер. В этом направлении имеется ряд работ, полученных разными авторами: Р.Ш. Липцер, Ф. Пукельшейм, А.Н. Ширяев [2], Холл, Лойнес [10], Иглсон [11], В. Тэлен [12], Д.Х. Муштари, С.Г. Халиуллин [13], С.Г. Халиуллин [14].

1. Квазистационарность и дихотомия

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – произвольное вероятностное пространство, причем Ω – линейное пространство либо аддитивная группа, σ-алгебра $\mathcal{A}$ инвариантна относительно сдвигов на элементы $\omega \in \Omega$, $H \subset \Omega$.

Определение 1. (см., например, [8]). Вероятностная мера $\mathbf{P}$ называется:

(i) H-квазиинвариантной, если меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_\omega$ эквивалентны для всех $\omega \in H$, где $\mathbf{P}_\omega(A) = \mathbf{P}(A - \omega)$, $A \in \mathcal{A}$;

(ii) H-эргодической, если она H-квазиинвариантна и для всех $A \in \mathcal{A}$, $0 < \mathbf{P}(A) < 1$, существует такое $\omega_0 \in H$, что $\mathbf{P}(A\Delta(A - \omega_0)) > 0$.

Теорема 1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ – произвольное измеримое пространство, причем Ω – линейное пространство либо аддитивная группа, σ-алгебра $\mathcal{A}$ инвариантна относительно сдвигов на элементы $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ – две H-эргодические вероятностные меры на $\mathcal{A}$, $H \subset \Omega$. Тогда меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ либо эквивалентны, либо сингулярны.*

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [9] для случаев, когда H – либо линейное подпространство, либо аддитивная подгруппа Ω.

Пусть далее $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – произвольное вероятностное пространство, T – измеримое отображение пространства Ω в себя, то есть для любого $A \in \mathcal{A}$

$$T^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : T\omega \in A\} \in \mathcal{A}.$$

Определение 2. Вероятностную меру $\mathbf{P}$ назовем:

(i) квазиинвариантной относительно преобразования T, если меры $\mathbf{P}$ и $T \cdot \mathbf{P}$ эквивалентны, где $T \cdot \mathbf{P}$ означает образ меры $\mathbf{P}$ при отображении T;

(ii) эргодической относительно преобразования T, если она квазиинвариантна относительно T, и из того, что

$$\mathbf{P}(A\Delta T^{-1}A) = 0$$

для некоторого $A \in \mathcal{A}$, следует, что $\mathbf{P}(A)$ равна либо нулю, либо единице.

Отображение T при этом будем называть квзиинвариантным (эргодическим) относительно меры $\mathbf{P}$.

Теорема 2. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ – произвольное измеримое пространство, T – измеримое отображение пространства Ω в себя, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ - эргодические относительно преобразования T вероятностные меры на $\mathcal{A}$. Тогда меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ либо эквивалентны, либо сингулярны.*

Доказательство теоремы 2 основано на следующих очевидных леммах.

Пусть $(E, \mathcal{E})$ – некоторое измеримое пространство, μ и ν – две вероятностные меры на $(E, \mathcal{E})$. Пусть далее λ – произвольная вероятностная мера, относительно которой меры μ и ν являются абсолютно непрерывными. Обозначим

$$S_\mu = \left\{x \in E : \frac{d\mu}{d\lambda}(x) > 0\right\}, \quad S_\nu = \left\{x \in E : \frac{d\nu}{d\lambda}(x) > 0\right\},$$

где $\frac{d\mu}{d\lambda}(x)$ и $\frac{d\nu}{d\lambda}(x)$ означают производные Радона – Никодима соответственно мер μ и ν относительно меры λ.

Лемма 1. i) *Для эквивалентности мер μ и ν необходимо и достаточно, чтобы $S_\mu = S_\nu$ λ-почти наверное.*

ii) *Для сингулярности мер μ и ν необходимо и достаточно, чтобы $S_\mu \cap S_\nu = \emptyset$ λ-почти наверное.*

Лемма 2. *Следующие условия эквивалентны:*
i) *μ – квазиинвариантная относительно преобразования T мера на $(E, \mathcal{E})$;*
ii) *$T^{-1}S_\mu = S_\mu$ λ-почти наверное.*

Доказательство. Предположим противное, то есть пусть меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ неэквивалентны и несингулярны. Пусть $\lambda = (\mathbf{P} + \mathbf{Q})/2$. Обозначим $S = S_\mathbf{P} \cap S_\mathbf{Q}$. Тогда по лемме 1 имеем: $S \neq S_\mathbf{P}$, $S \neq S_\mathbf{Q}$, $S \neq \emptyset$ λ-почти наверное. Покажем, что тогда $T^{-1}S = S$ λ-почти наверное. Это сразу следует из того, что $T^{-1}S = (T^{-1}S_\mathbf{P}) \cap (T^{-1}S_\mathbf{Q})$ и леммы 1. Значит, $\lambda(S\Delta(T^{-1}S)) = 0$. Так как мера $\mathbf{P}$ абсолютно непрерывна относительно меры λ, то $\mathbf{P}(S\Delta T^{-1}S) = 0$, что противоречит эргодичности меры $\mathbf{P}$ относительно преобразования T. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Пусть далее $\xi = (\xi_k)_{k=1}^\infty$ – некоторая случайная последовательность на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, где Ω – произвольное множество, σ-алгебра $\mathcal{A}$ индуцирована последовательностью ξ, то есть $\mathcal{A} = \xi^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ – борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^\infty$.

Для последовательности

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$$

обозначим

$$s_k\xi = (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \xi_{k+3}, \dots),$$

$\mathbf{P}_\xi$ – распределение последовательности ξ в пространстве $\mathbb{R}^\infty$.

Для множества

$$A = \{\omega : \ (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \xi_3(\omega), \dots) \in B\},$$

где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, рассмотрим множество

$$s_k^{-1}A = \{\omega : \ (\xi_{k+1}(\omega), \xi_{k+2}(\omega), \xi_{k+3}(\omega), \dots) \in B\}.$$

Преобразование s_k^{-1} на σ-алгебре $\mathcal{A}$ называется сдвигом множества вдоль последовательности.

Определение 3. Случайную последовательность (ξ_k) назовем квазистационарной относительно меры $\mathbf{P}$, если распределения $\mathbf{P}_\xi$ и $\mathbf{P}_{s_k\xi}$ эквивалентны для всех $k \in \mathbb{N}$.

Определение 4. Случайную последовательность (ξ_k) назовем эргодической относительно меры $\mathbf{P}$, если она квазистационарна и из того, что

$$\mathbf{P}(A\Delta\ s_k^{-1}A) = 0$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, следует, что $\mathbf{P}(A)$ равна либо нулю, либо единице.

Очевидно, что преобразование сдвига относительно квазистационарной эргодической случайной последовательности является квазиинвариантным эргодическим преобразованием.

Теорема 3. *Пусть в измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ заданы две вероятностные меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, $\xi = (\xi_k)$ — случайная последовательность, эргодическая относительно мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Тогда меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ либо эквивалентны, либо сингулярны.*

Доказательство теоремы следует непосредственно из теоремы 2.

Приведем условия эргодичности случайных последовательностей. Пусть $\xi = (\xi_k)$ – такая квазистационарная последовательность на пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, что для всех $k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\ \xi_k = 0,\ \mathbb{E}\xi_k^2 = 1$. Обозначим через $\mathcal{A}_l^r$ алгебру, порожденную случайными величинами $(\xi_l, \xi_{l+1}, \ldots, \xi_r),\ l < r$. Пусть

$$\rho(n) = \sup_k \sup_{\zeta,\eta} \mathbb{E}\,\zeta\eta \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{1}$$

где второй супремум берется по всем случайным величинам ζ, измеримым относительно алгебры $\mathcal{A}_1^k$, и по всем случайным величинам η, измеримым относительно алгебры $\mathcal{A}_{k+n}^\infty$.

Из последнего условия следует, что

$$\alpha(n) = \sup_k \sup_{A \in \mathcal{A}_1^k, B \in \mathcal{A}_{k+n}^\infty} |\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \to 0 \tag{2}$$

при $n \to \infty$ (см., например, Ю.А. Розанов [15, гл. 4, § 10]).

Докажем теперь, что если выполнено условие (2), то последовательность (ξ_k) является эргодической.

Действительно, пусть $A \in \mathcal{A},\ B$ – инвариантное относительно сдвигов вдоль последовательности (ξ_k) множество. Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(B \Delta s_k^{-1} B) = 0.$$

Так как σ-алгебра $\mathcal{A}$ индуцирована последовательностью (ξ_k), то для любого $\varepsilon = \varepsilon(k)$ найдутся такие множества $A(k) \in \mathcal{A}_1^k$ и $B(k) \in \mathcal{A}_{k+n}^\infty$, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(A \Delta A(k)) < \varepsilon(k), \quad \mathbf{P}(B \Delta B(k)) < \varepsilon(k).$$

Значит, $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| < 3\varepsilon(k)$. Тогда из условия (2) следует, что при $\varepsilon(k) \to 0$

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \to 0,$$

и при $A = B$ получаем:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(B).$$

Следовательно, $\mathbf{P}(B)$ равна либо нулю, либо единице.

Пример 1. Пусть $\xi = (\xi_k)$ – гауссовская независимая случайная последовательность $\mathcal{N}(a_k, 1)$. Рассмотрим условия эквивалентности распределений $\mathbf{P}_\xi$ и $\mathbf{P}_{s_k\xi}$. Пусть π_n — отображение из $\mathbb{R}^\infty$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\pi_n\{(\omega_1, \omega_2, \cdots)\} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n),$$

Имеем для $\omega \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d(\pi_n \cdot \mathbf{P}_\xi)}{d(\pi_n \cdot \mathbf{P}_{s_k\xi})}(\omega) = \exp\left\{\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+k})\omega_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (a_i^2 - a_{i+k}^2)\right\}.$$

При $n \to \infty$ это выражение сходится $\mathbf{P}_\xi$-почти наверное тогда и только тогда, когда

$$\sup_k \sum_{i=1}^\infty (a_i^2 - a_{i+k}^2) < \infty$$

(см., например, К. Партасарати [16, гл. 6, § 48]). Таким образом, вероятности $\mathbf{P}_\xi$ и $\mathbf{P}_{s_k\xi}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено последнее условие.

Отметим, что последовательность (ξ_k) в этом случае является автоматически эргодической.

Теорема 4 (закон «нуля или единицы» для эргодических случайных последовательностей). *Пусть* $\xi = (\xi_k)$ *– квазистационарная эргодическая случайная последовательность на пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, χ_ξ *– «хвостовая» относительно последовательности* (ξ_k) σ*-алгебра. Если* $A \in \chi_\xi$, *то вероятность* $\mathbf{P}(A)$ *равна либо нулю, либо единице.*

Доказательство. Пусть $A \in \chi_\xi$ – непустое множество. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое множество $B(k) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, что

$$A = \{\omega : s_k\xi(\omega) \in B(k)\}.$$

Положим $B = \bigcap_{k=1}^\infty B(k)$. Имеем тогда

$$\{\omega : s_k\xi(\omega) \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, то есть «хвостовое» событие является инвариантным относительно сдвигов вдоль последовательности (ξ_k). Тогда из эргодичности последовательности (ξ_k) следует, что вероятность $\mathbf{P}(A)$ равна либо нулю, либо единице.

$\square$

Определение 5. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ заданы две случайные последовательности $\xi = (\xi_k)$ и $\eta = (\eta_k)$, причем σ-алгебра $\mathcal{A}$ индуцирована последовательностями ξ и η. Обозначим для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\mu_k(B) = \mathbf{P}_{s_k\xi}(B), \quad \nu_k(B) = \mathbf{P}_{s_k\eta}(B),$$

где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Случайные последовательности ξ и η назовем:

(i) контигуальными, если контигуальными являются последовательности распределений (μ_k) и (ν_k);

(ii) вполне асимптотически разделимыми, если таковыми являются последовательности распределений (μ_k) и (ν_k).

Теорема 5. *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *заданы две случайные последовательности* $\xi = (\xi_k)$ *и* $\eta = (\eta_k)$. *Если последовательности* ξ *и* η *являются эргодическими относительно вероятности* $\mathbf{P}$, *то они либо контигуальны, либо вполне асимптотически разделимы.*

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы и

$$\mu_k(A_k) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

где $A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) : s_k\xi \in A_k$. Существует такое «хвостовое» относительно последовательности ξ множество B, что

$$\mathbf{P}(B) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(A_k) = 0.$$

Допустим, что $\lim\limits_{k\to\infty} \nu_k(A_k) = \alpha$. Найдется такое «хвостовое» относительно последовательности η множество B', что

$$\mathbf{P}(B') = \lim_{k\to\infty} \nu_k(A_k) = \alpha.$$

Поскольку B' – «хвостовое» множество эргодической последовательности, то по теореме 4 предел α равен нулю или единице.

$\square$

Пример 2. Пусть $\xi = (\xi_k)$ и $\eta = (\eta_k)$ – две квазистационарные случайные последовательности, удовлетворяющие условию (1). Тогда они являются эргодическими и, следовательно, удовлетворяют условию дихотомии.

Пример 3. Укажем условия контигуальности гауссовских независимых случайных последователей. Пусть (γ_k) и (ζ_k) – гауссовские независимые последовательности $\mathcal{N}(a_k, 1)$ и $\mathcal{N}(b_k, 1)$ соответственно. Тогда они контигуальны тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 - b_k^2)$$

сходится, и вполне асимптотически разделимы тогда и только тогда, когда этот ряд расходится.

Последний результат может быть сравнен с результатами, полученными Иглсоном для гауссовских распределений возрастающей размерности (см. [11]).

Summary

S.G. Haliullin. Dichotomy for a Class of Quasistationary Random Sequences.

The concept of probability measures' sequence contiguity is introduced by Le Cam in the research on mathematical statistics for problem of distinguishing close hypotheses. In the present article, this concept is generalised on random sequences, for which theorems of a dichotomy are proved.

Key words: contiguity of sequences of probability measures, quasistationary random sequences, dichotomy.

Литература

1. *Le Cam L.* Locally asymptotically normal families of distributions // Univ. Cflifornia Publ. Statist. – 1960. – V. 3. – P. 37–98.
2. *Липцер Р.Ш., Пукельшейм Ф., Ширяев А.Н.* О необходимых и достаточных условиях контигуальности и полной асимптотической разделимости вероятностных мер // Усп. матем. наук. – 1982. – Т. 37, № 6. – С. 97–124.
3. *Kakutani S.* On equivalence of infinite products measures // Ann. of Math. – 1948. – V. 49. – P. 214–224.
4. *Feldman J.* Equivalence and perpendiculary of Gaussian Processes // Pacific J. Math. – 1958. – V. 8. – P. 669–708.
5. *Hajek J.* On a property of the normal distribution of an arbitrary stochastic process // Czechoslovak Math. J. – 1958. – V. 8. – P. 610–618.
6. *Fernique X.* Comparaison de mesures gaussiennes et de mesures products // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1985. – V. 20. – P. 165–175.
7. *Kanter M.* Equivalence-singularity dichotomies for a class of ergodic measures // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1977. – V. 81. – P. 249–252.
8. *Okazaki Y.* Equivalent-singular dichotomy for quasiivariant ergodic measures // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1985. – V. 21, No 4. – P. 393–400.
9. *Халиуллин С.Г.* Дихотомия эргодических мер на линейных пространствах // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 6. – С. 942–944.
10. *Hall W., Loynes R.* On the concept of contiguity // Ann. of Probab. – 1977. – V. 5 – P. 278–282

11. *Eagleson G.K.* An exended dichotomy theorem for sequences of pairs of Gaussian measures // Ann. of Probab. – 1981. – V. 9, No 3. – P. 453–459.

12. *Thelen B.J.* Fisher information and dichotomies in equivalence/contiguity // Ann. of Probab. – 1989. – V. 17, No 4. – P. 1664–1690.

13. *Муштари Д.Х., Халиуллин С.Г.* Линейные пространства с вероятностными мерами, ультрапроизведения и контигуальность // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 4. – С. 92–95.

14. *Халиуллин С.Г.* О контигуальности и полной асимптотической разделимости случайных процессов. – Деп. ВИНИТИ. – 1992. – № 2221-В92. – 13 с.

15. *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990 – 272 с.

16. *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры. – М.: Мир, 1983. – 336 с.

Поступила в редакцию
21.10.08

Халиуллин Самигулла Гарифуллович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского государственного университета.

E-mail: *Samig.Haliullin@ksu.ru*, *samighaliullin@gmail.com*