

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ПОКРЫТИЕМ

*А.О. Ватульян<sup>1,2</sup>, С.А. Нестеров<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия*

<sup>2</sup>*Южный математический институт – филиал*

*Владикавказского научного центра РАН, г. Владикавказ, 362027, Россия*

### Аннотация

Приведена постановка однопараметрической задачи градиентной термоупругости для системы «термозащитное покрытие – подложка», которая моделируется составной полосой бесконечной длины. Решение построено с использованием интегрального преобразования Фурье по горизонтальной координате. После нахождения трансформанты температуры были определены трансформанты горизонтального и вертикального перемещений. Для нахождения трансформант перемещений использовался асимптотический метод Вишика–Люстерника с учетом наличия погранслоевых решений в окрестности границ полос. Численное обращение трансформант строилось на основе составной квадратурной Филона. Проведены вычисления перемещений, напряжений Коши и моментных напряжений. Установлено, что напряжения Коши терпят разрыв на линии сопряжения полос. Исследована зависимость скачка напряжений Коши от соотношения физических характеристик материалов покрытия и подложки, относительной толщины покрытия и масштабного параметра. Проведен анализ полученных результатов.

**Ключевые слова:** полоса, покрытие, градиентная термоупругость, напряжения Коши, моментные напряжения, пограничный слой, метод Вишика–Люстерника, скачок напряжений

### Введение

В последнее время возрос интерес к изучению напряженно-деформированного состояния (НДС) составных структур малых размеров, что связано с дальнейшим развитием миниатюризации систем микроэлектроники и высокочувствительной аппаратуры. В таких структурах, в частности в тонкослойных покрытиях, толщина покрытия может становиться соизмеримой с характерным размером микроструктуры материала. В настоящее время для моделирования механических эффектов, наблюдаемых в сверхтонких структурах, используются градиентные теории, в которых в определяющие уравнения входят параметры размерности длины.

В 60-е годы XX в. градиентная теория упругости была сформулирована в работах Тупина [1] и Миндлина [2]. В 70-е годы XX в. градиентная теория Миндлина–Тупина получила обобщение на область термоупругости [3]. Отметим, что практическое использование модели Миндлина–Тупина наталкивается на вопрос об идентификации пяти градиентных параметров. Для преодоления этой трудности Е.С. Айфантисом [4] и С.А. Лурье [5] были предложены прикладные однопараметрические модели.

В настоящее время однопараметрические градиентные модели механики применяются для уточнения НДС слоистых упругих и термоупругих тел [5–11]. Так, в [5] полученные на основе вариационного принципа уравнения градиентной термоупругости для модели межфазного слоя С.А. Лурье применяются для исследования НДС тонкослойных композитных структур в предположении об одномерности задачи. В [7] численно исследуется задача равновесия двухслойного покрытия, на верхней границе которого действует локализованная на отрезке нормальная нагрузка. Решение проводилось в рамках плоского деформированного состояния с использованием интегрального преобразования Фурье и его численного обращения. В [11] решается задача изгиба микробалки с частичным покрытием. Для исследования масштабных эффектов вводится дополнительный масштабный параметр – отношение толщины покрытия к параметру градиентности. Исследовано влияние изменения масштабного параметра на изменения распределений смещений, напряжений и нейтральной линии. Установлено, что градиентные эффекты играют важную роль, когда масштабный параметр меньше единицы.

В настоящей работе в рамках однопараметрической градиентной модели термоупругости [12] рассмотрена задача равновесия полосы с покрытием, когда на верхней границе покрытия, свободного от напряжений, действует локализованный на отрезке тепловой поток. После применения преобразования Фурье найдено распределение трансформанты температуры. Затем на основе асимптотического метода Вишика – Люстерника получены упрощенные аналитические выражения для трансформант горизонтального и вертикального перемещений. Обращение трансформант осуществлено путем применения составной формулы Филона. На конкретных примерах проведены вычисления перемещений, напряжений Коши и моментных напряжений. Проведен анализ полученных результатов.

### 1. Определяющие соотношения градиентной механики Айфантиса

В градиентной теории упругости плотность энергии деформации зависит не только от деформации, но и от первого градиента деформации [2]. В случае линейного изотропного материала выражение для плотности энергии деформации для однопараметрической модели Айфантиса имеет вид [4]

$$w = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + l^2 \left( \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii,k} \varepsilon_{jj,k} + \mu \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{ij,k} \right), \quad (1)$$

где  $l$  – градиентный параметр, имеющий размерность длины.

Вводятся также определяющие соотношения для компонент тензора напряжений Коши  $\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$ , тензора моментных напряжений  $m_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = l^2 \tau_{ij,k}$ , тензора полных напряжений  $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k} = (1 - l^2 \nabla^2) \tau_{ij}$ .

Математическая постановка статической задачи градиентной термоупругости состоит из уравнений равновесия, записанных в полных напряжениях

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

уравнения теплопроводности

$$(k_{ij} T_{,i})_{,j} = 0, \quad (3)$$

естественных статических граничных условий

$$m_{ijk,k} n_j n_k = r_i, \quad \tau_{ij} n_j - m_{ijk,k} n_j - (m_{ijk,k} n_k)_{,j} + (m_{ijk,k} n_j n_k)_{,s} n_s = t_i, \quad (4)$$

кинематических граничных условий

$$u_i = v_i, \quad u_{i,l}n_l = \frac{\partial v_i}{\partial n} \quad (5)$$

и тепловых граничных условий

$$T|_{S_T} = T_0, \quad q|_{S_q} = q_0. \quad (6)$$

Здесь  $T$  – температура,  $q$  – плотность теплового потока,  $t_i$ ,  $r_i$  – векторы заданных сил на поверхности тела,  $n_i$  – компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

## 2. Постановка задачи градиентной термоупругости для полосы

В качестве примера рассмотрим равновесие бесконечной термоупругой составной полосы в рамках плоской деформации ( $u_1 = u_1(x_1, x_3)$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = u_3(x_1, x_3)$ ,  $T = T(x_1, x_3)$ ). Нижняя граница полосы  $x_3 = 0$  жестко закреплена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней границе  $x_3 = h$ , свободной от напряжений, на отрезке  $x_1 \in [a, b]$  действует тепловой поток  $q(x_1, h) = q_0 f(x_1)$ , при этом остальная часть верхней границы теплоизолирована. Согласно классической постановке задачи на линии соединения покрытия и подложки  $x_3 = h_1$  должны выполняться условия сопряжения по температуре, тепловому потоку, перемещениям и напряжениям.

Для упрощения расчетов примем градиентный параметр одинаковым для покрытия и подложки, то есть  $l_1 = l_2 = l$ . Так как уравнения равновесия в градиентной теории имеют более высокий порядок дифференциальных уравнений по сравнению с классической теорией, требуется задать дополнительные граничные условия и условия сопряжения [13]. В качестве дополнительных условий примем, согласно [7]: 1) на нижней границе  $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, 0) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, 0) = 0$ ; 2) на верхней границе  $m_{133}(x_1, h) = l^2 \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}(x_1, h) = 0$ ,  $m_{333}(x_1, h) = l^2 \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}(x_1, h) = 0$ ; 3) на линии соединения полос  $x_3 = h_1$  условия сопряжения по градиентам перемещений  $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$ ,  $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$  и моментным напряжениям  $m_{133}$ ,  $m_{333}$ . Материал покрытия и подложки принимается однородным. В дальнейшем в формулах будем обозначать индексами “1” и “2” функции и параметры, соответствующие подложке и покрытию. Постановка задачи для полосы с покрытием имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(i)}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{31}^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(i)}}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2, \quad x_1 \in (-\infty, \infty), \quad x_3 \in [0, h], \quad (7)$$

$$\sigma_{kl}^{(i)} = (1 - l^2 \nabla^2) \tau_{kl}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\tau_{11}^{(i)} = (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1} + \lambda_i \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_3} - \gamma_i T_i, \quad \tau_{13}^{(i)} = \mu_i \left( \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_1} \right), \quad (9)$$

$$\tau_{33}^{(i)} = (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x_3} + \lambda_i \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1} - \gamma_i T_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_3^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad x_1 \in (-\infty, \infty), \quad x_3 \in [0, h], \quad (11)$$

$$T_1(x_1, 0) = 0, \quad q(x_1, h) = q_0 f(x_1), \quad x_1 \in [a, b], \quad \frac{\partial T_2}{\partial x_3}(x_1, h) = 0, \quad x_1 \notin [a, b], \quad (12)$$

$$T_1(x_1, h_1) = T_2(x_1, h_1), \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_3}(x_1, h_1) = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x_3}(x_1, h_1), \quad x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (13)$$

$$u_1^{(1)}(x_1, 0) = u_3^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3}(x_1, 0) = \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (14)$$

$$\sigma_{13}^{(2)}(x_1, h) = \sigma_{33}^{(2)}(x_1, h) = 0, \quad m_{133}^{(2)}(x_1, h) = m_{333}^{(2)}(x_1, h) = 0, \quad x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (15)$$

$$u_1^{(1)}(x_1, h_1) = u_1^{(2)}(x_1, h_1), \quad u_3^{(1)}(x_1, h_1) = u_3^{(2)}(x_1, h_1),$$

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3}(x_1, h_1) = \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_3}(x_1, h_1), \quad \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3}(x_1, h_1) = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_3}(x_1, h_1),$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, h_1) = \sigma_{13}^{(2)}(x_1, h_1), \quad \sigma_{33}^{(1)}(x_1, h_1) = \sigma_{33}^{(2)}(x_1, h_1),$$

$$m_{133}^{(1)}(x_1, h_1) = m_{133}^{(2)}(x_1, h_1), \quad m_{333}^{(1)}(x_1, h_1) = m_{333}^{(2)}(x_1, h_1), \quad x_1 \in (-\infty, \infty). \quad (16)$$

Введем безразмерные переменные для задачи (7)–(16) согласно формулам:

$$\xi_i = \frac{x_i}{h}, \quad U_s^{(i)} = \frac{u_s^{(i)}}{h}, \quad \Omega_{kl}^{(i)} = \frac{\sigma_{kl}^{(i)}}{\mu_0}, \quad S_{kl}^{(i)} = \frac{\tau_{kl}^{(i)}}{\mu_0}, \quad M_{skl}^{(i)} = \frac{m_{skl}^{(i)}}{\mu_0 h}, \quad W_i = \frac{k_0 T_i}{q_0 h},$$

$$Q = \frac{q}{q_0}, \quad \bar{k}_i = \frac{k_i}{k_0}, \quad \bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\mu_0}, \quad \bar{\mu}_i = \frac{\mu_i}{\mu_0}, \quad \bar{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1}{h},$$

$$\beta = \frac{q_0 h \gamma_0}{k_0 \mu_0}, \quad \alpha = \frac{l}{h}, \quad \bar{a} = \frac{a}{h}, \quad \bar{b} = \frac{b}{h},$$

$$k_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} k(x_3), \quad \mu_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \mu(x_3), \quad \gamma_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \gamma(x_3), \quad i = 1, 2.$$

Тогда в безразмерном виде задача (7)–(16) примет вид

$$\frac{\partial \Omega_{11}^{(i)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega_{13}^{(i)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{31}^{(i)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega_{33}^{(i)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \xi_1 \in (-\infty, \infty), \quad \xi_3 \in [0, 1], \quad (17)$$

$$\Omega_{kl}^{(i)} = (1 - \alpha^2 \nabla^2) S_{kl}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

$$S_{11}^{(i)} = (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \xi_1} + \bar{\lambda}_i \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \xi_3} - \beta \bar{\gamma}_i W_i, \quad S_{13}^{(i)} = \bar{\mu}_i \left( \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \xi_1} \right), \quad (19)$$

$$S_{33}^{(i)} = (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \xi_3} + \bar{\lambda}_i \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \xi_1} - \beta \bar{\gamma}_i W_i, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi_3^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

$$W_1(\xi_1, 0) = 0, \quad -\bar{k}_2 \frac{\partial W_2}{\partial \xi_3}(\xi_1, 1) = f(\xi_1), \quad \xi_1 \in [\bar{a}, \bar{b}],$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \xi_3}(\xi_1, 1) = 0, \quad \xi_1 \notin [\bar{a}, \bar{b}], \quad (22)$$

$$W_1(\xi_1, \bar{h}_1) = W_2(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \bar{k}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1) = \bar{k}_2 \frac{\partial W_2}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \xi_1 \in (-\infty, \infty), \quad (23)$$

$$U_1^{(1)}(\xi_1, 0) = U_3^{(1)}(\xi_1, 0) = \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, 0) = \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, 0) = 0, \quad \xi_1 \in (-\infty, \infty), \quad (24)$$

$$\Omega_{31}^{(2)}(\xi_1, 1) = \Omega_{33}^{(2)}(\xi_1, 1) = M_{133}^{(2)}(\xi_1, 1) = M_{333}^{(2)}(\xi_1, 1) = 0, \quad \xi_1 \in (-\infty, \infty), \quad (25)$$

$$U_1^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = U_1^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad U_3^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = U_3^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1),$$

$$\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1) = \frac{\partial U_1^{(2)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1) = \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial \xi_3}(\xi_1, \bar{h}_1),$$

$$\Omega_{33}^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = \Omega_{33}^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \Omega_{13}^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = \Omega_{13}^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1),$$

$$M_{133}^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = M_{133}^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad M_{333}^{(1)}(\xi_1, \bar{h}_1) = M_{333}^{(2)}(\xi_1, \bar{h}_1), \quad \xi_1 \in (-\infty, \infty). \quad (26)$$

Для решения задачи (17)–(26) воспользуемся интегральным преобразованием Фурье по координате  $\xi_1$ :

$$\widehat{F}(\omega, \xi_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1, \xi_3) e^{i\omega \xi_1} d\xi_1, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_1} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \rightarrow -\omega^2. \quad (27)$$

Здесь  $\omega$  – параметр преобразования Фурье.

Интегральное преобразование Фурье позволяет свести систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Применив преобразование Фурье (27) к уравнениям (17)–(26), после некоторых преобразований получим в трансформантах Фурье задачу термоупругости в перемещениях

$$-\alpha^2 \bar{\mu}_i \widehat{U}_1^{IV(i)} + (\bar{\mu}_i(1 + \alpha^2 \omega^2) + (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)\alpha^2 \omega^2) \widehat{U}_1''^{(i)} - \omega^2 (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)(1 + \alpha^2 \omega^2) \widehat{U}_1^{(i)} + i\omega(\alpha^2(\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) \widehat{U}_3'''^{(i)} - ((\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) + \alpha^2 \omega^2(\bar{\lambda}_i - \bar{\mu}_i)) \widehat{U}_3'^{(i)}) = -i\omega \beta \bar{\gamma}_i \widehat{W}_i, \quad (28)$$

$$i\alpha^2 \omega (\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) \widehat{U}_1'''^{(i)} - i\omega((\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) + \alpha^2 \omega^2 \bar{\lambda}_i) \widehat{U}_1'^{(i)} - \alpha^2 (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \widehat{U}_3^{IV(i)} + + ((\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)(1 + \alpha^2 \omega^2) + \bar{\mu}_i \alpha^2 \omega^2) \widehat{U}_3''^{(i)} - \bar{\mu}_i \omega^2 (1 + \alpha^2 \omega^2) \widehat{U}_3^{(i)} = \beta \bar{\gamma}_i \widehat{W}_i', \quad (29)$$

$$-\omega^2 \widehat{W}_i + \widehat{W}_i'' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (30)$$

$$\widehat{W}_1(\omega, 0) = 0, \quad -\bar{k}_2 \widehat{W}_2'(\omega, 1) = \widehat{f}(\omega), \quad (31)$$

$$\widehat{W}_1(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{W}_2(\omega, \bar{h}_1), \quad \bar{k}_1 \widehat{W}_1'(\omega, \bar{h}_1) = \bar{k}_2 \widehat{W}_2'(\omega, \bar{h}_1), \quad (32)$$

$$\widehat{U}_1^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{U}_3^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{U}_1'^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{U}_3'^{(1)}(\omega, 0) = 0, \quad (33)$$

$$\widehat{\Omega}_{13}^{(2)}(\omega, 1) = \widehat{\Omega}_{33}^{(2)}(\omega, 1) = \widehat{M}_{133}^{(2)}(\omega, 1) = \widehat{M}_{333}^{(2)}(\omega, 1) = 0, \quad (34)$$

$$\widehat{U}_1^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{U}_1^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{U}_3^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{U}_3^{(2)}(\omega, \bar{h}_1),$$

$$\widehat{U}_1'^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{U}_1'^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{U}_3'^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{U}_3'^{(2)}(\omega, \bar{h}_1),$$

$$\widehat{\Omega}_{33}^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{\Omega}_{33}^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{\Omega}_{13}^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{\Omega}_{13}^{(2)}(\omega, \bar{h}_1),$$

$$\widehat{M}_{133}^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{M}_{133}^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{M}_{333}^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{M}_{333}^{(2)}(\omega, \bar{h}_1). \quad (35)$$

Здесь штрихом обозначается производная по координате  $\xi_3$ .

Выражения для трансформант моментных напряжений и полных напряжений в трансформантах перемещений в безразмерном виде имеют вид

$$\begin{aligned}\widehat{M}_{133}^{(i)} &= \alpha^2(\widehat{U}'_1{}^{(i)} - i\omega\widehat{U}'_3{}^{(i)}), \quad \widehat{M}_{333}^{(i)} = \alpha^2((\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)\widehat{U}''_3{}^{(i)} - i\omega\bar{\lambda}_i\widehat{U}'_1{}^{(i)} - \beta\bar{\gamma}_i\widehat{W}'_i), \\ \widehat{\Omega}_{13} &= -\alpha^2\bar{\mu}_i\widehat{U}'''_1{}^{(i)} + \alpha^2\bar{\mu}_i i\omega\widehat{U}''_3{}^{(i)} + (1 + \alpha^2\omega^2)\bar{\mu}_i\widehat{U}'_1{}^{(i)} - (1 + \alpha^2\omega^2)\bar{\mu}_i i\omega\widehat{U}'_3{}^{(i)}, \\ \widehat{\Omega}_{33} &= -\alpha^2(\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)\widehat{U}'''_3{}^{(i)} + \alpha^2\bar{\lambda}_i i\omega\widehat{U}''_1{}^{(i)} + (1 + \alpha^2\omega^2)(\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)\widehat{U}'_3{}^{(i)} - \\ &\quad - (1 + \alpha^2\omega^2)\bar{\lambda}_i i\omega\widehat{U}'_1{}^{(i)} - (1 + \alpha^2\omega^2)\beta\bar{\gamma}_i\widehat{W}'_i, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

### 3. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы

Решение задачи несвязанной термоупругости (28)–(35) начинается с нахождения распределения трансформанты температуры на основе решения классической задачи теплопроводности в трансформантах (30)–(32). Выражения для трансформант температуры подложки и покрытия имеют соответственно вид

$$\widehat{W}_1(\omega, \xi_3) = D_1(\omega)(e^{\omega\xi_3} - e^{-\omega\xi_3}), \quad \widehat{W}_2(\omega, \xi_3) = D_2(\omega)e^{\omega\xi_3} + D_3(\omega)e^{-\omega\xi_3},$$

где неизвестные  $D_1(\omega)$ ,  $D_2(\omega)$ ,  $D_3(\omega)$  находят из граничных условий (31), (32).

После нахождения трансформанты температуры определим трансформанты перемещений  $\widehat{U}_s^{(i)}(\omega, \xi_3)$ , которые, согласно Айфантису [4], можно представить в виде суммы решения задачи в перемещениях в классической постановке  $\widehat{G}_s^{(i)}(\omega, \xi_3)$  и дополнительных градиентных слагаемых  $\widehat{B}_s^{(i)}(\omega, \xi_3)$ , то есть  $\widehat{U}_s^{(i)}(\omega, \xi_3) = \widehat{G}_s^{(i)}(\omega, \xi_3) + \widehat{B}_s^{(i)}(\omega, \xi_3)$ ,  $s = 1, 3$ ,  $i = 1, 2$ .

Для получения классической постановки задачи, положив в (28), (29), (33)–(35)  $\alpha = 0$ , имеем

$$\bar{\mu}_i\widehat{G}'_1{}^{(i)} - (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)\omega^2\widehat{G}_1^{(i)} - i\omega(\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i)\widehat{G}'_3{}^{(i)} = -i\omega\beta\bar{\gamma}_i\widehat{W}'_i, \quad i = 1, 2, \quad (36)$$

$$-i\omega(\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i)\widehat{G}'_1{}^{(i)} + (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i)\widehat{G}''_3{}^{(i)} - \bar{\mu}_i\omega^2\widehat{G}_3^{(i)} = \beta\bar{\gamma}_i\widehat{W}'_i, \quad i = 1, 2, \quad (37)$$

$$\widehat{G}_1^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{G}_3^{(1)}(\omega, 0) = 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned}\widehat{G}'_1{}^{(2)}(\omega, 1) - i\omega\widehat{G}_3^{(2)}(\omega, 1) = 0, \quad (\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2)\widehat{G}'_3{}^{(2)}(\omega, 1) - \\ - \bar{\lambda}_2 i\omega\widehat{G}_1^{(2)}(\omega, 1) - \beta\bar{\gamma}_2\widehat{W}_2(\omega, 1) = 0, \quad (39)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{G}_1^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{G}_1^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \quad \widehat{G}_3^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) = \widehat{G}_3^{(2)}(\omega, \bar{h}_1), \\ \bar{\mu}_1(\widehat{G}'_1{}^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) - i\omega\widehat{G}_3^{(1)}(\omega, \bar{h}_1)) = \bar{\mu}_2(\widehat{G}'_1{}^{(2)}(\omega, \bar{h}_1) - i\omega\widehat{G}_3^{(2)}(\omega, \bar{h}_1)), \\ (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)\widehat{G}_3^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) - \bar{\lambda}_1 i\omega\widehat{G}_1^{(1)}(\omega, \bar{h}_1) - \beta\bar{\gamma}_1\widehat{W}_1(\omega, \bar{h}_1) = \\ = (\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2)\widehat{G}_3^{(2)}(\omega, \bar{h}_1) - \bar{\lambda}_2 i\omega\widehat{G}_1^{(2)}(\omega, \bar{h}_1) - \beta\bar{\gamma}_2\widehat{W}_2(\omega, \bar{h}_1). \quad (40)\end{aligned}$$

Решение задачи классической термоупругости (36)–(40), согласно [14, 15], состоит из двух этапов. На первом этапе при известном температурном поле находят частные решения неоднородной задачи (36)–(40). Для нахождения частного решения (36)–(40), согласно [14], вводятся трансформанты термоупругого потенциала  $\widehat{\phi}_i$ ,  $i = 1, 2$ , которые методом вариации произвольных постоянных определяются из решения дифференциальных уравнений

$$\widehat{\phi}_i'' - \omega^2 \widehat{\phi}_i = \frac{\bar{\gamma}_i}{\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i} \widehat{W}_i, \quad i = 1, 2. \quad (41)$$

Трансформанты перемещений, согласно [14], находят по формулам  $\bar{G}_1^{(i)} = -i\omega \widehat{\phi}_i$ ,  $\bar{G}_3^{(i)} = \widehat{\phi}_i'$ ,  $i = 1, 2$ , которые, вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям и условиям сопряжения (38)–(40).

На втором этапе на решения, найденные на первом этапе  $\bar{G}_s^{(i)}$ ,  $s = 1, 3$ ,  $i = 1, 2$ , накладываются решения соответствующей краевой задачи изотермической теории упругости

$$\bar{\mu}_i \bar{G}_1''^{(i)} - (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \omega^2 \bar{G}_1^{(i)} - i\omega(\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) \bar{G}_3'^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (42)$$

$$-i\omega(\bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i) \bar{G}_1'^{(i)} + (\bar{\lambda}_i + 2\bar{\mu}_i) \bar{G}_3''^{(i)} - \bar{\mu}_i \omega^2 \bar{G}_3^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (43)$$

Составляются выражения  $\widehat{G}_s^{(i)} = \bar{G}_s^{(i)} + \bar{G}_s'^{(i)}$ ,  $s = 1, 3$ ,  $i = 1, 2$ . Неизвестные константы интегрирования, полученные в ходе решения уравнений (42), (43), находятся путем удовлетворения граничных условий (38), (39) и условий сопряжения (40).

После нахождения трансформант перемещений  $\widehat{G}_s^{(i)}$  определяются градиентные слагаемые. Поскольку задача (28)–(35) является сингулярно возмущенной, согласно методу Вишика–Люстерника введем в рассмотрение растягивающие координаты в окрестности границ: 1) для подложки  $\eta_1 = \xi_3/\alpha$ ,  $\eta_2 = (\xi_3 - \bar{h}_1)/\alpha$ ; 2) для покрытия  $\eta_3 = (\bar{h}_1 - \xi_3)/\alpha$ ,  $\eta_4 = (\xi_3 - 1)/\alpha$ . Это позволяет при построении соответствующих уравнений погранслоя избежать появления малого параметра при старшей производной. Тогда трансформанты градиентных слагаемых можно представить в виде

$$\widehat{B}_1^{(1)} = \widehat{g}_1(\omega, \eta_1) + \widehat{g}_2(\omega, \eta_2), \quad \widehat{B}_3^{(1)} = \widehat{g}_3(\omega, \eta_1) + \widehat{g}_4(\omega, \eta_2), \quad (44)$$

$$\widehat{B}_1^{(2)} = \widehat{g}_5(\omega, \eta_3) + \widehat{g}_6(\omega, \eta_4), \quad \widehat{B}_3^{(2)} = \widehat{g}_7(\omega, \eta_3) + \widehat{g}_8(\omega, \eta_4). \quad (45)$$

Здесь  $\widehat{g}_1, \dots, \widehat{g}_8$  есть погранслойные решения.

Рассмотрим подробно нахождение первой пары погранслойных решений  $\widehat{g}_1$ ,  $\widehat{g}_3$ . На первом этапе, как и для классического решения, определяется трансформанта термоупругого потенциала перемещений  $\widehat{\psi}_1$  как частное решение неоднородного уравнения:

$$\widehat{\psi}_1^{IV} - (1 + 2\alpha^2\omega^2) \widehat{\psi}_1'' + \alpha^2\omega^2(1 + \alpha^2\omega^2) \widehat{\psi}_1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1} (1 + \alpha^2\omega^2) \widehat{W}_1. \quad (46)$$

Трансформанты перемещений определяются по формулам  $\bar{g}_1 = -i\omega \widehat{\psi}_1$ ,  $\bar{g}_3 = \widehat{\psi}_1'$ .

На втором этапе на решения  $\bar{g}_1, \bar{g}_3$ , найденные на первом этапе, накладываются решения соответствующей системы однородных дифференциальных уравнений для функций  $\bar{g}_1, \bar{g}_3$ :

$$-\bar{\mu}_1 \bar{g}_1^{IV} + (\bar{\mu}_1(1 + \alpha^2 \omega^2) + (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)\alpha^2 \omega^2) \bar{g}_1' - \omega^2 (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1) \alpha^2 (1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{g}_1 + i\omega \alpha ((\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) \bar{g}_3''' - ((\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) + \alpha^2 \omega^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_1)) \bar{g}_3') = 0, \quad (47)$$

$$i\omega \alpha ((\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) \bar{g}_1''' - ((\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) + \alpha^2 \omega^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_1)) \bar{g}_1') - (\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1) \bar{g}_3^{IV} + ((\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)(1 + \alpha^2 \omega^2) + \bar{\mu}_1 \alpha^2 \omega^2) \bar{g}_3'' - \bar{\mu}_1 \alpha^2 \omega^2 (1 + \alpha^2 \omega^2) \bar{g}_3 = 0. \quad (48)$$

Решаем однородную систему (47), (48) на основе операторного подхода, как в [7], полагая:

$$L_{11} \bar{g}_1 + L_{12} \bar{g}_3 = 0, \quad (49)$$

$$L_{21} \bar{g}_1 + L_{22} \bar{g}_3 = 0. \quad (50)$$

Введем потенциал перемещений  $\widehat{\chi}$  такой, что  $\bar{g}_1 = L_{12} \widehat{\chi}$ ,  $\bar{g}_3 = -L_{11} \widehat{\chi}$ . Тогда уравнение равновесия (49) удовлетворяется автоматически, а уравнение (50) сводится к уравнению восьмого порядка относительно введенного потенциала

$$(L_{12}^2 - L_{11} L_{22}) \widehat{\chi} = 0. \quad (51)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее (51), имеет вид

$$(r^2 - \alpha^2 \omega^2)^2 (r^2 - 1 - \alpha^2 \omega^2)^2 = 0. \quad (52)$$

Согласно уравнению (52) потенциал  $\widehat{\chi}$  можно представить в следующей форме:

$$\widehat{\chi} = C_1 e^{\alpha|\omega|\eta_1} + C_2 \eta_1 e^{\alpha|\omega|\eta_1} + C_3 e^{-\alpha|\omega|\eta_1} + C_4 \eta_1 e^{-\alpha|\omega|\eta_1} + C_5 e^{\sqrt{1+\alpha^2 \omega^2} \eta_1} + C_6 \eta_1 e^{\sqrt{1+\alpha^2 \omega^2} \eta_1} + C_7 e^{-\sqrt{1+\alpha^2 \omega^2} \eta_1} + C_8 \eta_1 e^{-\sqrt{1+\alpha^2 \omega^2} \eta_1}. \quad (53)$$

Получим выражения  $\widehat{g}_1 = \bar{g}_1 + \bar{g}_1$ ,  $\widehat{g}_3 = \bar{g}_3 + \bar{g}_3$ . Каждая из функций  $\widehat{g}_1$  и  $\widehat{g}_3$  выражается через введенный потенциал  $\widehat{\chi}$  и поэтому содержит восемь неизвестных констант. При удовлетворении условия ограниченности решений на бесконечности остаются ненулевыми только четыре константы. Оставшиеся неизвестные константы интегрирования определяются путем удовлетворения четырех граничных условий при  $\eta_1 = 0$ :

$$\widehat{U}_1^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{G}_1^{(1)}(\omega, 0) + \widehat{g}_1(\omega, 0) = 0, \quad \widehat{U}_3^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{G}_3^{(1)}(\omega, 0) + \widehat{g}_3(\omega, 0) = 0,$$

$$\widehat{U}_1'^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{G}_1'^{(1)}(\omega, 0) + \widehat{g}_1'(\omega, 0) = 0, \quad \widehat{U}_3'^{(1)}(\omega, 0) = \widehat{G}_3'^{(1)}(\omega, 0) + \widehat{g}_3'(\omega, 0) = 0.$$

Аналогичным путем находятся и другие погранслоиные решения в трансформантах.

Для нахождения оригиналов функций необходимо применить обратное преобразование Фурье

$$F(\xi_1, \xi_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\omega, \xi_3) e^{-i\omega \xi_1} d\omega. \quad (54)$$

В силу быстрого убывания трансформант температуры и перемещений при  $|\omega| \rightarrow \infty$  можно вычислить интеграл (54) в конечных пределах  $[-R, R]$

$$F(\xi_1, \xi_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \widehat{F}(\omega, \xi_3) e^{-i\omega\xi_1} d\omega + \delta_R. \quad (55)$$

Для вычисления интеграла в выражении (55) разобьем отрезок интегрирования  $[-R, R]$  на  $m$  подотрезков  $[c, d]$ , к каждому из которых применим квадратурную формулу Филона [16, 17]:

$$\int_c^d \widehat{F}(\omega, \xi_3) e^{-i\omega\xi_1} d\omega = \frac{d-c}{2} \exp\left(-i\xi_1 \frac{c+d}{2}\right) \sum_{n=1}^3 D_n(p) \widehat{F}(\omega_n, \xi_3), \quad (56)$$

где соответственно

$$\begin{aligned} \omega_1 = c, \quad \omega_2 = \frac{c+d}{2}, \quad \omega_3 = d, \quad p = \frac{\xi_1}{2} (d-c), \\ D_1(p) = \frac{2p \cos p - \sin p(2-p^2) + i(p^2 \cos p - p \sin p)}{p^3}, \quad D_2(p) = \frac{4(\sin p - p \cos p)}{p^3}, \\ D_3(p) = \frac{2p \cos p - \sin p(2-p^2) - i(p^2 \cos p - p \sin p)}{p^3}. \end{aligned}$$

#### 4. Результаты вычислений

Рассмотрим результаты вычисления распределения по координатам  $\xi_1$  и  $\xi_3$  температуры, перемещений, напряжений Коши и моментных напряжений. Принято:  $\bar{h}_1 = 0.9$ ,  $\beta = 1$ ,  $\bar{k}_1 = 1$ ,  $\bar{k}_2 = 0.2$ ,  $f(\xi_1) = 1$ ,  $[\bar{a}, \bar{b}] = [-1, 1]$ ,  $[-R, R] = [-40, 40]$ ,  $m = 200$ .

Проведено сравнение решения, полученного на основе классической постановки ( $\alpha = 0$ ), с конечно-элементным решением, полученным в пакете FlexPDE для вытянутого прямоугольника  $S = [-5, 5] \times [0, 1]$ , с граничными условиями, совпадающими с условиями для полосы на верхней и нижней гранях и граничными условиями на боковых гранях (боковые грани свободны от напряжений и теплоизолированы). Установлено, что погрешность решения, полученного на основе классической постановки, не превосходит 1%.

Проведено сравнение распределения перемещений и напряжений Коши, полученных на основе решения задачи в классической постановке ( $\alpha = 0$ ) и на основе решения задачи в градиентной постановке ( $0 < \alpha \leq 0.05$ ). Получено, что изменение градиентного параметра  $\alpha$  незначительно влияет на распределение перемещений, но сильно – на распределение напряжений Коши и моментных напряжений.

На рис. 1–3 представлены распределения безразмерных функций температуры  $W$  (рис. 1), горизонтального перемещения  $U_1$  (рис. 2), вертикального перемещения  $U_3$  (рис. 3) по горизонтальной координате  $\xi_1$  (при  $\xi_3 = 0.95$ ) и вертикальной координате  $\xi_3$  (при  $\xi_1 = 0.1$ ) в случае  $\bar{\lambda}_1 = 1$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0.25$ ,  $\bar{\mu}_1 = 1$ ,  $\bar{\mu}_2 = 0.25$ ,  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 1$ ,  $\alpha = 0.03$ .

На рис. 4 показаны распределения безразмерных функций: нормального напряжения Коши  $S_{33}$  (рис. 4, а), касательного напряжения Коши  $S_{13}$  (рис. 4, б) по вертикальной координате  $\xi_3$  (при  $\xi_1 = 0.1$ ).

На рис. 1 видно, что температура непрерывна, в заделке  $\xi_3 = 0$  равна нулю, максимальна в области приложения тепловой нагрузки и быстро затухает до нуля по мере удаления от источника.

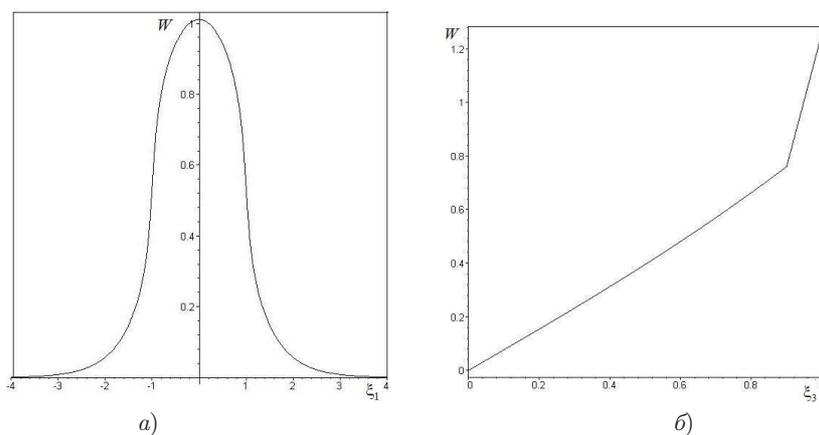


Рис. 1. Распределение безразмерной температуры  $W$  по координатам: а)  $\xi_1$ ; б)  $\xi_3$

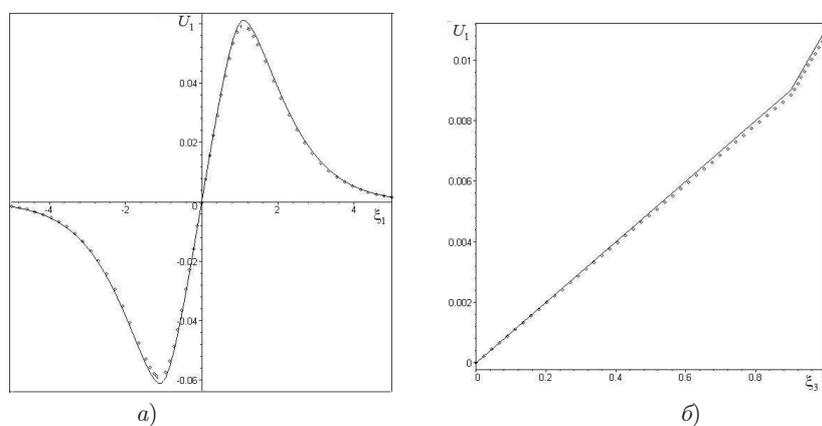


Рис. 2. Распределение безразмерного перемещения  $U_1$  по координатам: а)  $\xi_1$ ; б)  $\xi_3$

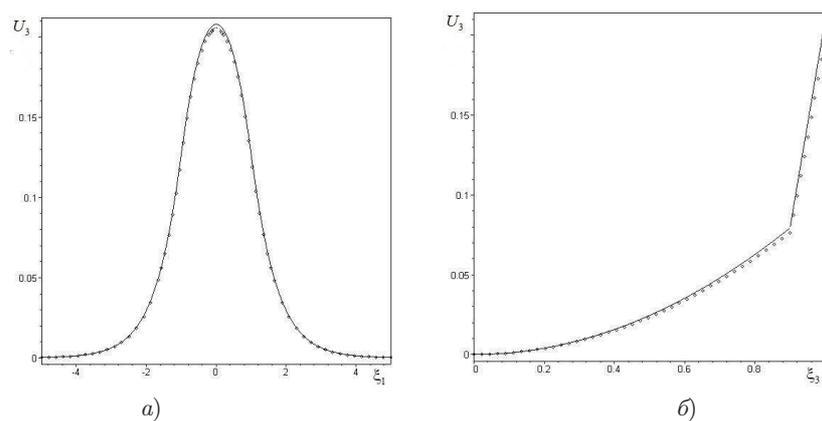


Рис. 3. Распределение безразмерного перемещения  $U_3$  по координатам: а)  $\xi_1$ ; б)  $\xi_3$

Из рис. 2, 3 следует, что перемещения непрерывны, равны нулю в заделке  $\xi_3 = 0$ , обладают определенной симметрией при распределении по координате  $\xi_1$ , затухают по мере удаления от источника.

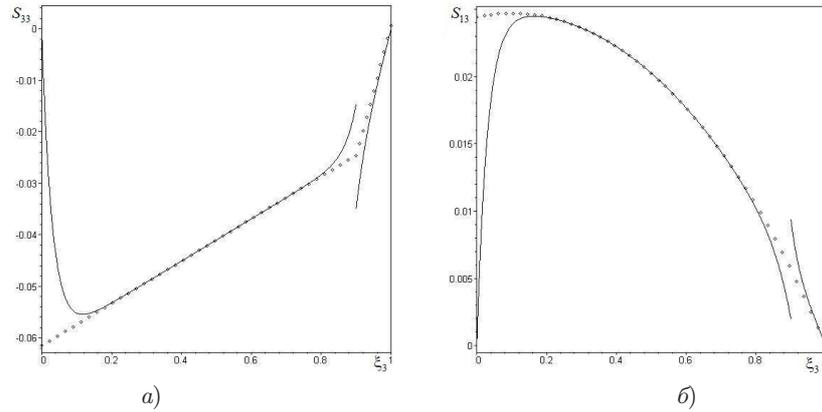


Рис. 4. Распределение безразмерных напряжений Коши по координате  $\xi_3$ : а)  $S_{33}$ ; б)  $S_{13}$

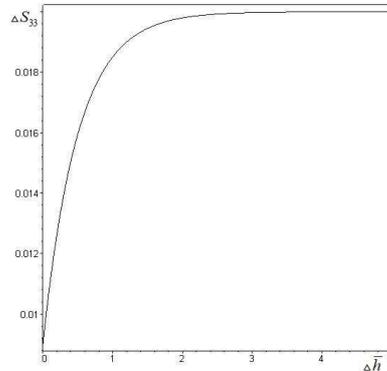


Рис. 5. Зависимость скачка напряжений Коши  $S_{33}$  от относительной толщины покрытия  $\Delta \bar{h}$

На рис. 4 видно, что вблизи заделки  $\xi_3 = 0$  напряжения Коши экспоненциально убывают до нуля в соответствии с граничными условиями (14); испытывают скачок на линии сопряжения  $\xi_3 = \bar{h}_1$ .

Исследовано влияние разности модулей термомеханических характеристик покрытия и подложки на величину скачка напряжений Коши. Установлено, что на величину скачка напряжений  $S_{13}$  из термомеханических характеристик влияет только разность модулей сдвига покрытия и подложки. На величину скачка напряжений  $S_{33}$ , кроме параметров Ламе, сильно влияет разность коэффициентов температурных напряжений покрытия и подложки.

Исследован масштабный эффект, то есть влияние относительной толщины покрытия  $\Delta \bar{h} = 1 - h_1$  на величину скачка напряжений Коши  $S_{33}$  при  $\xi_1 = 0.1$ ,  $\xi_3 = 0.95$ . В вычислениях градиентный параметр полагался постоянным  $\alpha = 0.01$ , а относительная толщина покрытия изменялась от 0 до  $10\alpha$ .

Из рис. 5 следует, что при толщинах покрытия, меньших  $2\alpha$ , скачок напряжения изменяется экспоненциально, а затем выходит на стационарное значение.

На рис. 6 представлены распределения безразмерных моментных напряжений по координате  $\xi_3$ :  $M_{333}$  (рис. 6, а) и  $M_{133}$  (рис. 6, б). Они практически равны нулю в области всюду, кроме границ и области раздела материалов, где достигают пикового значения.

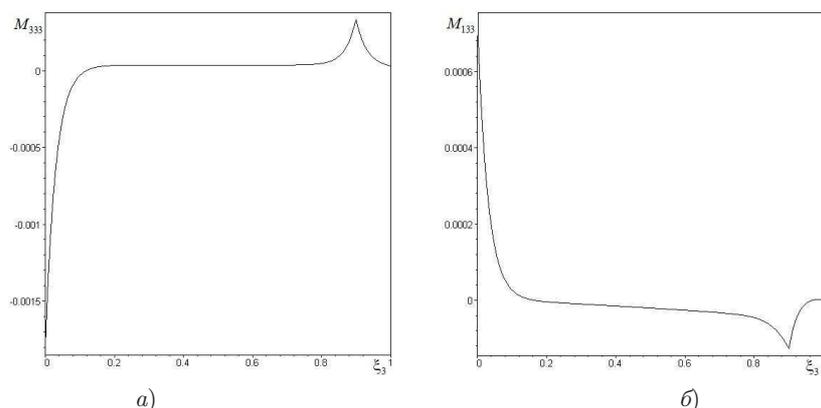


Рис. 6. Распределение безразмерных моментных напряжений по координате  $\xi_3$ : а)  $M_{333}$ ; б)  $M_{133}$

### Заключение

Приведена постановка задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием на основе однопараметрической модели Аифантиса. Сначала к уравнениям равновесия, теплопроводности и граничным условиям применялось преобразование Фурье по горизонтальной координате. После нахождения распределения трансформанты температуры из решения задачи классической теплопроводности на основе асимптотического подхода Вишика – Люстерника получены упрощенные аналитические выражения для нахождения трансформант перемещений. Обращение трансформант Фурье основано на составной квадратурной формуле Филона. Проведены вычисления перемещений, напряжений Коши и моментных напряжений. Поскольку перемещения и деформации непрерывны на линии сопряжения полос, из-за скачка термомеханических характеристик возникает и скачок напряжений Коши в окрестности линии сопряжения полос. Величина скачка напряжений Коши также зависит и от соотношения градиентного параметра и толщины покрытия. Моментные напряжения непрерывны и достигают пика на линии сопряжения материалов.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Южного математического института – филиала ВЦ РАН, г. Владикавказ.

### Литература

1. *Toupin R.A.* Elastic materials with couple stresses // *Arch. Ration. Mech. Anal.* – 1962. – V. 11. – P. 385–414. – doi: 10.1007/BF00253945.
2. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Ration. Mech. Anal.* – 1964. – V. 16. – P. 51–78. – doi: 10.1007/BF00248490.
3. *Ahmadi G., Firoozbakhsh K.* First strain gradient theory of thermoelasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1975. – V. 11, No 3. – P. 339–345.
4. *Altan B.S., Aifantis E.C.* On some aspects in the special theory of gradient elasticity // *J. Mech. Behav. Mater.* – 1997. – V. 8, No 3. – P. 231–282. – doi: 10.1515/JMBM.1997.8.3.231.
5. *Лурье С.А., Фам Т., Соляев Ю.О.* Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 440–449.

6. *Aifantis K., Askes H.* Gradient elasticity with interfaces as surfaces of discontinuity for the strain gradient // *J. Mech. Behav. Mater.* – 2007. – V. 18, No 4. – P. 283–306. – doi: 10.1515/JMBM.2007.18.4.283.
7. *Лурье С.А., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н., Кондратова Ю.Н., Волов М.И.* Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика.* – 2013. – №. 1. – С. 161–181.
8. *Zhang N.H., Meng W.L., Aifantis E.C.* Elastic bending analysis of bilayered beams containing a gradient layer by an alternative two-variable method // *Compos. Struct.* – 2011. – V. 93, No 12. – P. 3130–3139. – doi: 10.1016/j.compstruct.2011.06.019.
9. *Li A., Zhou Sh., Zhou Sh., Wang B.* A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory // *Compos. Struct.* – 2014. – V. 108. – P. 259–266. – doi: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.
10. *Li A., Zhou Sh., Zhou Sh., Wang B.* A size-dependent model for bi-layered Kirchhoff micro-plate // *Compos. Struct.* – 2014. – V. 113. – P. 272–280. – doi: 10.1016/j.compstruct.2014.03.028.
11. *Fu G., Zhou Sh., Qi L.* The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam // *Int. J. Mech. Sci.* – 2019. – V. 152. – P. 411–419. – doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037.
12. *Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R.* Strain gradient thermoelasticity of functionally graded cylinders // *Sci. Iran., Trans. B.* – 2014. – V. 21, No 4. – P. 1415–1423.
13. *Papargyri-Beskou S., Tsinopoulos S.* Lamé's strain potential method for plane gradient elasticity problems // *Arch. Appl. Mech.* – 2015. – V. 85, No 9–10. – P. 1399–1419. – doi: 10.1007/s00419-014-0964-5.
14. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
15. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
16. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
17. *Filon L.N.G.* III.–On a quadrature formula for trigonometric integrals // *Proc. R. Soc. Edinburgh.* – 1930. – V. 49. – P. 38–47.
18. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Усп. матем. наук.* – 1957. – Т. 12, № 5. – С. 3–122.

Поступила в редакцию  
20.11.2020

---

**Ватульян Александр Ованесович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича; заведующий отделом дифференциальных уравнений

Южный федеральный университет

ул. Большая Садовая, д. 105/42, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия

Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН

ул. Ватутина, д. 53, г. Владикавказ, 362025, Россия

E-mail: [aovatulyan@sfedu.ru](mailto:aovatulyan@sfedu.ru)

**Нестеров Сергей Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений

Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН

ул. Ватутина, д. 53, г. Владикавказ, 362025, Россия

E-mail: [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru)

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)  
2021, vol. 163, no. 2, pp. 181–196

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196

**Solution of the Problem  
of Gradient Thermoelasticity for a Coated Strip**

*A.O. Vatulyan<sup>a,b\*</sup>, S.A. Nesterov<sup>b\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006 Russia*

<sup>b</sup>*Southern Mathematical Institute – Branch of the Vladikavkaz Scientific Centre  
of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, 362025 Russia*

E-mail: \**aovatulyan@sfedu.ru*, \*\**1079@list.ru*

Received November 20, 2020

**Abstract**

The formulation of a one-parameter problem of gradient thermoelasticity for the “thermal protective coating – substrate” system which is modeled by a composite strip is presented. The lower boundary of the strip is rigidly clamped and maintained at zero temperature, and on the upper boundary, free of stresses, a heat flux localized over small segment acts, while the rest of the upper boundary is thermally insulated. First, the Fourier transform in the horizontal coordinate is applied to the equilibrium and heat conduction equations and the boundary conditions. After finding the temperature transformant, the transformants of horizontal and vertical displacement are determined. The Vishik–Lyusternik’s asymptotic approach is used to find the transformants of displacements, taking into account the presence of boundary layer solutions in the vicinity of the strip boundaries. The numerical inversion of the transformants is based on the compound quadrature formula of Philon. A comparison is made of the distribution of Cauchy displacements and stresses obtained on the basis of solving the problem in the classical formulation and in the gradient formulation. It is found that a change in the gradient parameter insignificantly affects the distribution of displacements, but strongly on the distribution of Cauchy stresses and moment stresses. The displacements are continuous, equal to zero in the containment, have certain symmetry when distributed along the horizontal coordinate, and attenuate with distance from the source. Near the termination, the Cauchy stresses decrease exponentially to zero in accordance with the boundary conditions, experience a jump on the mate line. Since displacements and deformations are continuous on the line of conjugation of the strips, due to the jump in thermomechanical characteristics, a Cauchy stress jump occurs in the vicinity of the line of conjugation of the strips. The magnitude of the Cauchy stress jump also depends on the ratio between the gradient parameter and the coating thickness. It is revealed that when the thickness of the coating is less than two gradient parameters, the stress jump changes exponentially and then goes to a stationary value. The moment stresses are continuous and peak at the interface of the materials.

**Keywords:** strip, coating, gradient thermoelasticity, Cauchy stresses, moment stresses, boundary layer, Vishik–Lyusternik’s method, stress jump

**Acknowledgments.** The study was supported by the Southern Mathematical Institute – Branch of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.

### Figure Captions

- Fig. 1. Distribution of dimensionless temperature  $W$  by coordinates: a)  $\xi_1$ ; b)  $\xi_3$ .
- Fig. 2. Distribution of dimensionless displacement  $U_1$  by coordinates: a)  $\xi_1$ ; b)  $\xi_3$ .
- Fig. 3. Distribution of dimensionless displacement  $U_3$  by coordinates: a)  $\xi_1$ ; b)  $\xi_3$ .
- Fig. 4. Distribution of dimensionless Cauchy stresses by coordinate  $\xi_3$ : a)  $S_{33}$ ; b)  $S_{13}$ .
- Fig. 5. Dependence of the Cauchy stress jump  $S_{33}$  on the relative thickness of the coating  $\Delta\bar{h}$ .
- Fig. 6. Distribution of dimensionless moment stresses by coordinate  $\xi_3$ : a)  $M_{333}$ ; b)  $M_{133}$ .

### References

1. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, pp. 385–414. doi: 10.1007/BF00253945.
2. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1964, vol. 16, pp. 51–78. doi: 10.1007/BF00248490.
3. Ahmadi G., Firoozbakhsh K. First strain gradient theory of thermoelasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 1975, vol. 11, no. 3, pp. 339–345.
4. Altan B.S., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *J. Mech. Behav. Mater.*, 1997, vol. 8, no. 3, pp. 231–282. doi: 10.1515/JMBM.1997.8.3.231.
5. Lurie S.A., Fam T., Solyaev Yu.O. Gradient model of thermoelasticity and its applications to the modeling of thin-layered composite structures. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 440–449. (In Russian)
6. Aifantis K., Askes H. Gradient elasticity with interfaces as surfaces of discontinuity for the strain gradient. *J. Mech. Behav. Mater.*, 2007, vol. 18, no. 4, pp. 283–306. doi: 10.1515/JMBM.2007.18.4.283.
7. Lurie S.A., Solyaev Yu.O., Rabinskii L.N., Kondratova Yu.N., Volov M.I. simulation of the stress-strain state of thin composite coatings based on solutions of the plane problem of strain-gradient elasticity for a layer. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2013, no. 1, pp. 161–181. (In Russian)
8. Zhang N.H., Meng W.L., Aifantis E.C. Elastic bending analysis of bilayered beams containing a gradient layer by an alternative two-variable method. *Compos. Struct.*, 2011, vol. 93, no. 12, pp. 3130–3139. doi: 10.1016/j.compstruct.2011.06.019.
9. Li A., Zhou Sh., Zhou Sh., Wang B. A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory *Compos. Struct.*, 2014, vol. 108, pp. 259–266. doi: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.
10. Li A., Zhou Sh., Zhou Sh., Wang B. A size-dependent model for bi-layered Kirchhoff microplate. *Compos. Struct.*, 2014, vol. 113, pp. 272–280. doi: 10.1016/j.compstruct.2014.03.028.
11. Fu G., Zhou Sh., Qi L. The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam. *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, vol. 152, pp. 411–419. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037.
12. Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R. Strain gradient thermoelasticity of functionally graded cylinders. *Sci. Iran., Trans. B*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 1415–1423.
13. Papargyri-Beskou S., Tsinopoulos S. Lamé's strain potential method for plane gradient elasticity problems. *Arch. Appl. Mech.*, 2015, vol. 85, nos. 9–10, pp. 1399–1419. doi: 10.1007/s00419-014-0964-5.
14. Boley B., Weiner J. *Teoriya temperaturnykh napryazhenii* [Theory of Thermal Stresses]. Moscow, Mir, 1964. 517 p. (In Russian)

15. Kovalenko A.D. *Termouprugost'* [Thermoelasticity]. Kiev. Yshch. Shk., 1975. 216 p. (In Russian)
16. Krylov V.I. *Priblizhennoe vyshislenie integralov* [Approximate Calculation of Integrals]. Moscow, Nauka, 1967. 500 p. (In Russian)
17. Filon L.N.G. III. On a quadrature formula for trigonometric integrals. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, 1930, vol. 49, pp. 38–47.
18. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Usp. Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122. (In Russian)

---

⟨ **Для цитирования:** Ватульян А.О., Нестеров С.А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2021. – Т. 163, кн. 2. – С. 181–196. – doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196. ⟩

⟨ **For citation:** Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Solution of the problem of gradient thermoelasticity for a coated strip. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 2, pp. 181–196. doi: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196. (In Russian) ⟩