Формальная теория истины по Крипке

Станислав Сперанский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

(Москва)

katze.tail@gmail.com

homepage.mi-ras.ru/~speranski/

Казань 2024

Диагонализация в арифметике

Мы будем работать с сигнатурой арифметики Пеано и её обогащением, содержащим спец. одноместный предикатный символ T, т.е.

$$\sigma := \{0, \mathrm{s}, +, \cdot, =, <\} \quad \text{и} \quad \sigma_T := \sigma \cup \{T\}.$$

Отныне мы будем считать, что:

- символы связок — это $\wedge$, $\vee$ и $\neg$;
- символы кванторов — $\forall$ и $\exists$.

При этом $\varphi \to \psi$ является сокращением для $\neg\varphi \vee \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ — для $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ и так далее.

Обозначим стандартную модель арифметики через $\mathfrak{N}$.

Для удобства введём обозначения:

$$\begin{aligned}
\text{Form} &:= \text{ множество всех } \sigma\text{-формул;}\\
\text{Sent} &:= \text{ множество всех } \sigma\text{-предложений;}\\
\text{Form}_T &:= \text{ ———''——— } \sigma_T\text{-формул;}\\
\text{Sent}_T &:= \text{ ———''——— } \sigma_T\text{-предложений.}
\end{aligned}$$

Зафиксируем какую-нибудь гёделеву нумерацию $\#$ для формул в σ_T, т.е. в расширенной сигнатуре. Для $\Gamma \subseteq \text{Form}_T$ положим

$$\#\Gamma \;:=\; \{\#\psi \mid \psi \in \Gamma\}.$$

Если $A \subseteq \mathbb{N}$, то через $\langle \mathfrak{N}, A\rangle$ обозначим σ_T-обогащение $\mathfrak{N}$, в котором T интерпретируется как A. Будем н $A \subseteq \mathbb{N}$ непротиворечивым, если не существует $\psi \in \text{Sent}_T$ такого, что $\{\#\psi, \#\neg\psi\} \subseteq A$.

Пусть PA — множество, состоящее из универс. замыканий σ-формул

A1. $\mathrm{s}(x) \neq 0$,

A2. $\mathrm{s}(x) = \mathrm{s}(y) \to x = y$,

A3. $x + 0 = x$,

A4. $x + \mathrm{s}(y) = \mathrm{s}(x + y)$,

A5. $x \cdot 0 = 0$,

A6. $x \cdot \mathrm{s}(y) = x \cdot y + x$,

A7. $x \not< 0$ и

A8. $x < \mathrm{s}(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$,

а также универс. замыканий всех σ-формул вида

$$\Phi(x/0) \wedge \forall x (\Phi(x/x) \to \Phi(x/\mathrm{s}(x))) \to \forall x \, \Phi,$$

которые в совокупности называются схемой аксиом индукции для σ.

Теория PA известна как арифметика Пеано.

Кроме того, обозначим через MA множество, состоящее из универс. замыканий A1–A8, а также

A9. $0 < x \vee 0 = x$ и

A10. $\mathrm{s}(x) < y \leftrightarrow (x < y \wedge \mathrm{s}(x) \neq y)$.

Теорию MA мы будем называть минимальной арифметикой.

Упражнение

A9 и A10 выводимы в PA, т.е. $[\mathrm{MA}] \subseteq [\mathrm{PA}]$.

Замечание

В литературе вместо MA нередко рассматривают теорию RA, которая задаётся универс. замыканиями A1–A8, а также σ-формулы

AR. $x \neq 0 \to \exists y\, x = \mathsf{s}(y)$;

Её называют арифметикой Робинсона. Как легко убедиться, AR выводима в PA, т.е. $[\mathrm{RA}] \subseteq [\mathrm{PA}]$. Вместе с тем известно, что

$$[\mathrm{RA}] \not\subseteq [\mathrm{MA}] \quad \text{и} \quad [\mathrm{MA}] \not\subseteq [\mathrm{RA}].$$

Это нетрудно доказать посредством построения модели MA (соответственно RA), которая не является моделью RA (MA). Так или иначе, MA и RA обе куда слабее PA. Например, в них нельзя вывести:

- транзитивность порядка;
- ассоциативность сложения или умножения.

В PA, напротив, выводимо всякое предложение элементарной теории чисел, которое вы сможете найти в стандартном учебнике.

Пусть $f :\subseteq \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_\ell, y) \in \mathrm{Form}$. Говорят, что φ представляет f в MA, если для всех $(n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathrm{dom}\, f$,

$$\mathrm{MA} \vdash \forall y \left(\varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right) \leftrightarrow y = \underline{f\left(n_1, \ldots, n_\ell\right)} \right),$$

где $\varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right)$ является сокращением для $\varphi\left(x_1/\underline{n_1}\right) \ldots \left(x_\ell/\underline{n_\ell}\right)$.

Теорема о представимости в MA *%без доказательства*

Пусть $f :\subseteq \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ вычислима. Тогда f представима в MA посредством Σ_1-формулы.

Этот результат устанавливает тесную связь между вычислимостью и выводимостью в теориях, включающих MA.

Замечание

Пусть $S \subseteq \mathbb{N}^{\ell}$ разрешимо, т.е. χ_S вычислима. В силу теоремы о представимости в MA, существует Σ_1-формула $\varphi(x_1, \ldots, x_\ell, y)$ такая, что для любых $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{MA} \vdash \forall y \left(\varphi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right) \leftrightarrow y = \underline{\chi_S\left(n_1, \ldots, n_\ell\right)} \right).$$

Как легко видеть, Σ_1-формула

$$\varphi'\left(x_1, \ldots, x_\ell\right) \;:=\; \varphi\left(x_1, \ldots, x_\ell, \underline{1}\right)$$

будет определять S в $\mathfrak{N}$. Более того, можно проверить, что для всех $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$:

- если $(n_1, \ldots, n_\ell) \in S$, то $\mathsf{MA} \vdash \varphi'\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right)$;
- если $(n_1, \ldots, n_\ell) \notin S$, то $\mathsf{MA} \vdash \neg\varphi'\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right)$.

При этом говорят, что φ' бинумерует S в MA.

Пример

Пусть *sub* — вычислимая функция из $\mathbb{N}^2$ в $\mathbb{N}$ такая, что для любых $\varphi(x) \in \mathrm{Form}$ и $n \in \mathbb{N}$,

$$sub(\#(\varphi(x)), n) \;=\; \#(\varphi(\underline{n})).$$

В силу теоремы о представимости в МА, можно найти Σ_1-формулу $\mathrm{sub}(x_1, x_2, y)$ такую, что для всех $\varphi(x) \in \mathrm{Form}$ и $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{MA} \vdash \forall y\,(\mathrm{sub}(\ulcorner \varphi(x) \urcorner, \underline{n}, y) \leftrightarrow y = \ulcorner \varphi(\underline{n}) \urcorner).$$

Мы будем писать $\varphi(sub(x_1, x_2))$ вместо $\exists y\,(\mathrm{sub}(x_1, x_2, y) \wedge \varphi(y))$.

С помощью теоремы о представимости в MA нетрудно получить

Лемма о диагонализации

Для каждой $\varphi(x) \in \mathsf{Form}$ найдётся $\psi \in \mathsf{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner),$$

где $\ulcorner \psi \urcorner$ обозначает $\underline{\# \psi}$. Кроме того, это останется верным, если мы заменим Form и Sent на Form_T и Sent_T соответственно.

В качестве простого примера её применения выступает

Теорема Тарского о неопределимости истины

$\#[\mathrm{Th}(\mathfrak{N})]$ не определимо в $\mathfrak{N}$.

Доказательство леммы.

Для данной $\varphi(x) \in \mathrm{Form}$ возьмём

$$k := \#(\varphi(sub(x,x))) \quad \text{и} \quad \psi := \varphi(sub(\underline{k},\underline{k})).$$

Тогда в MA можно вывести

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi(sub(\underline{k},\underline{k})) \\ &= \varphi(sub(\ulcorner\varphi(sub(x,x))\urcorner,\underline{k})) \\ &\leftrightarrow \varphi(\ulcorner\varphi(sub(\underline{k},\underline{k}))\urcorner) \\ &= \varphi(\ulcorner\psi\urcorner), \end{aligned}$$

где $=$ обозначает графическое равенство. $\square$

Доказательство теоремы Тарского.

Пусть множество $\#[\mathrm{Th}(\mathfrak{N})]$ определимо в $\mathfrak{N}$ посредством некоторой $\mathsf{T}(x) \in \mathsf{Form}$. Значит, для любого $\psi \in \mathsf{Sent}$,

$$\mathfrak{N} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \underbrace{\mathsf{T}\left(\underline{\#\psi}\right)}_{\mathsf{T}(\ulcorner\psi\urcorner)}.$$

В силу леммы о диагонализации, найдётся $\theta \in \mathsf{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \theta \leftrightarrow \neg\mathsf{T}(\ulcorner\theta\urcorner).$$

Поскольку $\mathfrak{N} \models \mathsf{MA}$, мы получаем:

$$\mathfrak{N} \models \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \neg\mathsf{T}(\ulcorner\theta\urcorner) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{N} \models \neg\theta$$

— противоречие. $\square$

Вариация на тему:

Теорема

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Тогда $\#[\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}, A)]$ не определимо в $\langle \mathfrak{N}, A \rangle$.

Замечание

Разумеется, можно усилить этот результат: если $\mathfrak{A}$ — σ_T-обогащение какой-нибудь модели МА, то $\#[\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A})]$ не определимо в $\mathfrak{A}$.

Понятно, что если мы хотим интерпретировать T как истинностный предикат для σ_T-предложений, то T должен допускать три значения: «истинно», «ложно» и «неопределено», где последнее, в частности, соответствует парадоксу лжеца и ему подобным утверждениям.

Bonus: Вокруг $1^{\text{ой}}$ теоремы о неполноте

Теорема о сильной неразрешимости МА

Пусть $\Gamma \subseteq \mathsf{Sent}$ непрот. и включает МА. Тогда $[\Gamma]$ неразрешимо.

Доказательство.

Пусть $\#[\Gamma]$ разрешимо. Значит, оно бинумеруемо в МА посредством некоторой $\varphi_\Gamma(x) \in \mathsf{Form}$. В частности, для любого $\psi \in \mathsf{Sent}$,

$$\Gamma \nvdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \neg\varphi_\Gamma(\ulcorner\psi\urcorner).$$

В силу леммы о диагонализации, найдётся $\theta \in \mathsf{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \theta \leftrightarrow \neg\varphi_\Gamma(\ulcorner\theta\urcorner).$$

Стало быть, $\Gamma \nvdash \theta$ равносильно $\Gamma \vdash \theta$ — противоречие. $\square$

Отсюда без труда получается

Следствие ($1^{\text{ая}}$ теорема Гёделя о неполноте, версия Россера)

Пусть $\Gamma \subseteq \mathsf{Sent}_\sigma$ непрот., перечислимо и вкл. MA. Тогда $[\Gamma]$ неполно.

Доказательство.

Ясно, что $[\Gamma]$ перечислимо. Если бы $[\Gamma]$ было ещё и полно, оно оказалось бы разрешимым — противоречие. $\square$

Замечание

Имеется другое доказательство первой теоремы о неполноте, где нет применений леммы о диагонализации. В нём используется:

- теорема о представимости в МА;
- факт существования пары непересекающихся перечислимых подмножеств $\mathbb{N}$, которые нельзя отделить никаким разрешимым множеством.

Следствие (теорема Чёрча)

$[\varnothing]_\sigma$ неразрешимо, т.е. проблема выводимости из $\varnothing$ над σ неразр.

Доказательство.

Ясно, что для любого $\psi \in \mathsf{Sent}$,

$$\mathsf{MA} \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash \bigwedge \mathsf{MA} \to \psi.$$

Стало быть, неразрешимость $[\mathsf{MA}]$ влечёт неразрешимость $[\varnothing]$. $\square$

Замечание

Сигнатура арифметики — это довольно много. На самом деле, аналогичный результат будет верен и для сигнатуры $\langle R^2 \rangle$, например.

Теория истины по Крипке

В своём «Эскизе теории истины» Крипке использовал частичные интерпретации T, которые представляли собой пары вида

$$S = \langle S^+, S^- \rangle,$$

где S^+ и S^- суть непересекающиеся подмножества $\mathbb{N}$, (н) содержанием S и антисодержанием S соответственно.

Под частичным означиванием для σ_T понимается (произвольное) отображение из Sent_T в надмножество $\{0, \mathfrak{n}, 1\}$.

Схемами означивания (н) функции из частичных интерпретаций в частичные означивания. Для начала рассмотрим два порядка $\leqslant_{\mathsf{sK}}$ и $\leqslant_{\mathsf{wK}}$ на $\{0, \mathfrak{n}, 1\}$: $0 \leqslant_{\mathsf{sK}} \mathfrak{n} \leqslant_{\mathsf{sK}} 1$ и $\mathfrak{n} \leqslant_{\mathsf{wK}} 0 \leqslant_{\mathsf{wK}} 1$.

Определим схему сильного Клини V_{sK} рекурсивно след. образом:

- для любых замкнутых σ-термов t_1, t_2 и $* \in \{=, <\}$,

$$V_{\mathsf{sK}}(S)(t_1 * t_2) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{если } \mathfrak{N} \models t_1 * t_2, \\ 0 & \text{если } \mathfrak{N} \not\models t_1 * t_2, \end{cases}$$

- для любого замкнутого σ-терма t,

$$V_{\mathsf{sK}}(S)(T(t)) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{если } \langle \mathfrak{N}, S^+ \rangle \models T(t), \\ 0 & \text{если } \langle \mathfrak{N}, S^- \cup (\mathbb{N} \setminus \#\mathsf{Sent}_T) \rangle \models T(t), \\ \mathfrak{n} & \text{иначе;} \end{cases}$$

- $V_{\mathsf{sK}}(S)(\varphi \wedge \phi) := \min\limits_{\leqslant_{\mathbf{sK}}} \{V_{\mathsf{sK}}(S)(\varphi), V_{\mathsf{sK}}(S)(\phi)\}$;
- $V_{\mathsf{sK}}(S)(\forall x\, \varphi(x)) := \min\limits_{\leqslant_{\mathbf{sK}}} \{V_{\mathsf{sK}}(S)(\varphi(t)) \mid t \text{ — замк. } \sigma\text{-терм}\}$;

- $V_{\mathsf{sK}}(S)(\varphi \vee \phi) := V_{\mathsf{sK}}(S)(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\phi))$;
- $V_{\mathsf{sK}}(S)(\exists x\, \varphi(x)) := V_{\mathsf{sK}}(S)(\neg\forall x\, \neg\varphi(x))$;
- $V_{\mathsf{sK}}(S)(\neg\varphi) := 1 - V_{\mathsf{sK}}(S)(\varphi)$.

Чтобы получить схему слабого Клини V_{wK}, нужно заменить $\leqslant_{\mathsf{sK}}$ на $\leqslant_{\mathsf{wK}}$. Теперь обратимся к так (н) схемам суперозначивания, каждая из которых имеет вид

$$V(S)(\varphi) \; := \; \begin{cases} 1 & \text{если } \langle \mathfrak{N}, A\rangle \models \varphi \text{ для всех } A \subseteq \mathbb{N}\text{, удовл. [*]}, \\ 0 & \text{если } \langle \mathfrak{N}, A\rangle \not\models \varphi \text{ для всех } A \subseteq \mathbb{N}\text{, удовл. [*]}, \\ \mathfrak{n} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наиболее известными схемами такого рода являются V_{SV}, V_{VB}, V_{FV} и V_{MC}. Они определяются следующим образом:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
V & = & V_{\mathsf{SV}} & \iff & [*] & = & `S^+ \subseteq A\text{'};\\
V & = & V_{\mathsf{VB}} & \iff & [*] & = & `S^+ \subseteq A \text{ и } A \cap S^- = \varnothing\text{'};\\
V & = & V_{\mathsf{FV}} & \iff & [*] & = & `S^+ \subseteq A \text{ и } A \text{ непрот.'};\\
V & = & V_{\mathsf{MC}} & \iff & [*] & = & `S^+ \subseteq A \text{ и } A \text{ непрот. и полно'}.
\end{array}
$$

Тут условие «A полно» означает, что для любого $\phi \in \mathrm{Sent}_T$ верно $\#\phi \in A$ или $\#\neg\phi \in A$; ср. с непротиворечивостью.

Ещё одна родственная схема возникла в статье Ляйтгеба «От чего зависит истина» (см. диссертацию Т. Шиндлера). Будем говорить, что $\varphi \in \mathrm{Sent}_T$ зависит от $A \subseteq \mathbb{N}$, если для любого $B \subseteq \mathbb{N}$,

$$\langle \mathfrak{N}, B\rangle \models \varphi \quad \iff \quad \langle \mathfrak{N}, B \cap A\rangle \models \varphi.$$

Тогда мы можем определить схему Ляйтгеба V_{L} по правилу

$$V_{\mathsf{L}}(S)(\varphi) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{если } \varphi \text{ зависит от } S^+ \cup S^- \text{ и } \langle \mathfrak{N}, S^+ \rangle \models \varphi, \\ 0 & \text{если } \varphi \text{ зависит от } S^+ \cup S^- \text{ и } \langle \mathfrak{N}, S^+ \rangle \not\models \varphi, \\ \mathfrak{n} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что каждая схема означивания V индуцирует функцию $\mathcal{J}_V$ на частичных интерпретациях — её (н) оператором скачка по Крипке для V — следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_V(S)^+ \;&:=\; \{\#\varphi \mid \varphi \in \mathsf{Sent}_T \text{ и } V(S)(\varphi) = 1\}, \\ \mathcal{J}_V(S)^- \;&:=\; \{\#\varphi \mid \varphi \in \mathsf{Sent}_T \text{ и } V(S)(\varphi) = 0\} \cup \\ &\qquad \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \#\mathsf{Sent}_T\}. \end{aligned}$$

Далее, $\mathcal{J}_V$ порождает трансфинитную последовательность, проиндексированную ординалами:

$$\mathcal{J}_V^\alpha(S) := \begin{cases} S & \text{если } \alpha = 0, \\ \mathcal{J}_V(\mathcal{J}_V^\beta(S)) & \text{если } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_V^\beta(S) & \text{если } \alpha \in \text{L-Ord}. \end{cases}$$

Мы будем нередко писать T_V^α вместо $\mathcal{J}_V^\alpha(\varnothing, \varnothing)^+$. Эти множества образуют иерархию истины для V.

Более того, Крипке работал с монотонными схемами, т.е. такими, что для любых частичных интерпретаций S_1 и S_2,

$$S_1^+ \subseteq S_2^+ \text{ и } S_1^- \subseteq S_2^- \implies$$
$$\implies \mathcal{J}_V(S_1)^+ \subseteq \mathcal{J}_V(S_2)^+ \text{ и } \mathcal{J}_V(S)^- \subseteq \mathcal{J}_V(S)^-.$$

Наблюдение (Крипке)

Для любой монотонной схемы означивания V существует ординал α такой, что $\mathcal{J}_V^{\alpha+1}(\varnothing, \varnothing) = \mathcal{J}_V^{\alpha}(\varnothing, \varnothing)$ — это даёт н.н.т. $\mathcal{J}_V$.

Легко убедиться, что каждая $V \in \{V_{\mathsf{sK}}, V_{\mathsf{wK}}, V_{\mathsf{SV}}, V_{\mathsf{VB}}, V_{\mathsf{FV}}, V_{\mathsf{MC}}, V_{\mathsf{L}}\}$ монотонна и, более того, обладает следующими свойствами:

- если $\mathcal{J}_V(S) = S$, то $V(S)\left(T\left(\ulcorner\varphi\urcorner\right)\right) = V(S)(\varphi)$;
- $\#\varphi \in \mathcal{J}_V^{\alpha}(S)^-$ ттогда, когда $\#\neg\varphi \in \mathcal{J}_V^{\alpha}(S)^+$;
- $\#\varphi \in \mathcal{J}_V^{\alpha}(S)^+$ ттогда, когда $\#\neg\varphi \in \mathcal{J}_V^{\alpha}(S)^-$;
- $\mathcal{J}_V$ является «Π_1^1-оператором», а потому, ввиду одной теоремы Спектра, $\mathsf{T}_V^{\alpha} = \mathsf{T}_V^{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \in \text{C-Ord} \cup \left\{\omega_1^{\mathsf{CK}}\right\}$.

Клиниевская система обозначений для C-Ord состоит из:

- спец. частичной функции $\nu_{\mathcal{O}}$ из $\mathbb{N}$ на C-Ord;
- подходящего отношения порядка $<_{\mathcal{O}}$ на $\operatorname{dom} \nu_{\mathcal{O}}$, которое симулирует обычное отношение порядка на C-Ord.

Мы будем часто писать $n \in \mathcal{O}$ вместо $n \in \operatorname{dom} \nu_{\mathcal{O}}$. Нат. число n (н) обозначением для $\alpha \in$ C-Ord, если $\nu_{\mathcal{O}}(n) = \alpha$;

Фольклор

$\operatorname{dom} \nu_{\mathcal{O}}$ является Π^1_1-полным.

Зафиксируем какую-нибудь универсальную частичную вычислимую функцию U (от двух аргументов).

Фольклор

Существует вычислимая функция f такая, что для любого $n \in \mathcal{O}$,

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k <_{\mathcal{O}} n\} \;=\; \operatorname{dom} U_{f(n)}.$$

Фольклор (эффективная трансфинитная рекурсия)

Пусть f — вычислимая ф-ия такая, что для любых $e \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathcal{O}$,

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k <_{\mathcal{O}} n\} \;\subseteq\; \operatorname{dom} U_e \quad\Longrightarrow\quad n \;\in\; \operatorname{dom} U_{f(e)}.$$

Тогда найдётся $c \in \mathbb{N}$ такое, что $U_{f(c)} = U_c$ и $\operatorname{dom} \nu_{\mathcal{O}} \subseteq \operatorname{dom} U_c$.

Будем (н) схему означивания V обычной, если для любых $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $\chi \in \mathrm{Sent}$, $\psi \in \mathrm{Sent}_T$ и $\varphi(x) \in \mathrm{Form}_T$:

1. $\mathsf{T}_V^\alpha \subseteq \mathsf{T}_V^{\alpha+1}$;
2. $\chi \in \mathsf{T}_V^\alpha$ ттогда, когда $\alpha \neq 0$ and $\mathfrak{N} \models \chi$;
3. $\psi \in \mathsf{T}_V^\alpha$ ттогда, когда $T(\ulcorner \psi \urcorner) \in \mathsf{T}_V^{\alpha+1}$;
4. $\forall x\, \varphi(x) \in \mathsf{T}_V^{\alpha+1}$ ттогда, когда $\{\varphi(\underline{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathsf{T}_V^{\alpha+1}$;
5. $\chi \wedge \psi \in \mathsf{T}_V^\alpha$ ттогда, когда $\mathfrak{N} \models \chi$ and $\psi \in \mathsf{T}_V^\alpha$;
6. если $\chi \vee \psi \in \mathsf{T}_V^\alpha$ и $\mathfrak{N} \models \neg\chi$, то $\psi \in \mathsf{T}_V^\alpha$;
7. если $\mathfrak{N} \models \chi$ и $\alpha \neq 0$, то $\chi \vee \psi \in \mathsf{T}_V^\alpha$.

Все схемы выше за исключением V_{wK} — т.е. той, которая отвечает слабой логике Клини — являются обычными.

Для данной схемы V под рангом $\psi \in \mathrm{Sent}_T$ — обозн. как $rank_V(\psi)$ — понимается наименьший ординал α такой, что $\psi \in \mathrm{T}_V^{\alpha+1}$.

Утверждение

Предположим, что схема V удовлетворяет (3–4). Тогда для любого $\psi \in \mathrm{Sent}_T$ и любой $\varphi(x) \in \mathrm{Form}_T$,

$$\begin{aligned} rank_V(T(\ulcorner\psi\urcorner)) &= rank_V(\psi) + 1 \quad \text{и} \\ rank_V(\forall x\, \varphi(x)) &= \sup\{rank_V(\varphi(\underline{n})) \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Лемма

Пусть V — обычная схема. Тогда существует вычислимая функция ρ_V такая, что для любого $n \in \mathcal{O}$, $rank_V(\rho_V(n)) = \nu_{\mathcal{O}}(n) + 1$.

Теорема

Пусть V — обычная схема. Тогда $\mathsf{T}_V^\alpha \subsetneq \mathsf{T}_V^{\alpha+1}$ для любого $\alpha \in \text{C-Ord}$. Более того, $\bigcup_{\alpha\in\mathsf{Ord}} \mathsf{T}_V^\alpha$ является Π_1^1-трудным.

Замечание

На самом деле, во всех разумных ситуациях наим. ординал α такой, что $\mathsf{T}_V^\alpha = \mathsf{T}_V^{\alpha+1}$, не может превышать ω_1^{CK}, а $\bigcup_{\alpha\in\mathsf{Ord}} \mathsf{T}_V^\alpha$ — т.е. наим. неподвижная точка $\mathcal{J}_V$ — лежит в Π_1^1.

Некоторые ссылки

M. Fitting. Notes on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 27, 75–88, 1986.

S. Kripke. Outline of a theory of truth. *The Journal of Philosophy* 72, 690–716, 1975.

S. O. Speranski. Notes on the computational aspects of Kripke's theory of truth. *Studia Logica* 105, 407–429, 2017.