

УДК 532.546

РОСТ ПУЗЫРЯ В ЛОТКЕ ХЕЛЕ-ШОУ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЕДИНСТВЕННОГО ФИОРДА

М.М. Алимов

Аннотация

Построено новое точное решение односторонней нестационарной задачи Хеле-Шоу о раздуваемом пузыре при динамическом граничном условии Саффмэна – Тейлора. В отличие от известных решений оно характеризуется отсутствием какой-либо симметрии и формированием со временем единственного фиорда.

Введение

Классическая задача Хеле-Шоу описывает эволюцию границы раздела вязкой и вязкой жидкости (далее воздуха и просто жидкости) при их совместном течении в лотке Хеле-Шоу в предположении о непрерывности давления на границе раздела фаз [1]. Задача о пузыре представляет собой частный случай такого течения, когда жидкость занимает внешность некоторой односвязной области (пузыря), причем воздух внутри пузыря свободно связан с атмосферой, а жидкость отбирается или нагнетается равномерно по периферии лотка [2]. Наиболее интересен случай раздуваемого пузыря, когда жидкость отступает, и имеет место неустойчивость межфазной границы. При этом в экспериментах наблюдаются регулярные или почти регулярные пальцеобразные структуры [2–4].

Первые точные решения задачи о стягивании контура нефтеносности, родственной задаче Хеле-Шоу, найдены в работах [5–7]. Непосредственно для задачи Хеле-Шоу о раздуваемом пузыре ряд частных решений получен в работах [8–11]. Все они принадлежат классу решений, представленных параметризованной функцией, отображающей область Ω_ζ некоторой вспомогательной плоскости ζ на область $\Omega_z(t)$ физической плоскости z , причем производная отображающей функции рациональна во вспомогательной плоскости. Другими словами, она имеет конечное число нулей и полюсов, лежащих вне области Ω_ζ (необходимое условие конформности отображения $\zeta \rightarrow z$). Эволюция межфазной границы области $\partial\Omega_z(t)$ вызывает изменение положения нулей и полюсов в плоскости ζ , причем они могут двигаться в сторону границы области $\partial\Omega_\zeta$ в плоскости ζ . В случае касания границы $\partial\Omega_\zeta$ нулей ситуация критична: на межфазной границе $\partial\Omega_z(t)$ образуется точка заострения и классическое решение задачи перестает существовать [12] (пример – решение П.Я. Полубариновой-Кочиной [5] для кардиоиды).

Приближение полюсов к образу межфазной границы $\partial\Omega_\zeta$ в плоскости ζ не критично – в результате на межфазной границе формируется фиорд [9, 10]. Два соседних фиорда образуют пальцеобразную структуру.

По построению все решения [8–11] обязательно обладают разного рода симметрией области течения, и число «фиордообразующих» полюсов не может быть меньше двух. В работе [13] было построено общее решение задачи пальцеобразования в канале Хеле-Шоу. Переноса методы [13] на задачу о растущем пузыре и ограничиваясь тем же классом параметризованных решений, характеризуемым

рациональностью производной отображающей функции, удается построить новое точное решение задачи Хеле-Шоу о раздуваемом пузыре. Оно отличается от решений [8–11] отсутствием какой-либо симметрии и формированием со временем единственного фиорда.

1. Определяющие соотношения

Математическая формулировка задачи Хеле-Шоу о раздуваемом пузыре (см. рис. 1, а) имеет вид [9]

$$\begin{aligned} \Omega_z(t) : \quad & \Delta p = 0, \\ \partial\Omega_z(t) : \quad & -(\partial p / \partial n) = v_n, \quad p = 0, \\ |x^2 + y^2| \rightarrow \infty : \quad & p \rightarrow \frac{Q(t)}{4\pi} \ln |x^2 + y^2|. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Omega_z(t)$ – область, занятая жидкостью; $\partial\Omega_z(t)$ – межфазная граница между жидкостью и воздухом; \mathbf{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega_z(t)$; $p(x, y, t)$ – давление в жидкости; v_n – нормальная составляющая скорости движения межфазной границы; $Q(t) > 0$ – суммарный расход отбираемой на бесконечности жидкости (пока не определенная функция времени).

Задача (1) позволяет ввести комплексную физическую плоскость $z = x + iy$ и комплексный потенциал течения $W = \varphi + i\psi$, где $\varphi = -p$, ψ – функция тока [14], причем $W = W(z, t)$ и на бесконечности выполняется условие

$$2\pi z (\partial W / \partial z)|_{|z| \rightarrow \infty} = Q(t). \quad (2)$$

Целесообразно [5–7] ввести вспомогательную плоскость комплексного переменного ζ , в которой области $\Omega_z(t)$ отвечает область Ω_ζ канонического вида – в данном случае внешность единичного круга (рис. 1, б). Свободной границе соответствует окружность $|\zeta| = 1$, а бесконечности в плоскости z – бесконечность в плоскости ζ . Аналитическую функцию, конформно отображающую область Ω_ζ на область $\Omega_z(t)$, обозначим через $g(\zeta, t)$:

$$z = g(\zeta, t), \quad |\partial g / \partial \zeta|_{\zeta \in \Omega_\zeta} \neq 0, \infty. \quad (3)$$

Конформность отображения предполагает отсутствие в области Ω_ζ сингулярностей функции $g(\zeta, t)$, что отражено в выражении (3) [15]. Как следствие существует и обратное отображение

$$\zeta = f(z, t), \quad |\partial f / \partial z|_{z \in \Omega_z} \neq 0, \infty. \quad (4)$$

Нормируем конформное отображения (3) так, что $\arg(\partial g / \partial \zeta) \rightarrow 0$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$, и производная $\partial g / \partial \zeta$ будет вещественной функцией только времени t . Выберем эту функцию вполне определенной и равной $(1+t)$. В результате условие нормировки примет вид

$$(\partial g / \partial \zeta)|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = (1+t) \quad (5)$$

Учитывая граничные условия задачи (1), канонический вид области Ω_ζ и условие нормировки (5), сразу можем определить вид функции $W(\zeta, t)$

$$2\pi W(\zeta, t) = Q(t) \ln \zeta.$$

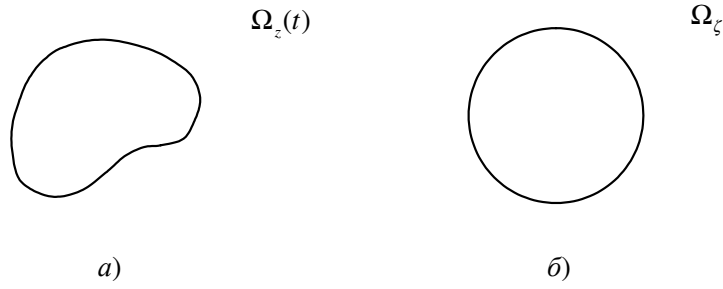


Рис. 1. Вид физической плоскости z (а) и вспомогательной плоскости ζ (б)

Тогда краевая задача (1) приводит к граничному эволюционному уравнению Полубариновой-Галина [5, 6]

$$\zeta = e^{i\sigma} : \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right\} = \frac{Q(t)}{2\pi}. \quad (6)$$

Введем функцию Шварца $S(z, t)$ [16]. Она получается подстановкой $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2$ в уравнение свободной границы

$$\partial \Omega_z(t) : \quad F(x, y, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = S(z, t)$$

и разрешением его относительно \bar{z} . Обозначим через r образ функции Шварца во вспомогательной плоскости $r(\zeta, t) = S(g(\zeta, t), t)$. Функция $r(\zeta, t)$ получается применением к функции $g(\zeta, t)$ преобразования [10]

$$r(\zeta, t) = g^*(\zeta^{-1}, t) \equiv \mathcal{P}[g(\zeta, t)], \quad (7)$$

которое определим как оператор \mathcal{P} [13]. Звездочка здесь и далее обозначает операцию сопряжения только по параметрам (но не переменным) функции. Отметим очевидное свойство оператора \mathcal{P} : примененный дважды к любой функции он будет эквивалентен тождественному преобразованию.

С помощью функции $r(\zeta, t)$ граничное эволюционное уравнение (6) может быть переписано в виде

$$\zeta = e^{i\sigma} : \quad \pi \Phi(\zeta, t) = Q(t), \quad (8)$$

где левая часть уравнения имеет вид [7]

$$\Phi(\zeta, t) \equiv \zeta \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial \zeta}. \quad (9)$$

Оператор \mathcal{P} позволяет представить функцию $\Phi(\zeta, t)$ результатом некоторого преобразования функции $g(\zeta, t)$

$$\Phi(\zeta, t) = \mathcal{P} \left[\frac{\partial g}{\partial t} \right] \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial g}{\partial t} \mathcal{P} \left[\zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right] \quad (10)$$

и, соответственно, установить инвариантность функции $\Phi(\zeta, t)$ относительно преобразования \mathcal{P} . Тогда (см. [13]) вне зависимости от типа лотка Хеле-Шоу и, соответственно, вида граничных условий для функции $g(\zeta, t)$ справедливо следующее

Утверждение. Пусть частные производные функции $g(\zeta, t)$ по переменным ζ и t – рациональные функции в плоскости ζ . Тогда функция $\Phi(\zeta, t)$ как результат преобразования (10) также рациональна и является комбинацией парных

нулей $\{c_j, \bar{c}_j^{-1}\}$ и парных полюсов $\{b_j, \bar{b}_j^{-1}\}$, отличных от нуля и бесконечности плоскости ζ :

$$\Phi(\zeta, t) = \alpha(t) \prod_{j=1}^{J_n} [\zeta - c_j(t)] [\zeta^{-1} - \bar{c}_j(t)] \Big/ \prod_{j=1}^{J_p} [\zeta - b_j(t)] [\zeta^{-1} - \bar{b}_j(t)],$$

где $\alpha(t)$ – некоторая вещественная функция t . При этом количество нулей $2J_n$ и полюсов $2J_p$ может не совпадать. Знак разности $J_n - J_p$ определяет поведение функции $\Phi(\zeta, t)$ в нуле и бесконечности: если он положителен, там будут полюса порядка $J_n - J_p$, если отрицателен – нули порядка $J_p - J_n$.

2. Параметрический вид решения для пузыря с единственным фиордом

Для нахождения решения задачи с учетом известных результатов [8–11] целесообразно сразу заложить структуру решения, то есть параметрический вид функции $g(\zeta, t)$, обеспечивающий условие рациональности ее частных производных в плоскости ζ . Учитывая «фиордообразующую» роль полюсов производной $\partial g/\partial \zeta$, о которой говорилось выше, ограничимся случаем единственного простого полюса $b = b(t)$, строго отличного от точки $\zeta = 0$. Тогда параметрический вид производной $\partial g/\partial \zeta$ при нормировке (5) с необходимостью является таким:

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \frac{(1+t)}{\zeta^{N-1}(\zeta - b)} \prod_{n=1}^N (\zeta - a_n) \quad (11)$$

Здесь через $a_n = a_n(t)$ обозначены нули функции (кратные просто повторяются) общим числом $N \geq 1$ (на самом деле, как будет показано далее, в п. 4, случай $N = 1$ несодержателен, а содержателен только случай $N \geq 2$). Соответственно, в точке $\zeta = 0$ с необходимостью присутствует полюс порядка $N - 1$.

Заметим, что нули $a_n(t)$ в отличие от полюса $b(t)$ в какой-то момент времени могут совпасть с точкой $\zeta = 0$, так что после сокращения степеней ζ в числителе и знаменателе у функции $\partial g/\partial \zeta$ в точке $\zeta = 0$ в этот момент времени на самом деле может оказаться не полюс порядка $N - 1$, а например, нуль порядка не выше первого.

Как сингулярности отображающей функции $g(\zeta, t)$, реализующей конформное отображение $\zeta \rightarrow z$, нули и полюса производной $\partial g/\partial \zeta$ должны лежать внутри единичного круга $|\zeta| < 1$:

$$\forall t: \quad |b(t)| < 1; \quad |a_n(t)| < 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Рациональная функция (11) допускает и аддитивное представление, причем вместо нулей $a_n(t)$ параметрами становятся моменты при каждом слагаемом [15]. Анализ этого представления с учетом некоторой свободы в выборе параметров приводит к такому виду функции $g(\zeta, t)$:

$$g(\zeta, t) = (1+t)\zeta + d_0 \ln [\zeta^{-1} - b^{-1}(t)] + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\beta_m(t)}{\zeta^{m-1}}. \quad (13)$$

Здесь d_0 , b и β_m – свободные параметры, причем d_0 – комплексная константа, а $b(t)$, $\beta_m(t)$ – комплекснозначные функции времени t .

В соответствии с основной идеей метода функции Шварца [16] удовлетворим граничное уравнение (8), обеспечив его выполнение всюду в плоскости ζ . Обе

частные производные функции $g(\zeta, t)$ вида (13) в плоскости ζ будут рациональными функциями. Следовательно, функция $g(\zeta, t)$ удовлетворяет всем условиям утверждения п. 1. Поэтому функция $\Phi(\zeta, t)$ также рациональна в плоскости ζ и структурно состоит из двух слагаемых – рациональных функций с одними и теми же полюсами. Соответственно, можно пытаться добиться взаимного сокращения полюсов путем наложения дополнительных условий на свободные параметры функции $g(\zeta, t)$. Тогда по теореме Лиувилля [15] $\Phi(\zeta, t)$ во всей плоскости ζ будет функцией только параметра t , причем вещественной, вследствие ее инвариантности относительно преобразования \mathcal{P} . В результате из утверждения п. 1 вытекает

Следствие. Пусть функция $g(\zeta, t)$ имеет вид (13) и удовлетворяет условию (12), а функция $\Phi(\zeta, t)$ является образом $g(\zeta, t)$ при преобразовании (10). Если, управляя свободными параметрами $b(t)$, $\beta_m(t)$, $m = 1, \dots, N - 1$, добиться выполнения совокупности таких локальных условий

$$\Phi(\zeta, t)|_{|\zeta| \sim \bar{b}^{-1}} = O(1), \quad \Phi(\zeta, t)|_{|\zeta| \sim \infty} = O(1), \quad (14)$$

то функция $g(\zeta, t)$ будет удовлетворять граничному эволюционному уравнению (8) и, соответственно, будет решением задачи Хеле-Шоу о раздувающемся пузыре с некоторым определенным законом отбора жидкости $Q(t)$.

Отметим, что условия (14) носят характер запрета на наличие особенностей у функции $\Phi(\zeta, t)$ в определенных точках плоскости ζ , и фактическое число локальных условий, определяемых (14), больше двух. Если, например, в окрестности бесконечности по построению у функции $\Phi(\zeta, t)$ может быть полюс 3-го порядка, то из второго условия (14) будет вытекать фактически три локальных условия – запрета полюсов 1-го, 2-го и 3-го порядков соответственно.

Вид закона $Q(t)$ определяется выбором конкретной функции времени в нормировке (5). В дальнейшем заменой переменной $t \rightarrow \theta(t)$ можно получить решение задачи для любого наперед заданного закона $Q(\theta) > 0$ [12].

Зная вид решения $g(\zeta, t)$ и комплексного потенциала $W(\zeta)$, можно найти комплексно сопряженную скорость потенциального движения

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{Q(t)}{\pi \zeta} \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta} \right)^{-1}. \quad (15)$$

Таким образом, с помощью параметризации решения в виде (13) краевая задача Хеле-Шоу (1) о раздувающемся пузыре сводится к задаче локального анализа поведения функции $\Phi(\zeta, t)$ в окрестности ее особых точек.

3. Формализм

Использование комплексных переменных делает целесообразным и введение комплекснозначных аналогов векторных полей [13]. Если в плоскости \mathbf{R}^2 действует векторное поле $\mathbf{V}(x, y, t) = (v_x, v_y)$, то, очевидно, можно говорить о действующем в комплексной плоскости \mathbb{C} векторном поле $\mathbb{V}(z, \bar{z}, t)$, которое получается подстановкой $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2$ в векторное поле $v_x(x, y, t) + i v_y(x, y, t)$. Тогда для скорости потенциального течения можно использовать формулу $\mathbb{V}_p = \overline{\partial W / \partial z}$, откуда, в частности, следует $\mathbb{V}_p = \mathbb{V}_p(\bar{z}, t)$.

Пусть в плоскости \mathbf{R}^2 задано гладкое векторное поле $\mathbf{V}(x, y, t)$. Следуя [17, 18], можно ввести расширенное пространство $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$, действующее в нем векторное поле $(1, \mathbf{V})$ и производную Ли относительно векторного поля $(1, \mathbf{V})$. Соответственно, можно ввести расширенное пространство $\mathbf{R} \times \mathbb{C}$, действующее в нем векторное

поле $(1, \mathbb{V})$ и производную Ли относительно этого векторного поля. Если $f(z, t)$ – аналитическая функция комплексного переменного z и действительного переменного t , то производная Ли скалярного поля f относительно векторного поля $(1, \mathbb{V})$ имеет вид [13]

$$\mathcal{L}_{(1, \mathbb{V})} f \equiv \partial f / \partial t + \mathbb{V} \partial f / \partial z. \quad (16)$$

Пусть в соответствии с п. 1 функция $f(z, t)$ в каждый момент времени $t \in T \subset \mathbf{R}$ реализует конформное отображение области $\Omega_z(t)$ на Ω_ζ , а функция $g(\zeta, t)$ – обратное отображение. Вводя тождественное преобразование времени $\phi(t) \equiv t$, определим взаимно обратные отображения (ϕ, f) и (ϕ, g)

$$(\phi, f) : T \times \Omega_z(t) \rightarrow T \times \Omega_\zeta; \quad (\phi, g) : T \times \Omega_\zeta \rightarrow T \times \Omega_z(t).$$

В области $T \times \Omega_z(t)$ действует векторное поле $(1, \mathbb{V})$. В результате отображения (ϕ, f) в области $T \times \Omega_\zeta$ ему будет отвечать векторное поле $(1, \mathbb{U})$. В механической интерпретации поле $\mathbb{V}(z, \bar{z}, t)$ задает движение материальных точек области $\Omega_z(t)$, а поле $\mathbb{U}(\zeta, \bar{\zeta}, t)$ – движение их образов в области Ω_ζ при отображении (ϕ, f) . Взаимосвязь этих полей и отображений выражает производная Ли: $(1, \mathbb{U}) = \mathcal{L}_{(1, \mathbb{V})}(\phi, f)$. С учетом формулы (16) будем иметь

$$1 \equiv \mathcal{L}_{(1, \mathbb{V})} \phi(t), \quad \mathbb{U}(\zeta, \bar{\zeta}, t) = (\partial f / \partial t + \mathbb{V} \partial f / \partial z)|_{z=g(\zeta, t)}. \quad (17)$$

Зависящее от времени t как от параметра конформное отображение (3) задает группу преобразований, которой отвечает некоторое конформное движение точек физической плоскости. Вспомогательная плоскость ζ при этом выступает в качестве плоскости лагранжевых переменных. Скорость такого движения обозначим через $\mathbb{V}_g(z, t)$ и по определению имеем

$$\mathbb{V}_g(z, t) = (\partial g / \partial t)|_{\zeta=f(z, t)}. \quad (18)$$

В плоскости ζ этому движению отвечает векторное поле $\mathbb{U}_g(\zeta, t) \equiv 0$. Подставляя его в формулы (17), получим другую формулу для поля $\mathbb{V}_g(z, t)$

$$\mathbb{V}_g(z, t) = -\frac{\partial f}{\partial t} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (19)$$

Аналогично можно определить другое конформное движение, порожденное отображением (4), когда z выступает плоскостью лагранжевых переменных. В этой плоскости ему отвечает поле скоростей $\mathbb{V}_f(z, t) \equiv 0$, а в плоскости ζ – поле $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$, по аналогии с (18), (19) имеющее вид

$$\mathbb{U}_f(\zeta, t) = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{z=g(\zeta, t)} = -\frac{\partial g}{\partial t} \Big/ \frac{\partial g}{\partial \zeta}. \quad (20)$$

Из формул (9), (20) найдем новое представление функции $\Phi(\zeta, t)$:

$$\Phi(\zeta, t) \equiv \zeta (\partial g / \partial \zeta) \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} r(\zeta, t). \quad (21)$$

Тогда эволюционное граничное уравнение (8) можно записать в терминах производной Ли

$$\zeta = e^{i\sigma} : \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} r(\zeta, t) = \frac{Q(t)}{\pi \zeta} \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta} \right)^{-1}. \quad (22)$$

В результате можно переписать локальные условия (14) для функции $\Phi(\zeta, t)$ в терминах производной Ли. При этом необходимо знать особенности поля $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ в комплексной плоскости ζ . Судить о них легче в случае, когда в параметрическом представлении решения (13) величина N принимает минимально возможное значение, а именно: $N = 2$, то есть от суммы членов вида $\beta_m(t) \zeta^{1-m}$ остается одно слагаемое: $\beta(t)$.

4. Простейший случай $N = 2$

Полагая $N = 2$ в формуле (13), приходим к такому виду функции $g(\zeta, t)$:

$$g(\zeta, t) = (1+t)\zeta + d_0 \ln [\zeta^{-1} - b^{-1}(t)] + \beta(t). \quad (23)$$

Здесь d_0 , b и β – свободные параметры, причем d_0 – комплексная константа, а $b(t)$, $\beta(t)$ – комплекснозначные функции времени t .

Найдем частные производные функции $g(\zeta, t)$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \zeta + \frac{d_0 b'(t)}{(\zeta^{-1} - b^{-1})b^2} + \beta'(t); \quad \frac{\partial g}{\partial \zeta} = (1+t) - \frac{d_0 \zeta^{-2}}{(\zeta^{-1} - b^{-1})}.$$

После элементарных преобразований получим производную $\partial g/\partial \zeta$, практически приведенную к виду (11)

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \frac{(1+t)\zeta(b-\zeta) - d_0 b}{(b-\zeta)\zeta}. \quad (24)$$

Подставляя эти выражения в (20), найдем вид функции $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$

$$\mathbb{U}_f(\zeta, t) = -\frac{(\zeta + \beta')\zeta(b-\zeta) + d_0 b'(t)b^{-1}\zeta^2}{(1+t)\zeta(b-\zeta) - d_0 b}. \quad (25)$$

Очевидно, что функция $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ рациональна в плоскости ζ , причем на бесконечности функция имеет простой полюс. Сравнение выражений (24) и (25) показывает, что остальные полюса функции $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ в плоскости ζ совпадают с нулями производной $\partial g/\partial \zeta$. Последние в силу требования (12) лежат внутри единичного круга. Соответственно, функция $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ регулярна всюду в области Ω_ζ , но не в замыкании $\bar{\Omega}_\zeta$.

Учитывая это, а также то обстоятельство, что все полюса рациональной функции $\partial g/\partial \zeta$ лежат вне замыкания области $\bar{\Omega}_\zeta$, перепишем условия (14) с помощью представления (21) функции $\Phi(\zeta, t)$ посредством производной Ли образа функции Шварца $r(\zeta, t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} r(\zeta, t) \Big|_{\zeta \sim \bar{b}^{-1}} &= O(1), \\ \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} r(\zeta, t) \Big|_{|\zeta| \sim \infty} &= O(\zeta^{-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Далее, используя преобразование (7) функции $g(\zeta, t)$ вида (23), найдем образ функции Шварца $r(\zeta, t)$ в виде:

$$r(\zeta, t) = \frac{1+t}{\zeta} + \bar{d}_0 \ln [\zeta - \bar{b}^{-1}(t)] + \bar{\beta}(t) \quad (27)$$

с точностью до константы (несущественной, поскольку используются только частные производные функции).

С учетом формулы (16) проанализируем левые части условий (26) на предмет наличия особенностей в замыкании области $\bar{\Omega}_\zeta$. Таковые могут быть порождены особенностями функции $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ (см. формулу (25)) и частных производных функции $r(\zeta, t)$. Как уже отмечалось выше, функция $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ в замыкании $\bar{\Omega}_\zeta$ имеет единственную особенность – простой полюс на бесконечности. В частных производных $\partial r/\partial t$, $\partial r/\partial \zeta$ функции вида (27) особенность типа простого полюса в точке \bar{b}^{-1} появляется за счет слагаемого $\bar{d}_0 \ln[\zeta - \bar{b}^{-1}(t)]$, и только за счет него. Соответственно, в левую часть 1-го локального условия (26) существенный вклад может

дать только слагаемое $\bar{d}_0 \ln[\zeta - \bar{b}^{-1}(t)]$ представления (27). В результате первое условие (26) дает

$$\mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} [\ln(\zeta - \bar{b}^{-1})] \Big|_{\zeta \sim \bar{b}^{-1}} = O(1). \quad (28)$$

Несколько сложнее со вторым условием (26), а именно условием на бесконечности. Используя выражение (25), оценим поведение поля $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ на бесконечности

$$|\zeta| \sim \infty: \quad \mathbb{U}_f(\zeta, t) = -\frac{\zeta}{(1+t)} + O(1). \quad (29)$$

С учетом формулы (16) убедимся, что первое слагаемое в представлении (27) не дает существенного вклада во второе условие (26), поскольку

$$\left\{ \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} \left(\frac{1+t}{\zeta} \right) \right\} \Big|_{|\zeta| \sim \infty} = O(\zeta^{-1}).$$

Соответственно, само условие можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} \{ \bar{d}_0 \ln[\zeta - \bar{b}^{-1}(t)] + \bar{\beta}(t) \} \Big|_{|\zeta| \sim \infty} = O(\zeta^{-1}). \quad (30)$$

Таким образом, совокупность локальных условий (14) сведена к более простой совокупности локальных условий (28), (30).

5. Формулировка динамической задачи

Свободные параметры $b(t)$, $\beta(t)$ решения вида (27) можно трактовать как фазовые координаты некоторой обобщенной динамической системы [8]. Другими словами, условия (28), (30) позволяют выписать систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для двух неизвестных $b(t)$ и $\beta(t)$.

Проанализируем сначала условие (30). Распишем его левую часть с учетом формулы (16) и оценки (29) поведения $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ на бесконечности:

$$|\zeta| \sim \infty: \quad \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} \{ \bar{d}_0 \ln[\zeta - \bar{b}^{-1}(t)] + \bar{\beta}(t) \} \approx \bar{\beta}'(t) - \frac{\bar{d}_0 \zeta}{(\zeta - \bar{b}^{-1})(1+t)} + O(\zeta^{-1}).$$

Соответственно, само условие (30) будет удовлетворено только в случае, когда

$$\bar{\beta}'(t) - \frac{\bar{d}_0}{(1+t)} = 0. \quad (31)$$

Решение этого дифференциального уравнения для параметра $\beta(t)$ может быть выписано сразу:

$$\beta(t) = d_0 \ln(1+t) + \beta(0). \quad (32)$$

Теперь проанализируем условие (28). Распишем его левую часть с учетом формулы (16)

$$\{ \mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} \ln(\zeta - \bar{b}^{-1}) \} \Big|_{\zeta \sim \bar{b}^{-1}} = \left\{ \frac{\bar{b}^{-2} \bar{b}' + \mathbb{U}_f}{\zeta - \bar{b}^{-1}} \right\} \Big|_{\zeta \sim \bar{b}^{-1}},$$

и соответственно, само условие может быть удовлетворено только в случае, когда

$$\mathbb{U}_f(\zeta, t) \Big|_{\zeta \sim \bar{b}^{-1}} = -\frac{\bar{b}'}{\bar{b}^2}.$$

Подставляя в это соотношение выражение (25) для функции $\mathbb{U}_f(\zeta, t)$ и учитывая уже известный вид параметра $\beta(t)$, получим нелинейное дифференциальное уравнение для параметра $b(t)$

$$\left(1 + \frac{\bar{d}_0 \bar{b}}{1+t}\right) \left(b - \frac{1}{\bar{b}}\right) + \frac{d_0 b'(t)}{b} = \bar{b}'(t) \left[\frac{1+t}{\bar{b}} \left(b - \frac{1}{\bar{b}}\right) - d_0 b\right]. \quad (33)$$

Это дифференциальное уравнение может быть решено численно, например, с помощью пакета MATLAB. Вместе с тем, уравнение (33) может быть проинтегрировано аналогично [13].

6. Интегрирование дифференциального уравнения (33)

Пусть свободные параметры $b(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (31), (33), что эквивалентно выполнению совокупности локальных условий (28), (30) и, соответственно, совокупности локальных условий (14). Тогда, согласно следствию п. 2, всюду в плоскости ζ выполняется эволюционное граничное уравнение (8), и соответственно, эволюционное граничное уравнение (22).

Далее, с помощью отображения (ϕ, g) (см. п. 3) перейдем из области $T \times \Omega_\zeta$ в область $T \times \Omega_z(t)$. С учетом инвариантности производной Ли относительно отображений [18] и определения образа $r(\zeta, t)$ функции Шварца $S(z, t)$ (см. п. 1) найдем:

$$z \in \partial\Omega_z(t) : \quad \{\mathcal{L}_{(1, \mathbb{U}_f)} r(\zeta, t)\}_{\zeta=f(z, t)} = \mathcal{L}_{(1, \mathbb{V}_f)} S(z, t) \equiv \partial S / \partial t.$$

Тогда из уравнения (22) с учетом выражения (15) получим еще один вид граничного эволюционного уравнения:

$$z \in \partial\Omega_z(t) : \quad \partial S / \partial t = 2(\partial W / \partial z). \quad (34)$$

Именно такой вид уравнения использовался в [10], и последующее интегрирование уравнения (33) можно назвать методом Ховисона [13].

Уравнение (22) выполняется всюду в плоскости ζ . Функция $\zeta(\partial g / \partial \zeta)$, а значит и $\partial W / \partial z$, регулярна всюду в замыкании $\bar{\Omega}_\zeta(t)$. Поэтому уравнение (34) выполняется не только на границе $\partial\Omega_z(t)$, но также и в замыкании области $\bar{\Omega}_z(t)$ (но не во всей плоскости z):

$$z \in \bar{\Omega}_z(t) : \quad \partial S / \partial t = 2(\partial W / \partial z). \quad (35)$$

Формула (2) фактически дает оценку поведения $\partial W / \partial z$ на бесконечности $|z| \rightarrow \infty$: $\partial W / \partial z = O(z^{-1})$. С учетом этого, из уравнения (35) найдем оценку поведения производной $\partial S / \partial t$ всюду в замыкании области $\bar{\Omega}_z(t)$

$$z \in \bar{\Omega}_z(t) : \quad \partial S / \partial t = O(1). \quad (36)$$

Функция $r(\zeta, t)$ вида (27), очевидно, имеет особенности на бесконечности и в точке $\zeta = \bar{b}^{-1}(t)$. Соответственно, функция $S(z, t)$ будет иметь особенности на бесконечности и в точке $z = B(t)$ — образе точки $\zeta = \bar{b}^{-1}(t)$ при отображении $g(\zeta, t)$:

$$B(t) = g(\zeta, t)|_{\zeta=\bar{b}^{-1}(t)}. \quad (37)$$

Проанализируем поведение функции $S(z, t)$ в окрестности точки $B(t)$. Ввиду регулярности функции $g(\zeta, t)$ в точке $\zeta = \bar{b}^{-1}(t)$ можно выписать ряд Бурмана-Лагранжа [15] (штрих обозначает производную по ζ):

$$\zeta - \bar{b}^{-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) [z - B(t)]^n, \quad A_1(t) = \frac{1}{g'} \Big|_{\zeta=\bar{b}^{-1}}, \quad A_2(t) = -\frac{g''}{2(g')^3} \Big|_{\zeta=\bar{b}^{-1}}, \dots$$

Подставляя это разложение в представление (27) функции $r(\zeta, t)$, найдем, что комбинация $S(z, t) - \bar{d}_0 \ln[z - B(t)]$ в окрестности точки $B(t)$ представима следующим образом

$$S(z, t)|_{z \sim B(t)} = \bar{d}_0 \ln[z - B(t)] + \bar{d}_0 \ln A_1(t) + \bar{\beta}(t) + O(z - B).$$

Отсюда следует, что найденная оценка поведения функции $S(z, t)$ в окрестности точки $B(t)$ не будет противоречить оценке (36) только при выполнении условия типа закона сохранения

$$B(t) = B(0), \quad (38)$$

которое с учетом выражения (37) для $B(t)$ и вида (23) функции $g(\zeta, t)$ записывается в виде

$$\frac{1+t}{\bar{b}} + d_0 \ln \frac{1+t}{b(t)} + d_0 \ln [1 - |b(t)|^2] = \frac{1}{\bar{b}(0)} - d_0 \ln b(0) + d_0 \ln [1 - |b(0)|^2]. \quad (39)$$

Здесь учтен уже известный вид (32) параметра $\beta(t)$ и отброшены одинаковые константы слева и справа. Соотношение (39) и есть искомый интеграл дифференциального уравнения (33).

7. О законе отбора жидкости на бесконечности

Выбор конкретной функции времени в нормировке (5) определяет вид закона отбора жидкости на бесконечности $Q(t)$. В то же время, как правило, этот закон бывает задан изначально. Заменой переменной времени t на «новое время» θ можно получить решение задачи для любого наперед заданного закона $Q(\theta) > 0$ [12].

Пусть новое время θ связано со старым t взаимнооднозначным соответствием $\theta = \theta(t)$ так, что $\theta'(t) > 0$ для любого $t > 0$, и $\theta(t) = 0$ при $t = 0$. Функция $\theta(t)$ удовлетворяет соотношению [13]

$$\int_0^t Q(t) dt = \int_0^\theta Q(\theta) d\theta. \quad (40)$$

Это выражение позволяет установить взаимнооднозначное соответствие $\theta(t)$ до тех пор, пока выполняется условие $Q(t) > 0$. Таким образом, исходя из решения задачи Хеле-Шоу вида (13), отвечающего определенному закону отбора жидкости на бесконечности $Q(t)$, с помощью выражения (40) можно получить решение задачи для любого наперед заданного закона $Q(\theta) > 0$.

Как правило, в задаче о раздуваемом пузыре отбор жидкости на бесконечности фиксирован: $Q(\theta) = Q_0$. Тогда из выражения (40) сразу следует

$$\theta(t) = \frac{1}{Q_0} \int_0^t Q(t) dt. \quad (41)$$

Очевидно, эта формула будет эффективна в том случае, когда выражение $Q(t)$ представляет собой производную по времени t некоторой функции. Непосредственный путь определения $Q(t)$ путем вычисления левой части граничного эволюционного уравнения (8) в произвольной точке плоскости ζ дает множество различных по форме, но эквивалентных по сути выражений для функции $Q(t)$. Однако ни одно из них не будет иметь вид, удобный для использования в формуле (41).

Подходящее выражение для $Q(t)$ можно получить путем дополнительного анализа уравнения (35) в бесконечной точке плоскости z . Поведение производной $\partial W/\partial z$ на бесконечности дает выражение (2). Подставляя его в уравнение (35) получим более точную, чем (36), оценку на бесконечности

$$|z| \rightarrow \infty : \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{Q(t)}{\pi z} + o(z^{-1}). \quad (42)$$

В то же время, локальный вид функции Шварца $S(z, t)$ в окрестности бесконечности можно получить путем анализа поведения функций $r(\zeta, t)$ и $g(\zeta, t)$, аналогичным проведенному в п. 6, но не в точке $\zeta = \bar{b}^{-1}(t)$, а на бесконечности.

Непосредственно из представления (23) функции $g(\zeta, t)$ с учетом уже известного вида (32) параметра $\beta(t)$ можно найти выражение $\zeta(z)$ в окрестности бесконечности:

$$(1+t)\zeta|_{|z| \rightarrow \infty} = z - \beta(t) - d_0 \ln \left[\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{b(t)} \right] = z - \beta(0) - d_0 \ln \left[-\frac{1+t}{b(t)} \right] + O(z^{-1}).$$

Подставляя его в представление (27) образа $r(\zeta, t)$ функции Шварца $S(z, t)$, можно оценить поведение на бесконечности самой функции $S(z, t)$ с точностью до $o(z^{-1})$:

$$S(z, t)|_{|z| \rightarrow \infty} = \bar{\beta}(0) + \bar{d}_0 \ln z + z^{-1} [(1+t)^2 - \bar{d}_0 D(t)] + o(z^{-1}), \quad (43)$$

где через $D(t)$ обозначено выражение

$$D(t) = \beta(0) + \frac{1+t}{b(t)} + d_0 \ln \left[-\frac{1+t}{b(t)} \right]. \quad (44)$$

Дифференцируя выражение (43) по времени, получим оценку поведение на бесконечности левой части соотношения (42)

$$|z| \rightarrow \infty : \quad \frac{\partial S}{\partial t} = z^{-1} \frac{d}{dt} [(1+t)^2 - \bar{d}_0 D(t)] + o(z^{-1}).$$

Подставляя ее непосредственно в соотношение (42), найдем вид закона $Q(t)$ в требуемой форме как частную производную по времени от некоторой функции:

$$\frac{Q(t)}{\pi} = \frac{d}{dt} [(1+t)^2 - \bar{d}_0 D(t)].$$

Отметим, что по физическому смыслу зависимость $Q(t)$ с необходимостью вещественна. В то же время, вещественность правой части найденного для нее выражения неочевидна, поскольку параметры решения d_0 , $b(t)$ и $\beta(t)$, а значит, и выражение $D(t)$, вообще говоря, комплекснозначны. Чтобы прояснить этот вопрос, используем найденный в п. 6 интеграл (39) дифференциального уравнения (33) и перепишем выражение (44) в виде

$$D(t) = -d_0 \ln [1 - |b(t)|^2] + \text{const.}$$

Подставляя его в найденный вид закона $Q(t)$, придем к другому его виду

$$\frac{Q(t)}{\pi} = \frac{d}{dt} \{ (1+t)^2 + |d_0|^2 \ln [1 - |b(t)|^2] \},$$

в котором вещественность правой части выражения уже очевидна.

Соответственно, подставляя это выражение в формулу (41), получим для функции $\theta(t)$ точную формулу

$$\theta(t) = \frac{\pi}{Q_0} \left\{ t(2+t) + |d_0|^2 \ln \left[\frac{1 - |b(t)|^2}{1 - |b(0)|^2} \right] \right\}. \quad (45)$$

С ее помощью построенное в п. 4–6 решение задачи о раздувающемся пузыре при нормировке (5) распространяется на случай фиксированного отбора жидкости на бесконечности: $Q(\theta) = Q_0$.

8. Примеры и обсуждение результатов

В конкретных расчетах эволюция единственного переменного параметра решения $b(t)$ определялась путем численного решения нелинейного и неявного относительно $b(t)$ алгебраического уравнения (39) для интервала времени $t \in [0, t_*]$, проходимого с малым шагом. Затем с помощью выражения (45) определялось конечное время $\theta_* = \theta(t_*)$, задавалось разбиение интервала времени $[0, \theta_*]$ на десять частей: $\theta_n = \theta_* n/10$, $n = 1, \dots, 10$. С помощью того же выражения (45), но уже как нелинейного и неявного уравнения относительно t , определялась последовательность $t_n = t(\theta_n)$ моментов времени t , в которые необходимо прорисовывать положение свободной границы.

Были проведены расчеты для 3-х вариантов выбора начальных значений свободных параметров:

- а) $\beta(0) = 0$, $d_0 = 0.1$, $b(0) = 0.35$, $t_* = 3.2$, $\theta_* = \theta(t_*) = 51.8421$;
- б) $\beta(0) = 0$, $d_0 = -i 0.15$, $b(0) = 0.3$, $t_* = 2.8$, $\theta_* = \theta(t_*) = 41.2872$;
- в) $\beta(0) = 0$, $d_0 = -0.1$, $b(0) = 0.3$, $t_* = 1.9598$, $\theta_* = \theta(t_*) = 24.2964$.

Соответствующие картины эволюции пузыря представлены на рис. 2, а, б, в. Звездочкой в правой части каждого рисунка отмечено положение точки $z = B(0)$. Варианты (а) и (в) характеризуются симметрией начальной и всех последующих конфигураций пузыря относительно оси x , а вариант (б) – отсутствием какой-либо симметрии. В варианте (в) в качестве t_* указано предельное время существования решения, когда на свободной границе формируется точка возврата и для последующих моментов времени решения уже не существует. В вариантах (а) и (б) решение существует для любого $t > 0$, и в качестве t_* выбран момент, когда фидорды достаточно полно сформировались, и характер дальнейшей эволюции уже не меняется.

Такая существенная разница в эволюции первоначально гладких и мало отличающихся друг от друга пузырей является проявлением существенно различной эволюции сингулярностей конформного отображения $\zeta \rightarrow z$ [8, 10]. У производной $\partial g/\partial \zeta$ функции $z = g(\zeta, t)$ будет два полюса $\zeta = b(t)$, $\zeta = 0$ и два нуля $\zeta = a_{1,2}(t)$. Последние определяются из выражения (24):

$$a_{1,2}(t) = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{d_0 b}{1+t}}.$$

Заметим, что все рассуждения, касающиеся построенного решения, правомерны лишь в случае, когда полюса $b(t)$ и нули $a_{1,2}(t)$ удовлетворяют условиям (12). Потребовать их выполнения можно только в начальный момент времени подходящим путем выбора начальных значений свободных параметров: d_0 и $b(0)$. Выбор константы $\beta(0)$, очевидно, несуществен, поскольку он определяет только начало отсчета плоскости z – поэтому принималось $\beta(0) = 0$. С течением времени положение сингулярностей отображения $\zeta \rightarrow z$ изменяется, но по непрерывности условия (12) удовлетворяются еще, по крайней мере, некоторое время.

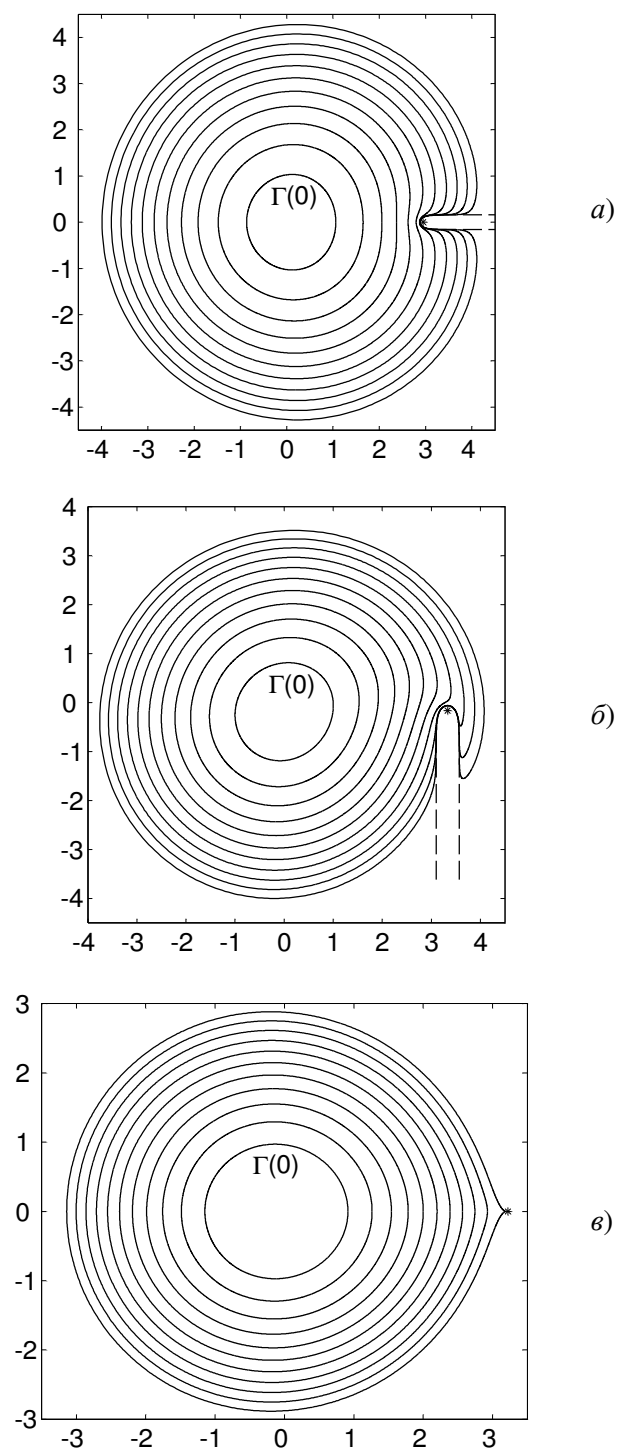


Рис. 2. Эволюция раздувающегося пузыря для вариантов (а), (б), (в) начальных значений свободных параметров

Движение полюса $b(t)$ функции $\partial g/\partial \zeta$ подчиняется дифференциальному уравнению (33). Выявить какие-либо тенденции этого движения путем непосредственного анализа уравнения затруднительно ввиду его нелинейности. Тем не менее, используя результаты п. 6, удастся установить определенную тенденцию в движении полюса $b(t)$ – со временем он обязательно будет приближаться к границе единичного круга.

Действительно, вследствие равномерного отбора жидкости по периферии лотка граница $\Gamma(t)$ бесконечной области $\Omega_z(t)$, занятой жидкостью, будет «раздуваться». С другой стороны, в соответствии с формулой (37) образ $z = B(t)$ точки $\zeta = \bar{b}^{-1}(t)$ при отображении $g(\zeta, t)$ необходимо принадлежит области $\Omega_z(t)$, и ввиду соотношения (38) этот образ неподвижен: $B(t) = B(0)$. Соответственно, «раздувающаяся» свободная граница $\Gamma(t)$ в физической плоскости будет приближаться к неподвижному образу $z = B(0)$ точки $\zeta = \bar{b}^{-1}(t)$. Тогда и сама точка $\zeta = \bar{b}^{-1}(t)$, а значит, и точка $\zeta = b(t)$, будут приближаться к образу свободной границы в плоскости ζ – единичной окружности, то есть со временем $|b(t)| \rightarrow 1$.

В то же время, перевалить точку $z = B(0)$ свободная граница не может, и соответственно, возможны два сценария дальнейшей эволюции раздувающегося пузыря. Первый сценарий: на границе образуется фиорд, причем «голова» фиорда – это сама точка $z = B(0)$. Величина $|b(t)|$ экспоненциально приближается к 1, оставаясь, тем не менее, меньше 1. При этом $\arg \{b(t)\}$ уже практически устанавливается:

$$\arg b(t) \approx \sigma_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\arg b(t)\}.$$

В представлении (23) функции $g(\zeta, t)$ в окрестности $\zeta \sim e^{i\sigma_\infty}$ такие малые изменения $b(t)$ отражаются главным образом на члене $d_0 \ln [\zeta^{-1} - b^{-1}(t)]$. Тогда для свободной границы $\Gamma(t)$ в окрестности точки $z = B(0)$ и, соответственно, $\zeta \sim e^{i\sigma}$, $\sigma \sim \sigma_\infty$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \zeta \sim e^{i\sigma}, \sigma \sim \sigma_\infty : \quad & g(\zeta, t)|_{\sigma > \sigma_\infty} - g(\zeta, t)|_{\sigma < \sigma_\infty} \sim \\ & \sim d_0 \ln (e^{-i\sigma} - e^{-i\sigma_\infty})|_{\sigma > \sigma_\infty} - d_0 \ln (e^{-i\sigma} - e^{-i\sigma_\infty})|_{\sigma < \sigma_\infty} = +i\pi d_0, \end{aligned} \quad (46)$$

причем правая часть равна именно $+i\pi d_0$, поскольку ζ хоть и близка к границе единичного круга, но все-таки принадлежит его внешности.

Выражение (46) объясняет прямолинейность «хвоста» фиорда. Полагая, что правая его часть представляет собой нормальное сечение фиорда, получим ширину фиорда $|\pi d_0|$ и направление «хвоста» фиорда от точки $z = B(0)$, задаваемое вектором $e^{i \arg d_0}$ (это направление получено поворотом на $-\pi/2$ направления $+i\pi d_0$). Заметим, что положение «хвоста» фиорда, задаваемого вектором $+i\pi d_0$, определяется уже в начальный момент времени (см. варианты (а) и (б) – пунктирные линии). Такой же характер формирования фиордов наблюдается и для течений Хеле-Шоу в лотке типа канала [9, 10, 13].

Однако при приближении свободной границы к неподвижной точке $z = B(0)$ возможен и второй сценарий эволюции, а именно, просто «развал» решения. Связано это с тем, что нули производной $\partial g/\partial \zeta$ достигают границы единичного круга: $|a_{1,2}(t)| = 1$. В результате на свободной границе образуется точка возврата, скорость течения в них становится бесконечной, и решение задачи перестает существовать, см. вариант (в).

О движении сингулярностей отображающей функции – полюса b и нулей $a_{1,2}$ – для эволюции пузырей, представленных на рис. 2, можно судить по графикам, приведенным на рис. 3 и 4. На рис. 3, а, б, в показаны зависимости $|b(\theta)|$ и $|a_{1,2}(\theta)|$, а

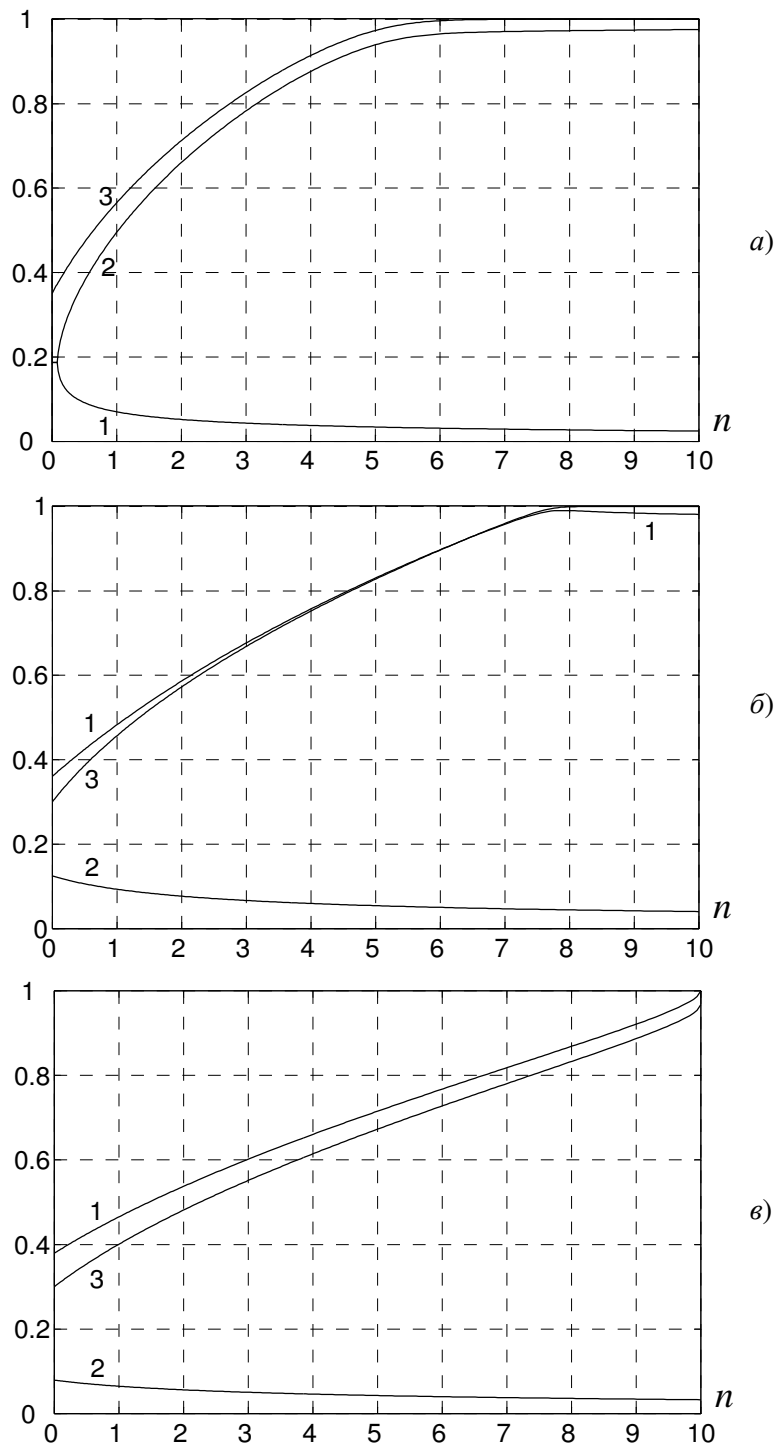


Рис. 3. Эволюция $|a_1|$ – кривая 1, $|a_2|$ – кривая 2, и $|b|$ – кривая 3, для вариантов (а), (б), (в) начальных значений свободных параметров (по горизонтали отложен номер шага по времени θ)

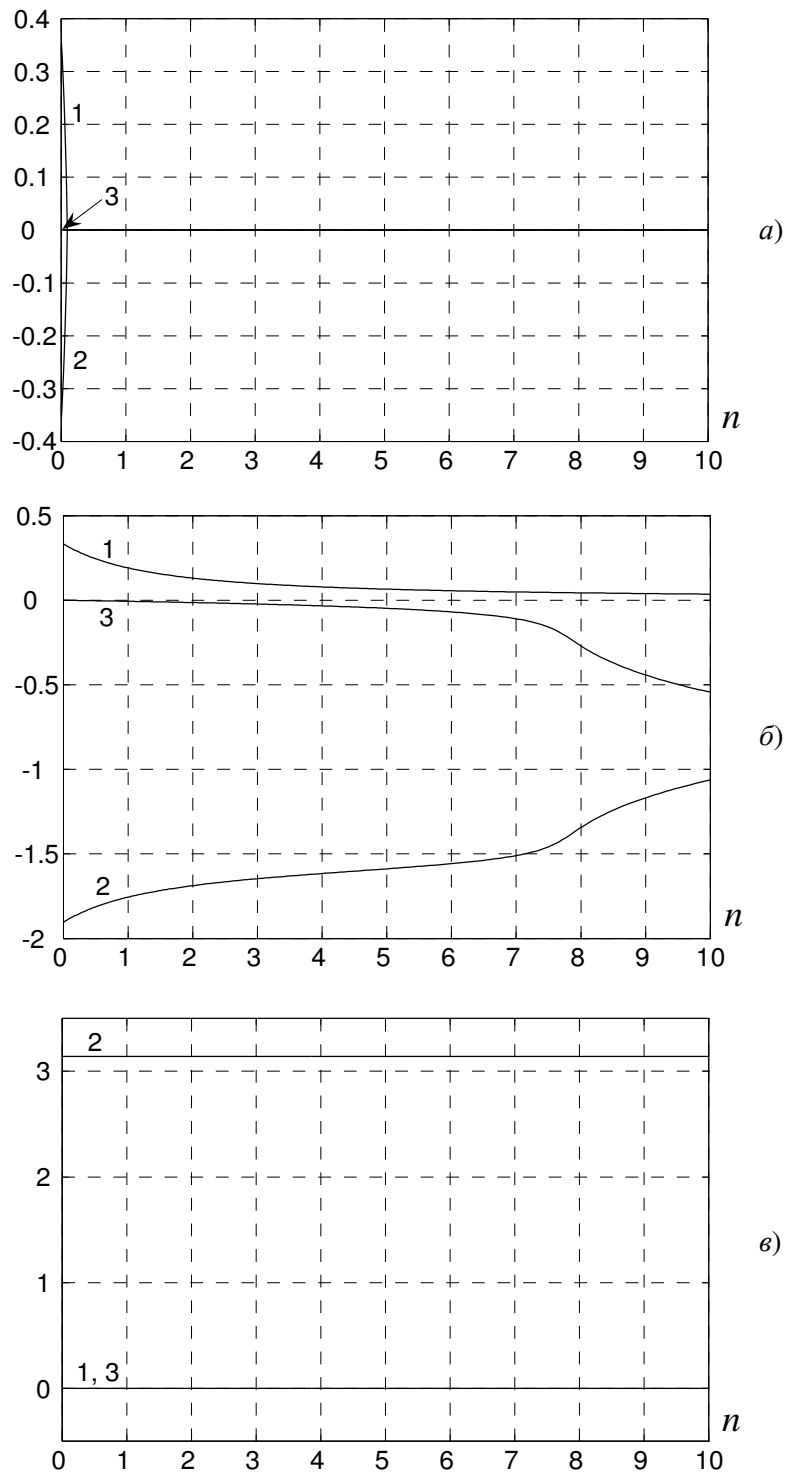


Рис. 4. Эволюция $(\arg a_1)$ – кривая 1, $(\arg a_2)$ – кривая 2, и $(\arg b)$ – кривая 3, для вариантов (а), (б), (в) начальных значений свободных параметров (по горизонтали отложен номер шага по времени θ)

на рис. 4, a , b , e – зависимости $\arg b(\theta)$ и $\arg a_{1,2}(\theta)$, соответственно, для вариантов (а), (б), (е).

Четких критериев, позволяющих на этапе выбора начальных значений свободных параметров предсказать, достигнут или не достигнут границы единичного круга нули $a_{1,2}$ производной $\partial g/\partial \zeta$, нет. Но с учетом всех известных решений задачи Хеле-Шоу [8–13] можно высказать ряд гидродинамически обоснованных предположений:

1) Все отклонения от гладкого характера эволюции межфазной границы так или иначе связаны с приближением этой границы к неподвижным образам $z = B(0)$ точек $\zeta = \bar{b}^{-1}(t)$ (последние являются симметричными отражениями относительно единичного круга $\partial\Omega_\zeta$ полюсов $b(t)$ производной $\partial g/\partial \zeta$ отображающей функции $z \rightarrow \zeta$).

2) Анализ начальных значений свободных параметров, как правило, позволяет уже на начальном этапе наметить фиорды.

3) Будет ли решение продолжимо по времени до бесконечности или развалится в какой-то момент времени, зависит от величины угла между направлением «хвоста» фиорда и направлением вектора, соединяющего, скажем, геометрический центр начальной конфигурации межфазной границы с «головой» фиорда. Если этот угол близок к нулю, фиорд сформируется полностью, и решение будет продолжимо до бесконечности. Если этот угол близок π , то с приближением границы к «голове» фиорда решение определенно развалится.

Сформировать более точно количественные условия продолжимости или непродолжимости решения по времени до бесконечности затруднительно. Например, в приводимом варианте (б) этот угол близок к $\pi/2$, максимальные значения скорости течения наблюдаются при обходе свободной границей «головы» фиорда (рис. 2, б). Соответственно, в этот же момент наблюдается максимальное значение кривизны свободной границы (большое, но конечное). Если этот угол увеличить еще немного, скажем взять $d_0 = -0.01 - i 0.15$, фиорд также начинает формироваться, но когда свободная граница огибает «голову» фиорда, скорость течения достигает бесконечного значения, и на границе образуется точка возврата – решение разваливается.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00516).

Summary

M.M. Alimov. Bubble growth at the Hele-Shaw cell with only one fiord formation.

New solution of the one-phase Hele-Shaw problem with the Saffman&Taylor boundary condition for growing bubble was found. In contrast to well-known solutions it is characterized by asymmetric property and only one fiord formation.

Литература

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1958. – V. 245, No 1242. – P. 312–329.
2. *Paterson L.* Radial fingering in a Hele Shaw cell // J. Fluid Mech. – 1981. – V. 113. – P. 513–529.
3. *Couder Y., Cardoso O., Dupuy D., Tavernier P., Thom W.* Dendritic growth in the Saffman–Taylor experiment // Europhys. Lett. – 1986. – V. 2, No 6. – P. 437–443.

4. *Окендон Дж.Р., Ховисон С.Д., П.Я. Кочина и Хеле-Шоу* в современной математике, естественных науках и технике // ПММ. – 2002. – Т. 66, Вып. 3. – С. 515–524.
5. *Полубаринова-Кочина П.Я.* К вопросу о перемещении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 47, № 4. – С. 254–257.
6. *Галин Л.А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной границей // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 47, № 4. – С. 250–253.
7. *Куфарев П.П.* Решение задачи о контуре нефтеносности для круга // Докл. АН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1333–1334.
8. *Shraiman B., Bensimon D.* Singularities in nonlocal interface dynamics // Phys. Rev. A. – 1984. – V. 30, No 5. – P. 2840–2842.
9. *Howison S.D.* Fingering in Hele-Shaw cells // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 167. – P. 439–453.
10. *Howison S.D.* Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems // Europ. J. Appl. Math. – 1992. – V. 3, No 3. – P. 209–224.
11. *Dai W-S., Kadanoff L.P., Zhou S.-M.* Interface dynamics and the motion of complex singularities // Phys. Rev. A. – 1991. – V. 43, No 12. – P. 6672–6682.
12. *Hohlov Y.E., Howison S.D.* On the classification of solutions to the zero-surface-tension model for Hele-Shaw free boundary flows // Quart. Appl. Math. – 1993. – V. 51, No 4. – P. 777–789.
13. *Алимов М.М.* Общее решение задачи Хеле-Шоу для течений в канале // ПММ. – 2006. – Т. 70, Вып. 3. – С. 384–399.
14. *Lamb H.* Hydrodynamics. – Cambridge: Univ. Press, 1932 = *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
15. *Лаверентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
16. *Davis P.J.* The Schwarz Function and its Applications. – Washington.: Math. Assoc. of America, 1974. – 228 p.
17. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 271 с.
18. *Schutz B.F.* Geometrical Methods of Mathematical Physics. – Cambridge: Univ. Press, 1982. = *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики. – М.: Мир, 1984. – 303 с.

Поступила в редакцию
03.10.06

Алимов Марс Мясумович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: Mars.Alimov@ksu.ru