

УДК 514.16

ОПЕРАТОРЫ НА СЛОЯХ СЛОЕНИЯ, ПОРОЖДЕННОГО ДЕЙСТВИЕМ \mathbb{R}

П.Н. Иваньшин

Аннотация

В работе построена инъекция

$$C_0(M)|_L \rightarrow C_0(L) \times \prod_{\mathbb{Z}} C([0, 1])$$

для многообразия M со слоением F (L – слой слоения, $C_0(X)$ – пространство непрерывных функций на X , обращающихся в нуль на бесконечности). С использованием этого вложения изучены некоторые свойства операторов на пространствах функций на слоях слоения (M, F) . Получены результаты о свойствах спектров семейства операторов типа Шредингера на слоях слоения.

В данной работе рассматривается многообразие M со слоением F , порожденным действием одномерной коммутативной группы Ли H . Поскольку действие группы однозначно продолжается до действия универсальной накрывающей группы, можем считать, что $H \cong \mathbb{R}$. Предполагается, что на (M, F) существует интегрируемая связность Эресмана E , инвариантная относительно действия H .

Мы строим вложение

$$C_0(M)|_L \rightarrow C_0(L) \times \prod_{\mathbb{Z}} C([0, 1]),$$

где $C_0(M)$ – пространство непрерывных функций на M , обращающихся в нуль на бесконечности, L – слой слоения F . С использованием этого вложения изучаем свойства операторов на пространствах функций на слоях слоения (M, F) . Получены результаты о свойствах спектров семейства операторов типа Шредингера на слоях слоения.

1. Структура $C_0(M)|_L$

Пусть (M, F) – многообразие со слоением, порожденным действием одномерной коммутативной группы Ли H и интегрируемой связностью Эресмана, инвариантной относительно действия H . Обозначим интегральное подмногообразие максимальной размерности связности Эресмана через P .

Положим $H_P = \{h \in H \mid hP = P\}$. Тогда H_P есть свободная абелева группа с одной образующей $a \in H_P$ (следовательно, $H_P \cong \mathbb{Z}$).

Теорема 1. Пусть для точки $x \in P$ последовательность $a^n x$ содержит сходящуюся подпоследовательность $a^{n_i} x \rightarrow z \in P$, $n_i \rightarrow \infty$. Пусть L – слой слоения F , проходящий через точку x . Тогда существует инъективное отображение

$$C_0(M)|_L \rightarrow C_0(L) \times \prod_{\mathbb{Z}} C([0, 1]).$$

Доказательство. Обозначим через Z множество точек $z \in P$, таких, что в любой проколотой окрестности $U(z) \subset P$ точки z лежит некоторая точка из $L \cap P$ (то есть Z – множество предельных точек $L \cap P$). Заметим, что Z является H_P -инвариантным. Действительно, $L \cap P$ H_P -инвариантно, следовательно, любой диффеоморфизм из H_P переводит множество предельных точек множества $L \cap P$ в себя.

Возьмем счетное подмножество $\{z_i \in Z\}_{i \in \mathbb{N}}$, которое всюду плотно в Z . Рассмотрим $\cup_{i \in \mathbb{N}} [0, a] z_i$ и отображение

$$\phi : C_0(M)|_{\text{Sat}(Z)} \rightarrow \prod_{\mathbb{Z}} C([0, 1]), \quad f \mapsto \{g_i(t) = f(ta z_i)\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Ясно, что ϕ – мономорфизм.

Зафиксируем открытую окрестность $U(Z)$ множества Z . Для каждой функции $f \in C_0(M)$ рассмотрим некоторое продолжение функции $f|_{\text{Sat}(Z)} : \text{Sat}(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ до функции g на M , обращающейся в нуль на дополнении к $U(Z)$. При этом, если $f|_{\text{Sat}(Z)}$ равно нулю, то положим $g = 0$.

Пусть f_0 есть ограничение функции $f - g$ на L . Покажем, что $f_0 \in C_0(L)$ (на L рассматривается топология слоя). Если это не так, то существуют последовательность $t_k \rightarrow \infty$ в \mathbb{R} , $x \in L$ и $\varepsilon_0 > 0$, такие, что $f(t_k x) > \varepsilon_0$.

Пусть последовательность $t_k x$ имеет предельную точку $p \in M$. Тогда p лежит в $\text{Sat}(Z)$. Действительно, $t_k = n_k a + s_k$, где $n_k \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_k \leq 1$. Без ограничения общности можно считать, что s_k сходится к $s_0 \in [0, a]$. Тогда $a^{n_k} x = (t_k - s_k)x$. Для любого k рассмотрим последовательность $-s_k(t_n x) \rightarrow -s_k(p)$.

Возьмем карту (U, ϕ) в окрестности точки p , тогда $(V = -s_0(U), \phi \circ (-s_0))$ – карта в окрестности $-s_0 p$. Пусть $K \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $k > K$ $t_k x \in U$, и $N \in \mathbb{N}$ таково, что для любого $n > N$ $-s_n p \in V$. Тогда можно считать, что в данных координатах норма дифференциала диффеоморфизма s_n ограничена: $\|ds_n\| < S$ для $n > N$. Обозначив через d стандартную евклидову метрику на \mathbb{R}^n , получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют n_0, k_0 , такие, что для любых $n \geq n_0$, $k \geq k_0$

$$d(-s_n(t_k x), -s_0 p) \leq d(-s_n(t_k x), -s_n p) + d(-s_n p, -s_0 p) \leq S\varepsilon + \varepsilon < (S+1)\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{k, n \rightarrow \infty} -s_k(t_n x) = -s_0 p$. Тогда $a^{n_k} x = (t_k - s_k)x \rightarrow -s_0 p \in P$ в силу замкнутости P , то есть $-s_0 p \in Z$. Но $f_0|_Z = 0$, то есть $f_0(t_k x) \rightarrow 0$ для любой последовательности $t_k x \rightarrow z \in Z$ или существует такое $K_0 \in \mathbb{N}$, что для каждого $k > K_0$ $f_0(t_k x) < \varepsilon_0$, что противоречит предположению.

Пусть $t_k x$ не имеет предельных точек. Рассмотрим такой компакт $K \subset M$, что $f|_{M \setminus K} < \varepsilon_0/2$ и $g|_{M \setminus K} < \varepsilon_0/2$. Тогда

$$\|f_0|_{M \setminus K}\|_0 = \|(f - g)|_{M \setminus K}\|_0 \leq \|f|_{M \setminus K}\|_0 + \|g|_{M \setminus K}\|_0 < \varepsilon_0.$$

В силу компактности K существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что $t_n x \in M \setminus K$ для каждого $n > N$. Снова получим противоречие с предположением.

Теперь положим $\psi : C_0(M) \rightarrow C_0(L)$, $f \mapsto f_0$. Тогда искомое инъективное отображение есть

$$f \mapsto (\psi(f), \phi(f)).$$

□

Замечание. Если множество Z из доказательства теоремы конечно, то в формулировке теоремы произведение $\prod_{\mathbb{Z}} C([0, 1])$ можно заменить произведением по конечному числу индексов.

Следствие 1. Отображение ψ равно нулю тогда и только тогда, когда $L \cap P$ не содержит изолированных точек.

Доказательство. Пусть существует хотя бы одна изолированная точка $x_0 \in L \cap P$. Возьмем функцию f со свойствами $f(x_0) \neq 0$, но $f|_{\text{Sat}(Z)} = 0$. Тогда в обозначениях, используемых в доказательстве теоремы, получаем, что соответствующая функция g равна нулю, и $f_0(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \neq 0$. Следовательно, ψ не является нулевым отображением.

Наоборот, если $L \cap P$ не содержит изолированных точек, то $\overline{L \cap P} = Z$. Следовательно, $L \subset \text{Sat}(Z)$. По построению, $g|_{\text{Sat}(Z)} = f|_{\text{Sat}(Z)}$. Тогда $\psi(f) = f_0 = (f - g)|_L = 0$. \square

Замечание. 1. В [1] было доказано (в случае произвольной размерности H), что если орбита каждой точки $p \in P$ действия группы H_P дискретна, то $C_0(M)|_L = C_0(L)$.

Для $\dim H = 1$ из дискретности орбиты следует, что множество Z из доказательства теоремы 1 пусто, и теорема 1 влечет $C_0(M)|_L = C_0(L)$.

2. Если орбита каждой точки $p \in P$ при действии H_P плотна на многообразии P и, кроме того, на P существует H_P -инвариантная риманова метрика, то для всех слоев слоения F отображение ψ равно нулю. Для $\dim H_P \geq 1$ этот случай был изучен в [1].

Если на P существует риманова метрика, относительно которой образующая a группы H_P является сжатием, то отображения ϕ и ψ одновременно не равны нулю. В [1] было доказано (для $\dim H_P \geq 1$), что $C_0(M)|_L \cong C_0(L) \oplus C_0(L_0)$, где $p_0 \in L_0$ – неподвижная точка сжатия a , L – любой другой слой.

Пример 1. Приведем схему построения векторного поля Данжуа (класса C^1) на \mathbb{T}^2 (подробно см. в [8]).

Рассмотрим иррациональную обмотку тора \mathbb{T}^2 в качестве слоения. Рассмотрим такое множество последовательно занумерованных отрезков $\{I_m = [0, l_m]; m \in \mathbb{Z}, l_m > 0\}$, что

$$1) \sum_{i \in \mathbb{Z}} l_i = l < +\infty,$$

$$2) \lim_{m \rightarrow \infty} l_m/l_{m+1} = 1.$$

В克莱им I_m на место $a^m x \in P$, $m \in \mathbb{Z}$, где $P \cong \mathbb{S}^1$ – трансверсальная к слоям параллель на торе \mathbb{T}^2 , a – отображение последовательно занумерованных отрезков I_m .

Введем отображения $f_m : I_m \rightarrow I_{m+1}$, обладающие следующими свойствами:

$$1) df_m/dt > 0;$$

2) существует такое $\delta_m > 0$, что на промежутках $[0, \delta_m]$ и $(l_m - \delta_m, l_m]$ производная $df_m/dt = 1$;

$$3) \min(1, l_m/l_{m+1}) - (1 - l_{m+1}/l_m)^2 \leq df_m/dt \leq \max(1, l_{m+1}/l_m) + (1 - l_{m+1}/l_m)^2.$$

Дополним с помощью этого отображения поворот $a : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, получим отображение $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Тогда слой L , проходящий через I_m , $m \in \mathbb{Z}$, пересекает P в нигде не плотном множестве точек, инвариантном относительно f . Замыкание же $L \cap P$ содержит множество $L' \cap P$, где слой $L' \in F$ не проходит через I_m . При этом в каждой окрестности каждой точки из $L' \cap P$ лежит бесконечно много точек из $L \cap P$, но для каждой точки $x \in L \cap P$ существует окрестность, в которой не лежит больше ни одной точки из $L \cap P$.

У любой точки $x \in I_m$ существует окрестность, которая пересекает слой L_x , проходящий через x , только в самой точке x . Следовательно, отображение ψ из доказательства теоремы 1 нетривиально.

Для любой точки $y \notin \bigcup I_m$ и для любой окрестности $U(y)$ этой точки любой слой L_x , $x \in \bigcup I_m$ пересекает $U(y)$ бесконечное число раз, следовательно, $y \in Z$. Тогда $S^1 \setminus \bigcup I_m \subset Z$, значит, отображение ϕ есть сюръективное отображение на бесконечное произведение $\prod C([0, 1])$.

Таким образом, слоение, индуцированное потоком векторного поля Данжуа, дает пример слоения, для которого отображения ϕ и ψ одновременно нетривиальны.

2. Операторы на слоях слоения, инвариантные относительно действия дискретной группы

2.1. Псевдодифференциальные операторы на слоях слоения. Обозначим через $\mathcal{S}(M)$ пространство функций Шварца на M [9]. Пусть $P : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{S}(M)$ есть линейный оператор со следующим свойствами:

1) Пусть (U, ϕ) есть карта на L . Тогда существует функция $p(t, \xi)$ из класса $S^m(\phi(U))$ (описание этого класса см. в [9]), такая, что для любой функции $f \in \mathcal{S}(M)$, такой, что носитель $\tilde{f} = \phi^*(f|_U)$ есть компактное множество в $\phi(U) \subset \mathbb{R}$, $\widetilde{Pf} = \phi^*(Pf)$, имеет вид

$$\widetilde{Pf}(t) = \int_{\mathbb{R}} p(t, \xi) \widehat{\tilde{f}}(\xi) e^{it\xi} d\xi, \quad (1)$$

где

$$\widehat{\tilde{f}}(\xi) = 1/(2\pi) \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) e^{-ix\xi} dx.$$

2) Для любого слоя L , если $f|_L = g|_L$, то $Pf|_L = Pg|_L$.

Зафиксируем точку $x \in M$, и пусть L – слой, проходящий через данную точку. По оператору P построим оператор $P_x : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. Для каждой точки $t_0 \in \mathbb{R}$ и окрестности этой точки $U(t_0)$, такой, что $\psi : U(t_0) \rightarrow U(t_0)x \subset L$, $\psi(t) = tx$ есть гомеоморфизм, рассмотрим карту $(U(t_0)x \subset L, \phi = \psi^{-1})$. По определению оператора P на этой окрестности $U(t_0)$ определена функция $p_{U(t_0)}(t, \xi)$ из класса $S^m(U(t_0))$. Для любой $f \in S(\mathbb{R})$, носитель которой содержится в $U(t_0)$, определим $P_x(f)(t)$ по формуле (1).

Группа H_P действует на \mathbb{R} левыми сдвигами: $L_h : t \rightarrow t + h$.

Лемма 1. Если для любой окрестности $U(t_0)$ описанного выше типа и $t, h + t \in U(t_0)$ имеет место равенство $p(t+h, \xi) = p(t, \xi)$, то для любой $x \in M$ оператор P_x коммутирует с каждым L_h , $h \in H_P$,

Доказательство. Достаточно показать, что для любой функции f со свойством $\text{supp } f, L_h(\text{supp } f) \subset U(t_0)$ верно равенство $P_x L_h f = L_h P_x f$.

Пусть $g(t) = f(t + h)$. Тогда

$$\begin{aligned} Pg(t) &= \int_{\mathbb{R}} p(t, \xi) \hat{g}(\xi) e^{it\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} p(t, \xi) \hat{f}(\xi) e^{i(t+h)\xi} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(t+h, \xi) \hat{f}(\xi) e^{i(t+h)\xi} d\xi = Pf(t+h). \end{aligned}$$

□

2.2. Операторы на пространстве предельно почти-периодических функций. Пусть (M, F) удовлетворяет следующему условию: орбита каждой точки $p \in P$ при действии H_P плотна на многообразии P , кроме того, на P

существует H_P -инвариантная риманова метрика. В этом случае любой слой L диффеоморфен \mathbb{R} и $C_0(M)|_L$ есть множество предельно почти-периодических функций на \mathbb{R} [1] (определение и свойства почти-периодических функций см. в [3]). В этом параграфе мы определяем псевдодифференциальный оператор на пространстве $C_0(M)|_L$.

Рассмотрим конструкцию из [4] и обобщим ее на пространства почти-периодических функций. Зададим оператор B на пространстве почти-периодических функций $C_\Lambda(\mathbb{R})$ с множеством коэффициентов Фурье Λ следующим образом:

$$B(v)(x) = \sum_{l \in \Lambda} e^{ilx} b(x, l) v_l,$$

где $v_l = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T e^{-ilx} v(x) dx$.

Теорема 2. B – непрерывный оператор на пространстве бесконечно дифференцируемых предельно почти-периодических функций $C_\Lambda^\infty(\mathbb{R})$, если для всех $k \in \mathbb{N}$ существует такое $C_k > 0$, что $\left| \frac{d^k}{dx^k} b(x, l) \right| \leq C_k$.

Доказательство. Докажем корректность определения B . Для этого достаточно доказать, что ряд из производных равномерно сходится, то есть равномерную сходимость ряда из производных, являющегося суммой рядов вида $\sum_{l \in \Lambda} l^j \frac{d^k}{dx^k} (b(x, l)) e^{ilx} v_l$. Имеем

$$\sum_{l \in \Lambda} |l^j \frac{d^k}{dx^k} (b(x, l)) e^{ilx} v_l| = \sum_{l \in \Lambda} |l^j \frac{d^k}{dx^k} (b(x, l)) e^{ilx}| \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T e^{-ilx} v(x) dx|.$$

Теперь внесем под знак предела l^j и проинтегрируем по частям. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \Lambda} |l^j \frac{d^k}{dx^k} (b(x, l)) e^{ilx} v_l| &= \\ &= \sum_{l \in \Lambda} \left| \frac{d^k}{dx^k} (b(x, l)) \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) (-il^{j-1} v(x) e^{-ilx}) \right|_{-T}^T + \\ &\quad + i \int_{-T}^T v'(x) l^{j-1} e^{-ilx} dx | \leq C_k \left\| \frac{d^j}{dx^j} v(x) \right\|, \end{aligned}$$

поскольку первое слагаемое в скобках равно нулю, а второе интегрированием по частям приведем к виду $(\frac{d^j}{dx^j} v(x))_l$.

Непрерывность оператора B следует из этой оценки при $j = k = 0$. \square

Найдем достаточные условия, при которых оператор B корректно определен на пространстве

$$L_{2,\Lambda}(\mathbb{R}) = \{f \mid \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T f^2 dx < \infty\}.$$

Рассмотрим скалярный квадрат (Bv, Bv) в $L_{2,\Lambda}(\mathbb{R})$:

$$(Bv, Bv) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T \sum_{j,k \in \Lambda} e^{i(j-k)x} b(x, j) \bar{b}(x, k) v_j \bar{v}_k dx.$$

Пусть функции $b(x, l)$ являются предельно почти-периодическими. Тогда их произведение тоже является предельно почти-периодической функцией, и пусть $(b(\cdot, j)\bar{b}(\cdot, k))_l$ есть l -й коэффициент Фурье функции $(b(\cdot, j)\bar{b}(\cdot, k))$.

Если ряд сходится равномерно, то

$$(Bv, Bv) = \sum_{j,k \in \Lambda} (b(\cdot, j)\bar{b}(\cdot, k))_{j-k} v_j \bar{v}_k.$$

Отсюда следует, что для корректного определения B на $L_{2,\Lambda}(\mathbb{R})$ достаточно выполнения следующих условий для всех наборов $(v_k)_{k \in \Lambda}$, таких, что $\sum_{k \in \Lambda} |v_k|^2 = 1$:

$$(1) \quad \left| \sum_{j,k \in \Lambda} (b(\cdot, j)\bar{b}(\cdot, k))_{j-k} v_j \bar{v}_k \right| < \infty;$$

$$(2) \quad \text{ряд } \sum_{j,k \in \Lambda} e^{i(j-k)x} b(x, j) \bar{b}(x, k) v_j \bar{v}_k \text{ сходится равномерно по } x.$$

Если же еще $b(x, j) = b(j)$, то достаточно, чтобы существовало $C \in \mathbb{R}$, $|b(j)| \leq C$, так как в этом случае $b(x, j)\bar{b}(x, k)$ в сумме

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T \sum_{j,k \in \Lambda} e^{i(j-k)x} b(x, j) \bar{b}(x, k) v_j \bar{v}_k dx$$

можно вынести за $\lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T$ и оценить сумму с учетом неравенства треугольника и того, что $\lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T e^{i(j-k)x} v_j \bar{v}_k = \delta_{jk} |v_j|^2$ как

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T \sum_{j,k \in \Lambda} e^{i(j-k)x} b(x, j) \bar{b}(x, k) v_j \bar{v}_k \right| \leq C^2 \|v\|.$$

Еще одним достаточным условием можно считать следующее:

$$(b(x, j), b(x, i)) = \delta_{ji} C_{ji},$$

где $C_{ji} \in \mathbb{R}$ и существует такое $C \in \mathbb{R}^+$, что для всех $|C_{ji}| \leq C$ $i, j \in \Lambda$. Для проверки условия снова рассмотрим сумму, определенную выше. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T \sum_{j,k \in \Lambda} e^{i(j-k)x} b(x, j) \bar{b}(x, k) v_j \bar{v}_k dx \right| &= \\ &= \left| \sum_{j,k \in \Lambda} A_{j-k} (b(x, j)\bar{b}(x, k)) v_j \bar{v}_k \right| \leq \sum_{j \in \Lambda} |A_0| |v_j|^2 \leq C. \end{aligned}$$

Допустим теперь, что существует такое $p \in \mathbb{Z}$, что $\Lambda = \{k/p^n | k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Пусть для $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$

$$|A_{i/(n_1 \dots n_k) - j/(n_1 \dots n_k)} (b(x, j)\bar{b}(x, k))| \leq \frac{1}{(1 \dots k)^2 i^2 j^2}.$$

Тогда можно оценить определенную выше сумму:

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} 1/(2T) \int_{-T}^T \sum_{j,k \in \Lambda} e^{i(j-k)x} b(x, j) \bar{b}(x, k) v_j \bar{v}_k dx \right| \leq S^3,$$

где $S = 1 + 1/4 + \dots + 1/n^2 + \dots$

2.3. Семейство операторов Шредингера

2.3.1. Спектр оператора Шредингера на пространстве представления $L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим теперь, как и ранее, многообразие M со слоением, порожденным действием коммутативной группы Ли \mathbb{R} и интегрируемой связностью Эресмана, инвариантной относительно действия этой группы. Пусть $\frac{d}{dt}$ – фундаментальное векторное поле действия группы \mathbb{R} на M .

Определим оператор Шредингера

$$\mathcal{H} : C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad \mathcal{H} = -\frac{d^2}{dt^2} f + Vf, \quad (2)$$

где $V \in C_0^\infty(M)$. Тогда для каждой $x \in M$ определен оператор Шредингера \mathcal{H}_x на $L^2(\mathbb{R})$:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (\mathcal{H}f)(t) = -f''(t) + V(tx)f(t).$$

Пусть H_P действует на P дискретно.

Теорема 3. Пусть слои слоения F компактны. Тогда спектр Λ_x оператора Шредингера \mathcal{H}_x непрерывно зависит от $x \in P$, то есть для любой точки $s \in \Lambda_x$ и любой окрестности $U(s) \subset \mathbb{R}$ существует такая окрестность $V(x) \subset P$, что для каждой $x' \in V(x)$ множество $\Lambda_{x'} \cap U(s)$ непусто.

Доказательство. На P существует мера μ , инвариантная относительно действия H_P (так как на P существует H_P -инвариантная метрика [1]). Рассмотрим разложение (в обозначениях [6])

$$L^2(\mathbb{R} \times P) = \bigoplus_P L^2(\mathbb{R}) d\mu = \bigoplus_P \int_{[0, 2\pi)} L^2([0, 2\pi], dx) \frac{d\theta}{2\pi} d\mu,$$

изоморфизм

$$L^2(\mathbb{R}, dx) \leftrightarrow \int_{[0, 2\pi)} L^2([0, 2\pi], dx) \frac{d\theta}{2\pi}$$

определен оператором

$$U : L^2(\mathbb{R}, dx) \rightarrow \bigoplus_{[0, 2\pi)} L^2([0, 2\pi], dx) \frac{d\theta}{2\pi}$$

по правилу

$$(Uf)(\theta, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\theta m} f(x + 2\pi m).$$

По теореме XIII.88 [6]

$$U\mathcal{H}_x U^{-1} = \int_{[0,2\pi)}^{\oplus} H_x(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad \text{где } \mathcal{H}_x(\theta) = -\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{\theta} + V_x.$$

По теореме XIII.89 (а) [6] спектр каждого $\mathcal{H}_x(\theta)$ дискретен. Более того, по теореме XIII.64 [6] спектр $\mathcal{H}_x(\theta)$ состоит из дискретного множества собственных значений. Из теоремы XII.11 [6] следует, что спектр $\mathcal{H}_x(\theta)$ непрерывно зависит от $x \in P$. Но спектр \mathcal{H}_x есть объединение спектров $H(\theta)$, откуда следует утверждение теоремы. \square

Заметим, что подобное утверждение без труда переносится и на случай комплекснозначных потенциалов $V : M \rightarrow \mathbb{C}$. Это можно сделать, используя результаты [7, 13].

Пусть трансверсаль $P \cong \mathbb{R}^n$ и для каждой $x \neq 0$ группа изотропии $H_x = 2^n \mathbb{Z}$ ($n \geq 1$), кроме того, $H_0 = \mathbb{Z}$. Тогда собственные значения каждого оператора $\mathcal{H}_x(\theta)$ образуют дискретное подмножество в \mathbb{R}_+ , которое отделено от нуля. Спектр оператора \mathcal{H}_x состоит из объединения интервалов $[a_m(x), b_m(x)]$, где $a_m(x) < b_m(x) < a_{m+1}(x) < b_{m+1}(x)$. В силу теоремы 3 множества

$$\Sigma'_m = \{(x, a_m(x)) \mid x \in P\} \quad \Sigma''_m = \{(x, b_m(x)) \mid x \in P\}$$

суть непрерывные поверхности в $P \times \mathbb{R}$. Из теоремы XIII.91 [6] следует, что

$$\Sigma'_m \cap \Sigma''_{m+1} = (0, b_m(0) = a_{m+1}(0))$$

для любого m .

В случае комплексного потенциала V пересечение Σ'_m и Σ''_m будет состоять из дуг в $P \times \mathbb{C}$, проектирующихся в точку $0 \in P$ при канонической проекции $P \times \mathbb{C} \rightarrow P$.

2.3.2. Пространство, на котором действует оператор H , – пространство функций на слое. Пусть все слои слоения F компактны. В [2] показано, что тогда существует почти всюду непрерывная биекция $\alpha : M \rightarrow P \times \mathbb{R}/H_P$. Эта биекция отображает множества $\{p\} \times \mathbb{R}/H_P$ на отрезки слоев, соединяющих точки из P . На \mathbb{R}/H_P рассмотрим стандартную меру, а на P рассмотрим меру μ_P , инвариантную относительно H_P , построенную по H_P -инвариантной метрике на P , построенной в [1]. Произведение этих мер дает меру на $P \times \mathbb{R}/H_P$, и с помощью биекции α эта мера переносится на M . Обозначим построенную таким образом меру на M через μ . Положим $L^2(M) = L^2(M, \mu)$.

Пусть \mathcal{H} – оператор Шредингера (2). Для каждого слоя L слоения F определим оператор

$$\mathcal{H}_L : L^2(M)|_L \rightarrow L^2(M)|_L, \quad \mathcal{H}_L(f|_L) = \mathcal{H}(f)|_L.$$

Из определения оператора Шредингера (2) ясно, что оператор \mathcal{H}_L определен корректно.

Теорема 4. *Пусть все слои слоения F компактны. Тогда спектр оператора Шредингера \mathcal{H}_L непрерывно (см. теорему 3) зависит от параметра $p \in P$.*

Доказательство. По теореме 1 имеем $C_0^\infty(M)|_L = C^\infty(L)$. Следовательно, замыкание $C_0^\infty(M)|_L$ в $L^2(L, dt)$ есть $L^2(L, dt)$.

Рассмотрим разложение

$$L^2(M) = L^2(\mathbb{R}/H_P \times P) = \bigoplus_P L^2(\mathbb{R}/H_P) d\mu_P = \bigoplus_P H' d\mu_P,$$

где $H' = l_2$, и изоморфизм $L^2(\mathbb{R}/H_P, dx) \leftrightarrow H'$ определен преобразованием Фурье. Заметим еще, что $L^2(L) = \bigoplus_{x \in L \cap P} L^2(\mathbb{R}/H_P, dx)$. Теперь доказательство аналогично доказательству теоремы 3, то есть резольвента каждого оператора на l_2 – компактный оператор (формула (152) доказательства леммы на с. 316 из [6]). Далее последовательно применим теоремы XIII.64 и XII.11 [6]. \square

Предположим теперь, что выполняются следующие условия:

- 1) действие H_P сохраняет некоторую риманову метрику на P ,
- 2) орбита каждой точки плотна.

Как доказано в [1], в этом случае алгебра $C_0(M)|_L$ состоит из предельно почти-периодических функций $C_\Lambda(L)$.

Теорема 5. *Спектр оператора Шредингера $\mathcal{H}_L = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ на L , где V есть предельно почти-периодическая функция, не зависит от слоя $L \in F$.*

Доказательство. В этом случае, как и ранее,

$$L^2(M) = L^2(\mathbb{R}/H_P \times P) = \bigoplus_P L^2(\mathbb{R}/H_P) d\mu_P = \bigoplus_P H' d\mu_P,$$

где $H' = L^2([0, a], dx) \cong l_2$.

В силу плотности слоя L на $\text{Sat}(P)$ замыкание $L_\Lambda^2(L)$ пространства бесконечно дифференцируемых предельно почти-периодических функций C_Λ^∞ на слое по норме $\lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{1/(2T) \int_{-T}^T f^2(t) dt}$ совпадает с $L^2(M)$. Далее действуем по схеме, описанной выше (см. доказательство предыдущего утверждения), применяя теоремы XIII.64 и XII.11 [6].

Спектр \mathcal{H}_L здесь состоит из замыкания объединения спектров операторов на H' над точками $L \cap P$. Но в силу замкнутости спектра и непрерывной зависимости спектров операторов от $p \in P$ спектр оператора \mathcal{H}_L не зависит от слоя L . \square

Следствие 2. *Пусть $L(p)$ – слой, проходящий через точку $p \in P$. Если $\text{codim}F = 1$, H_P сохраняет некоторую риманову метрику на P и замыкание каждого слоя компактно, то спектры семейства операторов Шредингера $\mathcal{H}_{L(p)}$ непрерывно зависят от p в смысле теоремы 3.*

Доказательство. Существование H_P -инвариантной римановой метрики в этом случае эквивалентно существованию абсолютно непрерывной H_P -инвариантной меры [1].

Если $P \cong \mathbb{R}$, то, поскольку $a \in H_P : P \rightarrow P$ – изометрия, для любого $x \in P$ орбита $(a^n x)_{n \in \mathbb{Z}}$ не имеет предельных точек. Заметим, что эта орбита компактна только в тривиальном случае $a = \text{id}$. В этом случае утверждение следствия вытекает из теоремы 4.

Пусть $P \cong \mathbb{S}^1$. Пусть на P существует H_P -инвариантная метрика. Тогда, если существует точка, у которой орбита конечна, то и орбита любой точки конечна, и все орбиты состоят из одного и того же количества элементов. В этом случае

каждый слой слоения F компактен. Тогда утверждение следствия вытекает из теоремы 4.

Если же на P нет точек с конечной при действии H_P орбитой, то мы попадаем в условия теоремы 1.3 [11], из которой следует, что действие H_P строго эргодично. Тогда из теоремы 1.1 [11] следует, что для каждой точки $x \in P$ орбита $(a^n x)_{n \in \mathbb{Z}}$ плотна в P . В этом случае утверждение следствия вытекает из теоремы 5. \square

Summary

P.N. Ivanshin. Operators on leaves of the foliation generated by locally free action of \mathbb{R} .

For a manifold M with foliation F , we construct an inclusion

$$\phi : C_0(M)|_L \rightarrow C_0(L) \times \prod_{\mathbb{Z}} C([0, 1])$$

where L is a leaf of F and $C_0(X)$ is the space of continuous functions with compact support. Using ϕ , we study properties of operators on the spaces of functions on leaves of the foliation F . We also find properties of spectra of Schrödinger-type operators on the leaves of F .

Литература

1. *Ivanshin P.N.* Structure of function algebras on foliated manifolds // Lobachevskii J. Math. – 2004. – No 14. – P. 39–54 (URL: <http://ljm.ksu.ru>).
2. *Иваньшин П.Н.* Структура алгебры ограниченных бесконечно дифференцируемых функций на группоиде многообразия со слоением, порожденным действием коммутативной группы // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 5. – С. 37–40.
3. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 496 с.
4. *Melo S.T.* Characterizations of pseudodifferential operators on the circle // Proc. of the AMS. – 1997. – V. 125, No 5. – P. 1407–1412.
5. *Милнор Дж.* Голоморфная динамика. – Ижевск: РХД, 2000. – 320 с.
6. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов. – М.: Мир, 1982. – 432 с.
7. *Рофе-Бекетов Ф.С.* О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов с периодическим коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 152, № 6. – С. 1312–1315.
8. *Тамура И.* Топология слоений. – М.: Мир, 1979. – 320 с.
9. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. – М.: Мир, 1976. – 288 с.
10. *Fell J. M. G.* The structure of algebras of operator fields // Acta Math. – 1961. – V. 106, No 3–4. – P. 233–280.
11. *Furstenberg H.* Strict ergodicity and transformation of the torus // American J. of Mathematics. – 1961. – V. LXXXIII, No 3. – P. 573–602.
12. *Шерстнёв А.Н.* Конспект лекций по математическому анализу. – Казань: Изд-во «УНИПРЕСС», 1998. – 488 с.
13. *Shin K.C.* On the shape of spectra for non-self-adjoint periodic Schrödinger operators. – arXiv:math-ph/0404015 – V. 1 – 6 Apr. 2004.

Поступила в редакцию
15.12.04

Иваньшин Петр Николаевич – научный сотрудник отдела геометрии НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Pyotr.Ivanshin@ksu.ru*