УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 153, кн. 1 Физико-математические науки *2011*

УДК 517.957

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

С.С. Алексеев, О.А. Задворнов

Аннотация

Сформулирована обобщенная задача фильтрации в неоднородной области при наличии точечного источника для жидкости, следующей многозначному закону с линейным ростом на бесконечности. При исследовании использовано аддитивное выделение особенности, связанной с сингулярностью правой части. Поле давления ищется в виде суммы известного решения некоторой линейной (ассоциированной с исходной) задачи с точечным источником в правой части и неизвестного «добавка». Относительно «добавка» задача сведена к вариационному неравенству второго рода в гильбертовом пространстве. Доказано существование решения.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, многозначный закон, неоднородная среда, точечный источник, вариационное неравенство.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию обобщенной задачи, возникающей при математическом моделировании нелинейной стационарной фильтрации несжимаемой жидкости, следующей многозначному закону фильтрации (см., например, [1, 2]), в произвольной неоднородной ограниченной области при наличии точечного источника. Предполагается, что функция, определяющая закон фильтрации, имеет линейный рост на бесконечности. Неоднородность среды моделируется зависимостью физического закона от точек области фильтрации.

В работах [3–5] обобщенная задача фильтрации с разрывным законом формулируется в виде вариационного неравенства с оператором, действующим (в случае линейного роста закона на бесконечности) из соболевского пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ (Ω – область фильтрации) в сопряженное к нему. Доказано существование решения, когда функция, описывающая плотность внешних источников, определяет линейный непрерывный функционал над пространством $W_2^{(1)}(\Omega)$.

В настоящей работе проводится исследование с менее гладкой правой частью: в неодномерном случае дельта-функция Дирака, моделирующая точечный источник, не принадлежит пространству, сопряженному к $W_2^{(1)}(\Omega)$. Обобщенная задача формулируется в виде вариационного неравенства относительно неизвестного поля давления из пространства $W_1^{(1)}(\Omega)$. Аддитивно выделяется особенность, связанная с дельта-функцией, и относительно неизвестного «добавка» задача сводится к вариационному неравенству второго рода в гильбертовом пространстве. Доказана теорема существования.

Отметим, что обобщенная задача фильтрации несжимаемой жидкости в однородной области при наличии точечного источника исследовалась в работах [6, 7]. В настоящей работе в части исследования, связанного с зависимостью физического закона от точек пространства, был использован подход, предложенный в [8].

1. Постановка задачи

Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. Фильтрация происходит в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с липшиц-непрерывной границей Γ, на которой давление считается известным, при наличии точечного источника интенсивности q в начале координат (считаем, что начало координат – внутренняя точка Ω).

Необходимо найти стационарные поля давления p и скорости v жидкости, удовлетворяющих уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} v(x) = q\,\delta(x), \quad x \in \Omega, \quad \delta - \text{ дельта-функция Дирака,} \tag{1}$$

и граничному условию

$$p\,(x) = p_0(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

в предположении, что жидкость следует многозначному закону фильтрации (см., например, [1–5])

$$-v(x) \in h(x, |\nabla p\,(x)|)\frac{\nabla p\,(x)}{|\nabla p\,(x)|}, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Считаем, что многозначная функция h может быть представлена в виде:

$$h(x,\xi) = g(x,\xi) + \vartheta(x)\,H(\xi - \beta(x)), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^1_+,$$

где $\beta : \Omega \to \mathbb{R}^1_+ \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^1 : \xi \geqslant 0\}$ и $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}^1_+$ – заданные функции из $L_\infty(\Omega)$, $H : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – многозначная функция следующего вида

$$H(\xi) \in \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ [0,1], & \xi = 0, \\ 1, & \xi > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Относительно функции $g : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ предполагаем, что выполнены условия Каратеодори [9, с. 196]:

(i) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\xi \to g(x,\xi)$ непрерывна при $\xi \in \mathbb{R}^1_+$;

(ii) для каждого $\xi \in \mathbb{R}^1_+$ функция $x \to g(x,\xi)$ измерима на Ω,

функция также имеет линейный рост на бесконечности, то есть существуют постоянная $k_1 > 0$ и функция $d_1 \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$g(x,\xi) \leqslant k_1\xi + d_1(x) \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^1_+ \quad \text{для п.в.}\, x \in \Omega, \tag{5}$$

и, кроме того, выполнено условие монотонности, неотрицательности

$$g(x,\xi) \geqslant g(x,\zeta) \quad \forall\,\xi > \zeta \geqslant 0, \quad g(x,0) = 0 \quad \text{для п.в.}\, x \in \Omega, \tag{6}$$

и коэрцитивности, то есть существуют постоянная $k_2 > 0$ и функция $d_2 \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$g(x,\xi) \geqslant k_2\,\xi + d_2(x), \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^1_+, \quad \forall\,x \in \Omega. \tag{7}$$

Кроме того, считаем, что существуют функция $d_0 \in L_2(\Omega)$, постоянные k_0, α, удовлетворяющие условиям:

$$k_0 > 0, \quad \alpha > \alpha^* = \frac{n-2}{2} \quad \text{при} \;\; n \geqslant 2, \tag{8}$$

такие, что для функции g выполнено следующее неравенство

$$|\,g(x,\xi) - k_0\,\xi\,| \leqslant c\,|\,x\,|^\alpha \xi + d_0(x), \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^1_+, \quad \forall\,x \in B_r(0) \subset \Omega. \tag{9}$$

Здесь r, c – положительные постоянные, $B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$.

Считаем также, что для почти всех $x \in \Omega$ имеет конечное значение следующий предел:

$$\lim_{\xi \to +0} \frac{g(x,\xi)}{\xi}. \tag{10}$$

Предполагаем, что функция $p_0 : \Gamma \to \mathbb{R}^1$ имеет продолжение (используем для него то же обозначение) в область Ω, удовлетворяющее условию

$$p_0 \in W_2^{(1)}(\Omega). \tag{11}$$

Перейдем теперь к построению вариационной формулировки задачи (1)–(3). Пусть p и v – решения этой задачи. Соотношение (3) означает, что для почти всех $x \in \Omega$ выполнено равенство

$$v(x) = -(g(x, |\nabla p\,(x)|) + m(x)) \frac{\nabla p\,(x)}{|\nabla p\,(x)|}, \quad m(x) \in \vartheta(x)\, H(|\nabla p\,(x)| - \beta(x)). \tag{12}$$

Из (1) очевидным образом получаем следующее вариационное равенство

$$-\int\limits_\Omega (v(x), \nabla\eta(x))\, dx = q \int\limits_\Omega \delta(x)\, \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta \in C_0^\infty(\Omega), \tag{13}$$

и с учетом (12) имеем, что

$$\begin{aligned} q\,\eta(0) = -\int\limits_\Omega (v(x), \nabla\eta(x))\, dx &= \int\limits_\Omega \left(\frac{g(x, |\nabla p\,(x)|) + m(x)}{|\nabla p\,(x)|}\, \nabla p\,(x), \nabla\eta(x) \right) dx = \\ &= \int\limits_\Omega \frac{g(x, |\nabla p\,(x)|)}{|\nabla p\,(x)|}\, (\nabla p\,(x), \nabla\eta(x))\, dx + \\ &+ \int\limits_\Omega \frac{m(x)}{|\nabla p\,(x)|}\, (\nabla p(x), \nabla(\eta(x) + p(x)) - \nabla p(x))\, dx \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_\Omega \frac{g(x, |\nabla p\,(x)|)}{|\nabla p\,(x)|}\, (\nabla p\,(x), \nabla\eta(x))\, dx + \\ &+ \int\limits_\Omega m(x)\, [\,|\nabla(\eta(x) + p\,(x))| - |\nabla p\,(x)|\,]\, dx \quad \forall\, \eta \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned} \tag{14}$$

Так как $m(x) \in \vartheta(x)\, H(|\nabla p\,(x)| - \beta(x))$, то для почти всех $x \in \Omega$ получаем, что

$$\begin{aligned} & m(x)\, [\,|\nabla(\eta(x) + p\,(x))| - |\nabla p\,(x)|\,] = \\ &= m(x)\, [\,(|\nabla(\eta(x) + p\,(x))| - \beta(x)) - (|\nabla p\,(x)| - \beta(x))\,] \le \\ &\le \vartheta(x)\, [\,\mu(|\nabla(\eta(x) + p\,(x))| - \beta(x)) - \mu(|\nabla p\,(x)| - \beta(x))\,]. \end{aligned}$$

Здесь функция $\mu : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ имеет следующий вид

$$\mu(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \ge 0, \end{cases} \tag{15}$$

и является субпотенциалом функции H, то есть

$$\mu(\zeta)-\mu(\xi)\geq \xi^*\,(\zeta-\xi)\quad \forall\,\xi^*\in H(\xi),\quad \forall\,\zeta\in\mathbb{R}^1. \tag{16}$$

Следовательно, выполнено неравенство:

$$\int\limits_\Omega m(x)\,\left[\,|\nabla(\eta(x)+p\,(x))|-|\nabla p\,(x)|\,\right]\,dx\;\leqslant$$
$$\leqslant\;\int\limits_\Omega \vartheta(x)\,\left[\,\mu(|\nabla(\eta(x)+p(x))|-\beta(x))-\mu(|\nabla p(x)|-\beta(x))\,\right]\,dx$$
$$\forall\,\eta\in C_0^\infty(\Omega). \tag{17}$$

Из неравенств (14) и (17) получаем, что если функции p, v удовлетворяют соотношениям (1)–(3), то p удовлетворяет неравенству:

$$\int\limits_\Omega \frac{g(x,|\nabla p\,(x)|)}{|\nabla p\,(x)|}\,(\nabla p\,(x),\nabla\eta(x))\;dx\;+$$
$$+\;\int\limits_\Omega \vartheta(x)\,\mu(|\nabla(\eta(x)+p(x))|-\beta(x))\,dx\;-$$
$$-\;\int\limits_\Omega \vartheta(x)\,\mu(|\nabla p(x)|-\beta(x))\,dx\geqslant q\,\eta(0)\quad\forall\,\eta\in C_0^\infty(\Omega), \tag{18}$$

В связи с этим под решением обобщенной стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей многозначному закону фильтрации, при наличии точечного источника интенсивности q будем понимать функцию (поле давления) $p\in W_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую (2) (в смысле равенства следов функций) и вариационному неравенству (18).

Ниже будет доказано существование решения этого вариационного неравенства, а также будет установлено существование поля скорости v, удовлетворяющего вариационному равенству (13) и связанного с решением задачи (2), (18) соотношением (3).

2. Существование решения

Решение задачи (18) будем искать в виде $p=\phi+u$, где функция $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ является неизвестной, а функция ϕ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases}\text{найти }\ \phi\in W_1^{(1)}(\Omega):\phi\,(x)=p_0\,(x),\quad x\in\Gamma,\\ k_0\displaystyle\int\limits_\Omega(\nabla\phi(x),\nabla\eta(x))\,dx=q\eta(0)\quad\forall\eta\in C_0^\infty(\Omega).\end{cases} \tag{19}$$

Учитывая (11), из (19) (см., например, [8]) имеем, что

$$|\,\nabla\phi(x)\,|\leqslant\frac{C_n}{|\,x\,|^{\,n-1}},\quad x\in\Omega,\quad n\geqslant 2,\quad C_n>0, \tag{20}$$

и выполнены включения

$$\phi\in W_1^{(1)}(\Omega),\quad \phi\in W_2^{(1)}(\Omega\backslash B_\varepsilon(0))\quad\forall\,\varepsilon>0,\quad n\geqslant 2. \tag{21}$$

С учетом равенства (19) задача (18) сводится к следующей:

$$\text{найти } u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega) : \int\limits_{\Omega} \frac{g(x, |\nabla(\phi+u)(x)|)}{|\nabla(\phi+u)(x)|} \, (\nabla(\phi+u)(x), \nabla\eta(x)) \, dx \, +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \vartheta(x) \, \mu(|\nabla(\eta+\phi+u)(x)| - \beta(x)) \, dx \, -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \vartheta(x) \, \mu(|\nabla(\phi+u)(x)| - \beta(x)) \, dx \; \geqslant$$

$$\geqslant \; k_0 \int\limits_{\Omega} (\nabla\phi(x), \nabla\eta(x)) \, dx \quad \forall \, \eta \in C_0^{\infty}(\Omega). \qquad (22)$$

Далее покажем, что эта задача сводится к вариационному неравенству в гильбертовом пространстве с монотонным коэрцитивным оператором, и поэтому разрешима.

Пусть $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением и соответствующей ему нормой, задаваемыми по формулам:

$$(u, w)_V = \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla w) \, dx, \quad \|u\|_V = \left[\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right]^{1/2}, \quad u, w \in V. \qquad (23)$$

Определим форму $a : V \times V \to \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{g(x, |\nabla(\phi+u)(x)|)}{|\nabla(\phi+u)(x)|} \nabla(\phi+u)(x) - k_0 \nabla\phi(x), \nabla v(x) \right) dx, \qquad (24)$$

где $\phi \in W_1^{(1)}(\Omega)$ – решение задачи (19).

Для проверки корректности этого определения так же, как и в [8], введем в рассмотрение и исследуем функцию $G : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$G(x, \lambda) = g(x, |\nabla\phi(x) + \lambda|) \frac{\nabla\phi(x) + \lambda}{|\nabla\phi(x) + \lambda|} - k_0 \nabla\phi(x), \quad x \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n. \qquad (25)$$

Поскольку функция g удовлетворяет условиям Каратеодори (i), (ii), (5) и условию (10), а функция ϕ принадлежит пространству $W_1^{(1)}(\Omega)$, то выполнены условия Каратеодори и для функции G:

(I) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\lambda \to G(x, \lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \mathbb{R}^n$

(II) для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^n$ функция $x \to G(x, \lambda)$ измерима на Ω.

Далее, пользуясь неравенствами (9), (20), получаем:

$$|G(x, \lambda)| = \left| (g(x, |\nabla\phi(x) + \lambda|) - k_0 |\nabla\phi(x) + \lambda|) \frac{\nabla\phi(x) + \lambda}{|\nabla\phi(x) + \lambda|} + k_0 \lambda \right| \; \leqslant$$

$$\leqslant \; \Big| g(x, |\nabla\phi(x) + \lambda|) - k_0 |\nabla\phi(x) + \lambda| \Big| + k_0 \, |\lambda| \; \leqslant$$

$$\leqslant \; c \, |\, x\,|^{\alpha} |\nabla\phi(x) + \lambda| + d_0(x) + k_0 \, |\lambda| \; \leqslant$$

$$\leqslant \; \frac{c \, C_n}{|\, x\,|^{\, n-1-\alpha}} + d_0(x) + (c \, |\, x\,|^{\alpha} + k_0) \, |\lambda| \; \leqslant$$

$$\leqslant \; \widetilde{d}(x) + (c \, |r|^{\alpha} + k_0) \, |\lambda| \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \, x \in B_r(0). \qquad (26)$$

Из неравенства (8) имеем, что $2\,(1+\alpha-n) > -n$, следовательно, функция $x \to |x|^{1+\alpha-n}$ принадлежит $L_2\,(B_r(0))$, а значит, и функция $\widetilde{d} = |x|^{1+\alpha-n} + d_0$ принадлежит пространству $L_2(B_r(0))$.

Пользуясь условием (5), получаем:

$$|G(x,\lambda)| = |(g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|)| + k_0|\nabla\phi(x)| \leqslant k_1|\nabla\phi(x)+\lambda| + d_1(x) + k_0|\nabla\phi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant k_1\,|\lambda| + (k_1+k_0)|\nabla\phi(x)| + d_1(x) \equiv k_1\,|\lambda| + \widetilde{d}(x)\,, \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,x\in\Omega\backslash B_r(0),$$

где функция $\widetilde{d}(x) = (k_1+k_0)|\nabla\phi(x)| + d_1(x)$ принадлежит $L_2(\Omega\backslash B_r(0))$.

Таким образом, имеем (здесь $\widetilde{k} = \max\{(c\,|r|^\alpha + k_0), k_1\}$) :

$$|a(u,v)| = \Big|\int\limits_\Omega (G(x,\nabla u(x)),\nabla v(x))\,dx\Big| \leqslant \int\limits_\Omega |G(x,\nabla u(x))|\,|\nabla v(x)|\;dx \;\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega (\widetilde{d}(x) + \widetilde{k}\,|\nabla u(x)|)\,|\nabla v(x)|\;dx \leqslant \Big(\|\widetilde{d}\,\|_{L_2(\Omega)} + \widetilde{k}\,\|u\|_V\Big)\,\|v\|_V. \quad (27)$$

Форма (24) по второму аргументу линейна и в силу неравенства (27) ограничена, а следовательно, непрерывна. Поэтому в силу теоремы Рисса – Фишера эта форма порождает оператор $A : V \to V$,

$$(Au,v)_V = a(u,v) \quad \forall\,u,\,v\in V. \quad (28)$$

Свойства этого оператора содержит следующая

Лемма 1. *Пусть функция g удовлетворяет условиям Каратеодори* (i), (ii) *и условиям* (5)–(10)*. Тогда оператор A, определенный в* (24), (28)*, является непрерывным, ограниченным, монотонным и коэрцитивным, а именно выполнено неравенство:*

$$(Au,u-v\,)_V \geqslant K\,\|u\|_V^2 - M\,(\|u\|_V\|v\|_V + \|v\|_V + 1), \quad \forall\,u,\,v\in V. \quad (29)$$

где положительные постоянные K, M не зависят от u, v.

Доказательство. Определение (28) с учетом (25) имеет вид

$$(Au,v)_V = \int\limits_\Omega (G(x,\nabla u(x)),\nabla v(x))\,dx \quad \forall\,u,\,v\in V. \quad (30)$$

Поскольку функция G удовлетворяет условиям Каратеодори (I) и (II), оператор $A : V \to V$ является непрерывным (см. [9, с. 213]).

Далее из (27), (28) получаем оценку:

$$\|Au\|_V \leqslant \|\widetilde{d}\,\|_{L_2(\Omega)} + \widetilde{k}\,\|u\|_V.$$

Таким образом, оператор A является ограниченным.

Монотонность оператора A вытекает из свойства монотонности (6) функции g:

$$(Au-Av,u-v)_V = a(u,u-v) - a(v,u-v) \;=$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\frac{g(x,|\nabla(\phi+u)|)}{|\nabla(\phi+u)|}\nabla(\phi+u) - \frac{g(x,|\nabla(\phi+v)|)}{|\nabla(\phi+v)|}\nabla(\phi+v), \nabla(\phi+u)-\nabla(\phi+v)\right)dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_\Omega (g(x,|\nabla(\phi+u)|) - g(x,|\nabla(\phi+v)|))\,(|\nabla(\phi+u)| - |\nabla(\phi+v)|)\;dx \geqslant 0.$$

Докажем теперь неравенство (29). На множестве $B_r(0)$, пользуясь неравенствами (9), (20), получаем:

$$(G(x,\lambda),\lambda) = \left(\left[\, g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|) - k_0|\nabla\phi(x)+\lambda|\,\right] \frac{\nabla\phi(x)+\lambda}{|\nabla\phi(x)+\lambda|} + k_0\lambda,\ \lambda \right) \geqslant$$

$$\geqslant\ -\Big|\, g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|) - k_0|\nabla\phi(x)+\lambda| \,\Big|\ |\lambda| + k_0\,|\lambda|^2 \ \geqslant$$

$$\geqslant\ -[c\,|\,x\,|^{\alpha}|\nabla\phi(x)+\lambda| + d_0(x)]\ |\lambda| + k_0\,|\lambda|^2 \ \geqslant$$

$$\geqslant\ \left(\frac{c\,C_n}{|\,x\,|^{\,n-1-\alpha}} + d_0(x) \right) |\lambda| + (k_0 - c\,|\,x\,|^{\alpha})\,|\lambda|^2 \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^n.$$

Выберем $\epsilon>0$ так, чтобы выполнялось неравенство $k_0 - c\,|\,x\,|^{\alpha} \geqslant \widehat{k} > 0$ при $x\in B_\epsilon(0)$; тогда

$$(G(x,\lambda),\lambda) \geqslant \widehat{k}\ |\,\lambda\,|^{\,2} + \widehat{d}_1(x)\ |\,\lambda\,| \quad \forall\,x\in B_\epsilon(0),\ \lambda\in\mathbb{R}^n, \tag{31}$$

где функция $\widehat{d}_1(x) = c\,C_n\,|\,x\,|^{\,1+\alpha-n} + d_0(x)$ принадлежит пространству $L_2(B_\epsilon(0))$.

Далее, пользуясь условиями (5) и (7), получаем

$$(G(x,\lambda),\ \lambda) = \left(g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|)\frac{\nabla\phi(x)+\lambda}{|\nabla\phi(x)+\lambda|} - k_0\nabla\phi(x),\ \lambda + \nabla\phi(x) - \nabla\phi(x) \right) \geqslant$$

$$\geqslant\ g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|)\,|\nabla\phi(x)+\lambda| - g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|)\,|\nabla\phi(x)| - k_0(\nabla\phi(x),\ \lambda) \ \geqslant$$

$$\geqslant\ k_2|\nabla\phi(x)+\lambda|^2 + d_2(x)\,|\nabla\phi(x)+\lambda| - (k_1|\nabla\phi(x)+\lambda| + d_1(x))|\nabla\phi(x)| - k_0(\nabla\phi(x),\ \lambda) \ \geqslant$$

$$\geqslant\ k_2\,|\lambda|^2 - [\,|d_2(x)| + |\nabla\phi(x)|\,(k_2+k_1+k_0)\,]\,|\lambda| \ -$$

$$-\ [\,(k_2+k_1)\,|\nabla\phi(x)| + |d_2(x)| + k_1|d_1(x)|\,]\,|\nabla\phi(x)| \ \equiv$$

$$\equiv\ k_2\,|\,\lambda\,|^{\,2} + \widehat{d}_1(x)\,|\,\lambda\,| + \widehat{d}_2(x), \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^n, \quad \forall\,x\in\Omega\backslash B_\epsilon(0), \tag{32}$$

где функция $\widehat{d}_1$ принадлежит пространству $L_2(\Omega\backslash B_\epsilon(0))$, а функция $\widehat{d}_2$ – пространству $L_1(\Omega\backslash B_\epsilon(0))$.

Из (31), (32) следует существование функций $\widehat{d}_1 \in L_2(\Omega)$, $\widehat{d}_2 \in L_1(\Omega)$ таких, что (здесь $\widehat{d} = \min\{\widehat{k}, k_2\}$)

$$(G(x,\lambda),\lambda) \geqslant \widehat{d}\ |\,\lambda\,|^{\,2} + \widehat{d}_1(x)\ |\,\lambda\,| + \widehat{d}_2(x) \quad \forall\,x\in\Omega,\ \lambda\in\mathbb{R}^n. \tag{33}$$

Используя (33) и ε-неравенство, имеем:

$$(Au,u)_V \geqslant \int\limits_\Omega \widehat{d}\ |\,\nabla u(x)\,|^{\,2} + \widehat{d}_1(x)\ |\,\nabla u(x)\,| + \widehat{d}_2(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \left(\widehat{d} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \int\limits_\Omega |\,\nabla u(x)\,|^2\,dx - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_\Omega \Big|\,\widehat{d}_1(x)\,\Big|^2\,dx - \int\limits_\Omega \Big|\,\widehat{d}_2(x)\,\Big|\,dx.$$

Подобрав достаточно малое $\varepsilon>0$ и учитывая (27), получаем неравенство (29):

$$(Au,u-v)_V = a(u,u) - a(u,v) \geqslant \left(\widehat{d} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \|u\|_V^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\|\,\widehat{d}_1\,\|^2_{L_2(\Omega)} - \|\,\widehat{d}_2\,\|_{L_1(\Omega)} \ -$$

$$-\ \left(\|\widetilde{d}\|_{L_2(\Omega)} + \|\widetilde{k}\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|u\|_V \right) \|v\|_V \geqslant K\,\|u\|_V^2 - M\,(\|u\|_V\|v\|_V + \|v\|_V + 1).$$

□

Далее определим функционал $F : V \to \mathbb{R}^1$ по формуле:

$$F(v) = \int\limits_{\Omega} \vartheta(x)\, \mu(|\nabla(v+\phi)(x)| - \beta(x))\, dx \quad \forall v \in V. \tag{34}$$

Пользуясь (15) и (21), получаем следующую оценку:

$$|F(v)| \leqslant \|\vartheta\|_{L_\infty(\Omega)}\, \|\nabla(v+\phi)\|_{L_1(\Omega)} \quad \forall v \in V,$$

следовательно, эффективной областью определения функционала F является все пространство V.

Установим теперь свойства введенного функционала.

Лемма 2. *Функционал $F : V \to \mathbb{R}^1$, определенный в* (34) *является выпуклым и липшиц-непрерывным, а именно выполнено неравенство:*

$$|\, F(u) - F(v)\, | \leqslant L\, \|u - v\|_V, \quad \forall\, u, v \in V \quad \text{где} \;\; L = (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\, \|\vartheta\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{35}$$

Доказательство. Функция μ, определенная в (15), является выпуклой и неубывающей, и поэтому для любого $\rho \in [0,1]$ и любых векторов x, y, $z \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\mu(|\,\rho\, x + (1-\rho)\, y + z\,| - \beta) \leqslant \mu(\rho\,|\,x+z\,| + (1-\rho)\,|y+z\,| - \rho\,\beta - (1-\rho)\,\beta) \leqslant$$
$$\leqslant \rho\,\mu(|\,x+z\,| - \beta) + (1-\rho)\,\mu(|y+z\,| - \beta),$$

из которого при $x = \nabla u$, $y = \nabla v$, $z = \nabla\phi$ следует, что

$$F(\rho\, u + (1-\rho)\, v) = \int\limits_{\Omega} \vartheta(x)\, \mu(|\nabla(\rho\, u + (1-\rho)\, v + \phi)(x)| - \beta(x))\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \vartheta(x)[\rho\,\mu(|\nabla(u+\phi)(x)| - \beta(x)) + (1-\rho)\,\mu(|\nabla(v+\phi)(x)| - \beta(x))]\, dx =$$
$$= \rho\, F(u) + (1-\rho)\, F(v), \quad \forall\,\rho \in [0,1], \quad \forall\, u, v \in V.$$

Для произвольных ξ, ζ выполнено неравенство $|\mu(\xi) - \mu(\zeta)| \le |\xi - \zeta|$, а значит,

$$|F(u) - F(v)| \leqslant \int\limits_{\Omega} \vartheta(x)\, |\mu(|\nabla(u+\phi)(x)| - \beta(x)) - \mu(|\nabla(v+\phi)(x)| - \beta(x))|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \vartheta(x)|\,|\nabla(u+\phi)(x)| - |\nabla(v+\phi)(x)|\,|dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \vartheta(x)|\nabla(u-v)(x)|dx \leqslant$$
$$\leqslant \|\vartheta\|_{L_\infty(\Omega)}\, (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\, \|u - v\|_V,$$

то есть функционал F является липшиц-непрерывным. □

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (i), (ii), (5)–(10). *Тогда:*

1) *Множество решений задачи* (22) *непусто, выпукло и замкнуто.*

2) *Если p – решение задачи* (18), *то $p = \phi + u$, где функция u является некоторым решением задачи* (22), *а ϕ – решение задачи* (19).

Доказательство. Очевидным образом устанавливается эквивалентность задачи (22) следующей вариационной задаче:

$$\text{найти } u \in V : (Au, v-u)_V + F(v) - F(u) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in V. \tag{36}$$

Из леммы 1 следует выпуклость и слабая полунепрерывность снизу функционал $F : V \to \mathbb{R}^1$ (см. [10]). По лемме 2 оператор $A : V \to V$ – монотонный, непрерывный и коэрцитивный. Поэтому существование решения вариационного неравенства (36), выпуклость и замкнутость множества его решений, а следовательно, и задачи (22), устанавливается стандартным образом (см., например, [10, 11]).

Пусть p – решение задачи (18), ϕ – решение задачи (19). Положив $u = p - \phi$, получаем, что u является решением задачи (22). □

3. Существование поля скоростей фильтрации

Определим функционал $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ по формуле $\varphi(y) = \widehat{\vartheta}\,\mu(|y| - \widehat{\beta})$, где функция μ задается соотношением (15), а $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\beta}$ – неотрицательные константы. Так же, как и при доказательстве леммы 2, устанавливается, что функционал φ является выпуклым и липшиц-непрерывным, следовательно, субдифференцируемым.

Докажем, что

$$\varphi(y+z) - \varphi(y) \geqslant (y^*, z) \quad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^n, \tag{37}$$

где $y^* \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению

$$|y|\, y^* \in \widehat{\vartheta}\, H(|y| - \widehat{\beta})\, y, \tag{38}$$

которое определяет субдифференциал $\partial\varphi(y)$ функционала φ в точке y.

Справедливость (38) при $\widehat{\beta} = 0$ следует непосредственно из вида субдифференциала нормы (см. [12, с. 58]).

Пусть $\widehat{\beta} > 0$. Положим

$$t(y) = \begin{cases} |y| - \widehat{\beta}, & |y| \geqslant \widehat{\beta}, \\ \widehat{\beta} - \sqrt{2\,\widehat{\beta}^2 - |y|^2}, & |y| < \widehat{\beta}. \end{cases}$$

Заметим, что функционал $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ дифференцируем по Фреше, в частности $t'(y) = y/|y|$ при $|y| \geqslant \widehat{\beta}$.

Ясно, что $\varphi(y) = \widehat{\vartheta}\,\mu(t(y))$. В силу предложения 1 [12, с. 221] и теоремы 2 [12, с. 223] имеем равенство

$$\partial\varphi(y) = \widehat{\vartheta}\ [t'(y)]^*\, \partial\mu(t(y))$$

и с учетом (16) получаем $\partial\varphi(y) = \widehat{\vartheta}\, H(|y| - \widehat{\beta})\, y/|y|$, то есть (38).

Теорема 2. *Пусть p – решение задачи* (18), *тогда существует вектор-функция $v : [\Omega]^n \to \mathbb{R}^1$ (поле скоростей), принадлежащая пространству $[L_1(\Omega)]^n$, такая, что выполнено включение* (3) *и вариационное равенство* (13).

Доказательство. Введем функционал $\Phi : Y = [L_1(\Omega)]^n \to \mathbb{R}^1$ по формуле

$$\Phi(\chi) = \int\limits_{\Omega} \vartheta(x)\, \mu(|\chi(x)| - \beta(x))\, dx, \quad \chi \in Y.$$

Очевидно, что функционал Φ является выпуклым, непрерывным, следовательно, субдифференцируемым, и $\operatorname{dom}\Phi = Y$. Пусть $\chi^* \in \partial\Phi(\chi) \subset Y^*(= [\,L_\infty(\Omega)\,]^n)$:

$$\int\limits_\Omega \vartheta(x)\,[\,\mu(|(\chi+\psi)(x)|-\beta(x)) - \mu(|\psi(x)|-\beta(x))\,]\,dx \geqslant \int\limits_\Omega (\chi^*,\psi)\,dx \quad \forall\,\psi\in Y. \tag{39}$$

Последнее неравенство выполняется тогда и только тогда, когда для произвольной функции $\psi\in Y$

$$\vartheta(x)\,[\,\mu(|(\chi+\psi)(x)|-\beta(x)) - \mu(|\psi(x)|-\beta(x))\,] \geqslant (\chi^*,\psi) \text{ почти всюду на } \Omega. \tag{40}$$

Действительно, пусть найдутся функция $\psi_0\in Y$ и множество Ω_0, $\operatorname{mes}\Omega_0>0$ такие, что

$$\vartheta(x)\,[\,\mu(|(\chi+\psi)(x)|-\beta(x)) - \mu(|\psi(x)|-\beta(x))\,] < (\chi^*,\psi_0) \text{ почти всюду на } \Omega_0.$$

Положим

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0(x), & x\in\Omega_0,\\ 0, & x\in\Omega\setminus\Omega_0.\end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_\Omega \vartheta(x)\,[\,\mu(|(\chi+\psi)(x)|-\beta(x)) - \mu(|\psi(x)|-\beta(x))\,] - (\chi^*(x),\psi(x))\,dx = $$
$$= \int\limits_{\Omega_0} \vartheta(x)\,[\,\mu(|(\chi+\psi)(x)|-\beta(x)) - \mu(|\psi(x)|-\beta(x))\,] - (\chi^*(x),\psi(x))\,dx < 0,$$

что противоречит (39).

Зафиксируем некоторую точку $x\in\Omega$, для которой выполнено неравенство (40), положим $\widehat{\vartheta}=\vartheta(x)$, $\widehat{\beta}=\beta(x), y=\chi(x)$. Тогда из (40) следует, что имеет место неравенство (37), где $y^*=\chi^*(x)$. Следовательно, в силу (38) найдется такое число $\widehat{m}=\widehat{m}(x)\in H(|\chi(x)|-\beta)$, что выполнено равенство:

$$|\chi(x)|\,\chi^*(x) = \vartheta(x)\,\widehat{m}(x)\,\chi(x). \tag{41}$$

Перебирая все точки x, для которых выполнено неравенство (40), определим функцию $\widehat{m}:\Omega\to\mathbb{R}^1$, удовлетворяющую равенству (41) почти всюду на Ω и, очевидно, принадлежащую пространству $L_\infty(\Omega)$.

Пусть теперь u – решение задачи (22), а значит, удовлетворяет вариационному неравенству (36). Таким образом, выполнено включение

$$-Au\in\partial\,F(u). \tag{42}$$

Введем функцию $\psi=\nabla\phi\in Y$. Тогда $F(u)=\Phi(\psi+\Lambda u)$, где $\Lambda\equiv\nabla: V\to Y$ – линейный непрерывный оператор. Имеем (см. [10])

$$\partial F(u) = \Lambda^*\partial\Phi(\psi+\Lambda u).$$

Таким образом, соотношение $u^*\in\partial F(u)$ означает существование такой функции $\widehat{m}\in L_\infty(\Omega)$, $\widehat{m}(x)\in H(|\psi(x)+\nabla u(x)|-\beta(x))$ для п.в. $x\in\Omega$, что

$$\int\limits_\Omega (\nabla u^*(x),\nabla\eta(x))\,dx = \int\limits_\Omega \left(\vartheta(x)\,\widehat{m}(x)\frac{\psi(x)+\nabla u(x)}{|\psi(x)+\nabla u(x)|},\nabla\eta(x)\right)dx \quad \forall\,\eta\in V. \tag{43}$$

Из этого соотношения и (42) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \left(g(x, |\nabla(\phi+u)(x)|) \frac{\nabla(\phi+u)(x)}{|\nabla(\phi+u)(x)|} - k_0 \nabla\phi(x), \nabla\eta(x) \right) dx + \\ + \int\limits_{\Omega} \left(\vartheta(x)\, \widehat{m}(x) \frac{\nabla(\phi+u)(x)}{|\nabla(\phi+u)(x)|}, \nabla\eta(x) \right) dx = 0 \quad \forall \eta \in V. \quad (44)$$

Отсюда с учетом (19) получаем вариационное равенство (13), где

$$v(x) = [g(x, |\nabla p(x)|) + \vartheta(x)\, \widehat{m}(x)] \, \frac{\nabla p(x)}{|\nabla p(x)|}.$$

Пользуясь неравенством (5), получаем оценку

$$|v(x)| \leqslant k(x)|\nabla(\phi+u)(x)| + d_1(x) + |\vartheta(x)\, \widehat{m}(x)| \quad \text{для п.в.} \ \ x \in \Omega,$$

следовательно, $v \in [\, L_1(\Omega)\,]^n$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-01-97015, 10-01-00728).

Summary

S.S. Alekseev, O.A. Zadvornov. Existence of Solutions of Filtration Problems with Multi-Valued Law in Nonhomogeneous Media in the Presence of a Point Source.

We formulate a generalized problem of filtration of incompressible fluid governed by a multi-valued law with a linear growth at infinity in nonhomogeneous media in the presence of a point source. We used an additive selection of a feature associated with the singularity of the right side. The solution is represented in the form of the sum of the known solution of a certain linear problem with a point source in the right side, and the unknown term. As for the unknown term, the problem is reduced to the solution of mixed variational inequality in Hilbert space. The existence theorem is proved.

Key words: nonlinear filtration, multi-valued law, nonhomogeneous media, point source, variational inequality.

Литература

1. *Алишаев М.Г.* О стационарной фильтрации с начальным градиентом // Теория и практика добычи нефти. – М.: Недра, 1968. – С. 202–211.

2. *Бернандинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория аномальных жидкостей. – М.: Наука, 1975. – 199 с.

3. *Карчевский М.М., Бадриев И.Б.* Нелинейные задачи теории фильтрации с разрывными монотонными операторами // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР, 1979. – Т. 10, № 5. – С. 63–78.

4. *Лапин А.В.* Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19, № 3. – С. 689–700.

5. *Ляшко А.Д., Бадриев И.Б., Карчевский М.М.* О вариационном методе для уравнений с разрывными монотонными операторами // Изв. вузов. Матем. – 1978. – № 11. – С. 63–69.

6. *Задворнов О.А.* Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника// Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 1. – С. 58–63.

7. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 874–880.

8. *Задворнов О.А.* Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 125, кн. 1. – С. 155–163.

9. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.

10. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.

11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

12. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Поступила в редакцию
20.12.10

Алексеев Сергей Сергеевич – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *SAleksey@ksu.ru*

Задворнов Олег Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Oleg.Zadvornov@ksu.ru*