УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 147, кн. 1 Физико-математические науки *2005*

УДК 514.16

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ЛАГРАНЖЕВА ПРОСТРАНСТВА

М.В. Сорокина

Аннотация

На касательном расслоении обобщенного лагранжева пространства определена почти симплектическая структура. Доказано, что естественное инфинитезимальное преобразование является инфинитезимальным автоморфизмом почти симплектической структуры тогда и только тогда, когда оно является инфинитезимальным движением обобщенного лагранжева пространства. Если произвольные инфинитезимальные автоморфизмы сохраняют некоторую линейную связность и расслоенную структуру, то размерность алгебры Ли таких автоморфизмов не превосходит $n(3n+5)/2$, где n – размерность базисного многообразия.

---

1. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, TM – касательное расслоение над M, $\pi : TM \to M$ – каноническая проекция, (x^i) – локальные координаты на M, $(x^A) = \left(x^i, x^{n+i} = y^i\right)$ – естественные локальные координаты на TM. Задание невырожденного симметрического тензорного поля

$$g = g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j \tag{1}$$

определяет на M обобщенную лагранжеву структуру, а $\mathcal{L}^n = (M, g)$ называется обобщенным лагранжевым пространством.

Пусть ∇ – усеченная связность Картана регулярного обобщенного лагранжева пространства $\mathcal{L}^n$ с компонентами $\Gamma^{*k}_{ij}(x,y)$. Связность Картана является симметрической и согласована с метрикой (1): $\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^{*k}_{ji}$, $\nabla g = 0$. Связность ∇ индуцирует нелинейную связность с коэффициентами $N^k_i = \Gamma^{*k}_{ij} y^j$. Векторные поля $(\delta_A) = (\delta_i, \partial_{n+i})$, где $\delta_i = \partial_i - N^k_i \partial_{n+k}$, $\partial_{n+i} = \partial/\partial y^i$, образуют локальный базис векторных полей на TM. Коммутаторы векторных полей имеют вид

$$[\delta_A, \delta_B] = R^C_{AB}\delta_C,$$

где

$$R^{n+k}_{ij} = \delta_j N^k_i - \delta_i N^k_j, \quad R^{n+k}_{in+j} = N^k_{i\cdot j}, \quad R^{n+k}_{n+ij} = -N^k_{j\cdot i},$$
$$R^k_{ij} = R^k_{in+j} = R^k_{n+ij} = R^k_{n+in+j} = R^{n+k}_{n+in+J} = 0.$$

Корепер, дуальный $\{\delta_A\}$, состоит из форм $\delta x^A = (dx^i, \delta y^i)$, где $\delta y^i = dy^i + N^k_i dx^k$. Заметим, что коэффициенты Γ^{*k}_{ij} связности Картана определяются из следующих соотношений: $\nabla_{\delta_i}\partial_j = \Gamma^{*k}_{ij}\partial_k$.

Рассмотрим на TM риманову метрику G типа Сасаки, определенную условиями

$$\begin{aligned} G(X^h, Y^h) = G(X^v, Y^v) = g(X, Y)^v, \\ G(X^h, Y^v) = G(X^v, Y^h) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где X^h, Y^h, X^v, Y^v – горизонтальные и вертикальные лифты векторных полей с базы M на касательное расслоение TM. В координатах метрика (2) имеет вид

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j. \tag{3}$$

Распределение горизонтальных площадок связности ∇ определяет на TM каноническую комплексную структуру J:

$$JX^h = X^v, JX^v = -X^h. \tag{4}$$

Метрика (2) является эрмитовой относительно (4), т. е. $G(J\widetilde{X}, J\widetilde{Y}) = G(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ для любых векторных полей $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ на TM, и мы имеем на TM почти эрмитову структуру (G, J). Фундаментальная 2-форма этой структуры определяется следующим образом: $\Omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = G(\widetilde{X}, J\widetilde{Y})$. Форма Ω определяет на TM почти симплектическую структуру

$$\begin{aligned} \Omega(X^h, Y^h) = &\Omega(X^v, Y^v) = 0, \\ \Omega(X^h, Y^v) = &- \Omega(X^v, Y^h) = -g(X, Y)^v. \end{aligned} \tag{5}$$

В координатах форма Ω имеет вид

$$\Omega = g_{ij} \delta y^i \wedge dx^j. \tag{6}$$

Если форма Ω замкнута: $d\Omega = 0$, то она определяет на TM симплектическую структуру. В частности, если метрика (1) риманова или финслерова, то Ω – симплектическая структура на TM.

На TM рассмотрим линейную связность $\widetilde{\nabla}$. В случае, когда метрика (1) риманова, связность ∇ есть связность Леви-Чивита и $\widetilde{\nabla}$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{\nabla}_{X^h} Y^h = (\nabla_X Y)^h, \widetilde{\nabla}_{X^v} Y^h = \widetilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0, \widetilde{\nabla}_{X^h} Y^v = (\nabla_X Y)^v. \tag{7}$$

Если (1) – обобщенная лагранжева метрика, то

$$\widetilde{\nabla}_{X^h} Y^h = (\nabla_{X^h} Y)^h, \widetilde{\nabla}_{X^v} Y^h = \widetilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0. \widetilde{\nabla}_{X^h} Y^v = (\nabla_{X^h} Y)^v. \tag{8}$$

Если $\widetilde{\nabla}_{\delta_A} \delta_B = \widetilde{\Gamma}^C_{AB} \delta_C$, то ненулевые компоненты этой связности имеют вид

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \widetilde{\Gamma}^{n+k}_{in+j} = \Gamma^{*k}_{ij}.$$

Связность $\widetilde{\nabla}$ согласована с формой Ω, т. е. $\widetilde{\nabla}\Omega = 0$. Действительно, в локальных координатах имеем

$$\delta_C \Omega_{AB} - \widetilde{\Gamma}^P_{CA} \Omega_{PB} - \widetilde{\Gamma}^P_{CB} \Omega_{AP}. \tag{9}$$

Записывая уравнения (9) для различных серий индексов и учитывая, что $\nabla_k g_{ij} = 0$ приходим к выводу, что $\widetilde{\nabla}_C \Omega_{AB} = 0$.

2. Векторное поле $\widetilde{X} = \xi^A \delta_A$ на TM является инфинитезимальным автоморфизмом почти симплектической структуры Ω, если производная Ли от Ω вдоль $\widetilde{X}$ равна нулю: $L_{\widetilde{X}}\Omega = 0$. В адаптированном репере (δ_A) эти уравнения имеют вид

$$\xi^C(\delta_C \Omega_{AB} - \Omega_{PB} R^P_{CA} - \Omega_{AP} R^P_{CB}) + \delta_A \xi^P \Omega_{PB} + \delta_B \xi^P \Omega_{AP} = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим автоморфизмы почти симплектической структуры, состоящие из преобразований базы, продолженных на касательное расслоение. В этом случае вектор инфинитезимального преобразования есть полный лифт некоторого поля $X = \xi^i(x)\partial_i$ базы

$$X^C = \xi^i(x)\delta_i + y^k \nabla_k \xi^i \partial_{n+i}. \tag{11}$$

Если X^C есть автоморфизм структуры Ω, то $L_{X^C}\Omega = 0$. Запишем уравнения (10) для различных серий индексов

$$\xi^C(\delta_C g_{ij} - g_{kj} R^k_{Ci} - g_{ik} R^{n+k}_{Cn+j}) + \delta_i \xi^k g_{kj} + \partial_{n+j} \xi^{n+k} g_{ik} = 0, \tag{12}$$

$$\xi^C(\delta_C g_{ij} - g_{kj} R^{n+k}_{Cn+i} - g_{ik} R^k_{Cj}) + \partial_{n+i} \xi^{n+k} g_{kj} + \delta_j \xi^k g_{ik} = 0, \tag{13}$$

$$\xi^C(g_{kj} R^{n+k}_{Ci} - g_{ik} R^{n+k}_{Cj}) + \delta_i \xi^{n+k} g_{kj} - \delta_j \xi^{n+k} g_{ik} = 0, \tag{14}$$

$$\xi^C(g_{kj} R^k_{Cn+i} - g_{ik} R^n_{Cn+j}) + \partial_{n+i} \xi^k g_{kj} - \partial_{n+j} \xi^k g_{ik} = 0. \tag{15}$$

Уравнения (12) и (13) эквивалентны уравнениям

$$L_X g_{ij} = 0, \tag{16}$$

(14) эквивалентны уравнениям

$$g_{kj} L_X N^k_i - g_{ik} L_X N^k_j = 0. \tag{17}$$

Уравнения (15) выполняются тождественно.

Из уравнения (16) следует $L_X \Gamma^{*k}_{ij} = 0$, значит, $L_X N^k_i = 0$. Таким образом, (17) являются следствиями (16). Следовательно, (10) выполнено тогда и только тогда, когда имеет место (16). Поэтому справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы полный лифт X^C векторного поля X был инфинитезимальным автоморфизмом почти симплектической структуры Ω на TM, необходимо и достаточно, чтобы векторное поле X было инфинитезимальным движением пространства $\mathcal{L}^n$.*

Из теоремы 1 следует, что максимальная размерность алгебры инфинитезимальных автоморфизмов почти симплектической структуры Ω равна максимальной размерности алгебры Ли движений регулярного пространства $\mathcal{L}^n$, т. е. равна $n(n+1)/2$.

3. Рассмотрим произвольные автоморфизмы на TM, сохраняющие слои. Как известно, такие автоморфизмы определяются проектируемыми векторными полями на TM [1]. Векторное поле $\widetilde{X}$ на TM является проектируемым, если $d\pi\widetilde{X}$ есть векторное поле на M. В этом случае в координатах поле $\widetilde{X}$ имеет вид

$$\widetilde{X} = \xi^i(x)\delta_i + \xi^{n+i}(x,y)\partial_{n+i}. \tag{18}$$

Потребуем, чтобы автоморфизмы, сохраняющие слои, оставляли инвариантной вполне приводимую линейную связность $\widetilde{\nabla}$, т. е.

$$L_{\widetilde{X}} \widetilde{\Gamma}^C_{AB} = 0. \tag{19}$$

Запишем уравнения (10) в ковариантных производных

$$\xi^C(\widetilde{\nabla}_C\Omega_{AB} - \Omega_{PB}S^P_{AC} - \Omega_{AP}S^P_{BC}) + \widetilde{\nabla}_A\xi^P\Omega_{PB} + \widetilde{\nabla}_B\xi^P\Omega_{AP} = 0, \tag{20}$$

где $S^C_{AB} = \widetilde{\Gamma}^C_{AB} - \widetilde{\Gamma}^C_{BA} - R^C_{AB}$ – компоненты тензора кручения связности $\widetilde{\nabla}$.

Пусть

$$\xi^C_B = \widetilde{\nabla}_B\xi^C - \xi^P S^C_{BP}, \tag{21}$$

тогда уравнения (20) примут вид

$$\Omega_{CA}\xi^C_B + \Omega_{AC}\xi^C_B = 0. \tag{22}$$

Аналогично, заменив в (19) частные производные ковариантными, получим

$$\widetilde{\nabla}_A\widetilde{\nabla}_B\xi^C - \widetilde{\nabla}_A\xi^P S^C_{BP} - \xi^P\widetilde{\nabla}_A S^C_{BP} + \xi^P K^C_{ABP} = 0, \tag{23}$$

где K^C_{ABP} – компоненты тензора кривизны связности $\widetilde{\nabla}$. С учетом (21) уравнения (23) примут вид

$$\widetilde{\nabla}_A\xi^C_B + \xi^P K^C_{ABP} = 0. \tag{24}$$

Наряду с $2n$ неизвестными функциями $\xi^C(x,y)$ – компонентами инфинитезимального автоморфизма – введем новые функции

$$\xi_{AB} = \xi^C_A\Omega_{CB}. \tag{25}$$

В силу того, что $\widetilde{\nabla}$ согласована с Ω, уравнения (24) примут вид

$$\widetilde{\nabla}_A\xi_{BC} + \xi^P K_{ABCP} = 0, \tag{26}$$

где $K_{ABCP} = \Omega_{SC}K^S_{ABP}$.

Из (21), (22), (25), (26) следует, что для того чтобы векторное поле $\widetilde{X}$ являлось автоморфизмом почти симплектической структуры, сохраняющим связность $\widetilde{\nabla}$, необходимо и достаточно, чтобы функции ξ^A и ξ_{AB} являлись решением системы уравнений

$$\xi_{AB} - \xi_{BA} = 0, \tag{27}$$

$$\widetilde{\nabla}_B\xi^C = \Omega^{CP}\xi_{PB} + \xi^P S^P_{BC}, \tag{28}$$

$$\widetilde{\nabla}_A\xi_{BC} = -\xi^P K_{ABCP}, \tag{29}$$

где $\Omega^{CP}\Omega_{PA} = \delta^C_A$. Уравнения (28) и (29) представимы в виде, разрешенном относительно первых производных от $2n + 4n^2$ неизвестных функций ξ^A и ξ_{AB}, а уравнения (27) накладывают на функции ряд алгебраических условий. Если условия интегрируемости уравнений (28) и (29) выполняются тождественно, то как известно из [2], общее решение зависит от $r = 2n + 4n^2 - s$ произвольных постоянных, где s – число независимых алгебраических условий в (27).

Учитывая, что векторное поле $\widetilde{X}$ проектируемо на базу, из (21) следует, что $\xi^k_{n+j} = 0$ (n^2 условий). Запишем уравнения (27) для различных серий индексов:

$$g_{ik}\xi^{n+k}_j - g_{kj}\xi^{n+k}_i = 0, \tag{30}$$

$$g_{ik}\xi^k_j + g_{kj}\xi^{n+k}_{n+i} = 0, \tag{31}$$

$$g_{ik}\xi^{n+k}_{n+j} + g_{kj}\xi^k_i = 0, \tag{32}$$

$$g_{ik}\xi^k_{n+j} - g_{kj}\xi^k_{n+i} = 0. \tag{33}$$

Уравнения (30) накладывают $n(n-1)/2$ условий, уравнения (31) и (32) зависимы и определяют n^2 связей, а (33) для проектируемого поля выполнены тождественно. Таким образом, $s = (n-1)/2 + 2n^2$. Следовательно, $r = n(3n+5)/2$. Имеет место

Теорема 2. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов почти симплектической структуры* Ω*, сохраняющих слои касательного расслоениея и линейную связность* $\widetilde{\nabla}$*, не превосходит* $n(3n+5)/2$.

Заметим, что в случае, когда $\widetilde{X}$ – произвольное векторное поле на касательном расслоении, уравнения (30)–(33) накладывают на неизвестные функции ξ^A, ξ_{AB} $s = n(n-1) + n^2$ алгебраических условий, следовательно, $r = 2n^2 + 3n$.

Summary

M.V. Sorokina. On infinitesimal automorphisms of almost symplectic structures on tangent bundle of generalized Lagrangian space.

Almost symplectic structure is defined on tangent bundle of generalized Lagrange space. It is proved that natural infinitesimal transformation is infinitesimal automorphism of almost symplectic structure if and only if it is infinitesimal motion of generalized Lagrange space. If arbitrary infinitesimal automorphism conserves certain linear connection and foliate structure then dimensionality of algebra Lie of automorphisms not exceed $n(3n+5)/2$, n – dimensionality of basis manifold.

Литература

1. *Шапуков Б.Н.* Автоморфизмы расслоенных пространств // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982. – Вып. 14. – С. 97–108.
2. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947.

Поступила в редакцию
06.12.04

Сорокина Марина Валерьевна – кандидат физико-математических наук, сотрудник кафедры геометрии Пензенского государственного педагогического университета.

E-mail: *Sorokina_m@list.ru*