

УДК 517.5

## НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОНСТАНТЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ И МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРАНИЦЫ

*Д.А. Абрамов***Аннотация**

В статье рассмотрена задача приближенного вычисления коэффициента жесткости кручения для односвязных областей. Сформулирован подход к определению функции расстояния, предложен численный метод вычисления момента инерции относительно границы. При помощи численного эксперимента была улучшена оценка для константы эквивалентности коэффициента жесткости кручения и момента инерции относительно границы.

**Ключевые слова:** жесткость кручения, момент инерции относительно границы, метод сопряженных градиентов, задача Дирихле.

**Введение**

Исследование задачи жесткости кручения упругих стержней имеет более чем двухсотлетнюю историю. Особый интерес для изучения представляет введенная Ш. Кулоном [1] безразмерная величина, называемая коэффициентом жесткости кручения и зависящая только от геометрической формы  $\Omega$  поперечного сечения и размеров упругого стержня. Исследованию данной величины посвящено большое количество работ (см., например, [2–4]). В классическом труде Сен-Венана [4] коэффициент жесткости кручения стержня с односвязным поперечным сечением определяется следующим образом:

$$P(\Omega) = 2 \iint_{\Omega} v \, dx \, dy,$$

где  $v = v(x, y)$  – решение (называемое функцией напряжений) однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона  $\Delta v = -2$  с краевым условием  $v|_{\partial\Omega} = 0$ .

Поскольку задача нахождения  $v$  решена только для узкоспециальных классов областей, важной проблемой, возникшей в работах Коши и Сен-Венана, является проблема нахождения геометрического функционала, эквивалентного коэффициенту жесткости кручения стержня с односвязным поперечным сечением.

В работе [5] предложено следующее решение данной задачи: в качестве параметра, эквивалентного  $P(\Omega)$ , введен функционал  $I(\partial\Omega)$ , называемый *моментом инерции области  $\Omega$  относительно границы* (*евклидовым моментом инерции*):

$$I(\partial\Omega) = \iint_{\Omega} \text{dist}^2(x, y) \, dx \, dy,$$

где  $\text{dist}(x, y)$  – расстояние от точки  $(x, y) \in \Omega$  до границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Эквивалентность понимается в обычном смысле: существуют константы  $\lambda > \mu > 0$  такие, что

$$\mu I(\partial\Omega) \leq P(\Omega) \leq \lambda I(\partial\Omega) \tag{1}$$

для любой односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Для некоторого класса областей  $\mathbb{A}$  введем точную константу эквивалентности, заданную выражением

$$\lambda(\mathbb{A}) = \sup_{\Omega \in \mathbb{A}} \frac{P(\Omega)}{I(\partial\Omega)}.$$

Тогда в соотношении (1)  $\lambda \equiv \lambda(\mathbb{A})$ , если  $\mathbb{A}$  – класс односвязных областей.

Известно [5], что  $\lambda \leq 64$ , однако эта оценка является неточной. Л.В. Ковалевым было показано<sup>1</sup>, что  $\lambda > 4$ ; впоследствии в [6] приведена оценка  $\lambda > 4.08$ , которая справедлива для некоторых типов секторов. Легко видеть, что данная оценка может быть улучшена снизу, если найдется так называемая «экстремальная» область  $\tilde{\Omega}$ , для которой отношение  $P(\tilde{\Omega})/I(\partial\tilde{\Omega})$  будет превосходить 4.08. Однако функции напряжений и расстояния нельзя записать в явном виде для произвольной области, что сильно усложняет поиск.

Целью настоящей работы является уточнение оценки константы  $\lambda$ , а именно разработка программного комплекса для приближенного вычисления отношения  $P(\Omega)/I(\partial\Omega)$  произвольной области  $\Omega$  и поиск экстремальной области среди всех возможных односвязных областей. Для удобства разобьем задачу на три этапа: вычисление функции напряжений, нахождение функции расстояния и вычисление функционалов  $P(\Omega)$  и  $I(\partial\Omega)$ .

## 1. Вычисление функции напряжений

Для решения задачи Дирихле воспользуемся методом конечных элементов. Исходную область разбиваем на множество треугольных элементов. После разбиения область представляет собой объединение из  $M$  треугольников, имеющих в совокупности  $n$  вершин. Эти вершины будем считать узлами разбиения. Далее, следуя [7], на каждом треугольном элементе  $A_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  с номерами вершин  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  искомое решение аппроксимируем кусочно-линейной функцией  $\varphi^{(m)}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ . Коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  определяются из системы  $\varphi^{(m)}(X_s, Y_s) = \Phi_s$ ,  $s = i, j, k$ , то есть в узлах  $(X_s, Y_s)$  треугольника функция принимает неизвестные пока значения  $\Phi_s$  функции напряжений. Решив полученную систему, запишем аппроксимирующую функцию в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \varphi^{(m)} &= N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \\ N_s &= (a_s + b_s x + c_s y) / 2|A_m|, \quad s = i, j, k, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $|A_m|$  – площадь треугольного элемента  $A_m$ , а коэффициенты определяются координатами его вершин:

$$\begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{cases} \quad \begin{cases} a_i = X_k Y_i - X_i Y_k, \\ b_i = Y_k - Y_i, \\ c_i = X_i - X_k; \end{cases} \quad \begin{cases} a_i = X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_i = Y_i - Y_j, \\ c_i = X_j - X_i. \end{cases} \tag{3}$$

В вариационной формулировке решение задачи Дирихле для уравнения  $\Delta\varphi = -2$  с граничным условием  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$  сводится к отысканию минимума функционала

$$\chi(\varphi) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2\varphi \right] dx dy. \tag{4}$$

<sup>1</sup>Л.В. Ковалёв. Личная переписка с Ф.Г. Авхадиевым.

Поскольку аппроксимирующая функция  $\varphi$  является непрерывной, интеграл в (4) можно разбить на сумму интегралов по треугольным элементам  $A_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , в каждом из которых функция  $\varphi^{(m)} = \varphi|_{A_m}$  непрерывна. Обозначим  $g^{(m)} = \nabla \varphi^{(m)}$  и перепишем (4) в матричном виде:

$$\chi(\varphi) = \sum_{m=1}^M \chi^{(m)}(\varphi^{(m)}) = \sum_{m=1}^M \iint_{A_m} \left[ \frac{1}{2} g^{(m)T} g^{(m)} - 2\varphi^{(m)} \right] dx dy. \quad (5)$$

Учитывая (3), градиент  $g^{(m)}$  перепишем в виде:

$$g^{(m)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & \frac{\partial N_i^{(m)}}{\partial x} & [0] & \frac{\partial N_j^{(m)}}{\partial x} & [0] & \frac{\partial N_k^{(m)}}{\partial x} & [0] \\ [0] & \frac{\partial N_i^{(m)}}{\partial y} & [0] & \frac{\partial N_j^{(m)}}{\partial y} & [0] & \frac{\partial N_k^{(m)}}{\partial y} & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ \Phi_i \\ [0] \\ \Phi_j \\ [0] \\ \Phi_k \\ [0] \end{bmatrix} = D^{(m)} \Phi^{(m)},$$

где элементы матрицы  $D^{(m)} = (d_{pq}^{(m)})_{p,q=1}^{2,n}$  и вектора  $\Phi^{(m)} = (\varphi_q^{(m)})_{q=1}^n$  удовлетворяют условиям:  $d_{pq}^{(m)} = \varphi_q^{(m)} = 0$ ,  $q \notin \{i, j, k\}$ ,  $1 \leq q \leq n$ ,  $p = 1, 2$ . Из (2) следует

$$D^{(m)} = \frac{1}{2|A_m|} \begin{bmatrix} [0] & b_i^{(m)} & [0] & b_j^{(m)} & [0] & b_k^{(m)} & [0] \\ [0] & c_i^{(m)} & [0] & c_j^{(m)} & [0] & c_k^{(m)} & [0] \end{bmatrix}.$$

Решая задачу минимизации функционала (5) на каждом конечном элементе, получим следующую систему линейных уравнений относительно вектора неизвестных  $\Phi^{(m)}$ :

$$\sum_{m=1}^M \iint_{A_m} D^{(m)T} D^{(m)} \Phi^{(m)} dx dy = 2 \sum_{m=1}^M \iint_{A_m} N^{(m)T} dx dy. \quad (6)$$

Правую часть (6) можно упростить, используя выражение для вычисления интеграла

$$\iint_{A_m} N_i^a N_j^b N_k^c dx dy = \frac{2a!b!c!}{(a+b+c+2)!} |A_m|, \quad a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (7)$$

приведенное в [8]. Учитывая, что подынтегральное выражение в правой части (6) не зависит от переменных интегрирования, получим систему уравнений:

$$\sum_{m=1}^M D^{(m)T} D^{(m)} \Phi^{(m)} = \frac{2}{3} \sum_{m=1}^M e^{(m)}, \quad (8)$$

где  $e^{(m)} = (e_q^{(m)})_{q=1}^n$  – вектор, элементы которого задаются условием:

$$e_q^{(m)} = \begin{cases} 1, & q \in \{i, j, k\}, \\ 0, & q \notin \{i, j, k\} \end{cases}.$$

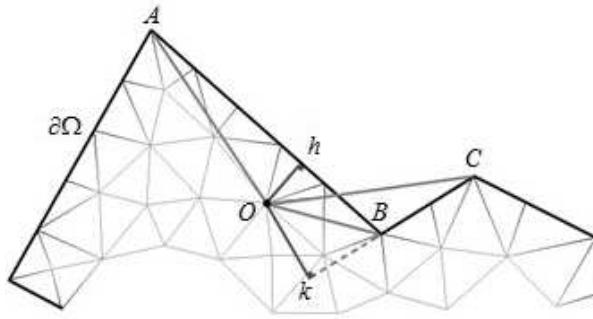


Рис. 1. Вычисление расстояния

Так как матрица системы (8) сильно разрежена и имеет большую размерность, для ее решения используем метод сопряженных градиентов, впервые приведенный в оригинальной работе Хестенса и Штифеля [9]. Ниже представлен алгоритм данного метода решения СЛАУ вида  $Ax = b$ , размерности  $n \times n$ , с относительной погрешностью  $\varepsilon$ . Алгоритм оптимизирован для программной реализации.

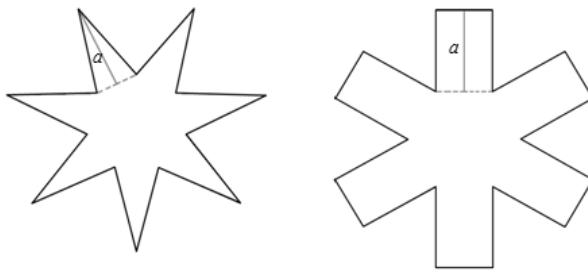
1. Инициализация:  $k = 0$ ,  $\rho_1 = \|\mathbf{b}\|_2 = \sum_{i=1}^n |b_i|^2$ ,  $\rho_2 = 1$ ,  $\mathbf{x} = 0$ ,  $\mathbf{p} = 0$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{b}$ .
2.  $\mathbf{p} = \mathbf{r} + (\rho_1/\rho_2)\mathbf{p}$ .
3.  $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ .
4.  $\alpha = \rho_1/(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ .
5.  $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{p}$ .
6.  $\mathbf{r} = \mathbf{r} - \alpha\mathbf{w}$ .
7.  $\rho_2 = \rho_1$ ,  $\rho_1 = \|\mathbf{r}\|_2^2$ .
8. Если  $\sqrt{\rho_1} > \varepsilon\|\mathbf{b}\|_2$ , то возврат к 1.. Иначе  $\mathbf{x}$  – искомое решение.

## 2. Вычисление расстояния

По аналогии с функцией напряжений, функцию расстояния будем аппроксимировать кусочно-линейной функцией  $\delta = \sum_{m=1}^M \delta^{(m)} = \sum_{m=1}^M N^{(m)}E$  на множестве из  $M$  треугольных элементов. Вектор  $E^T = (\text{dist}^2(X_1, Y_1), \dots, \text{dist}^2(X_n, Y_n))$  представляет собой квадраты расстояний от вершин  $(X_i, Y_i)$  треугольных элементов области  $\Omega$  до границы.

Рассмотрим процесс вычисления расстояния от некоторой внутренней точки  $O(X, Y)$  до границы  $\partial\Omega$  (см. рис. 1). Каждый сегмент границы вместе с точкой  $O$  образует треугольник, следовательно,  $\text{dist}(X, Y) = \min_i \delta_i$ , где  $\delta_i$  – расстояние в  $i$ -м треугольнике; минимум берется по всем треугольникам. Если углы при основании треугольника острые (как в  $\triangle AOB$ ), то расстояние  $\delta_i$  равняется высоте  $Oh$ . Иначе ( $\triangle BOC$ )  $\delta_i = \min(OB, OC)$  (хотя сторона  $OC$  не является расстоянием, так как пересекает границу, она никогда не будет учитываться, поскольку всегда существует высота, меньшая  $OC$ ). Таким образом, для некоторого треугольника с длинами сторон  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (сторона длины  $\gamma$  является сегментом границы) квадрат расстояния до границы задается следующим образом:

$$\delta_i^2 = \begin{cases} \alpha^2 - (\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 / 4\gamma^2, & \alpha^2 + \gamma^2 > \beta^2 \text{ и } \beta^2 + \gamma^2 > \alpha^2, \\ \min(\alpha^2, \beta^2), & \alpha^2 + \gamma^2 \leq \beta^2 \text{ или } \beta^2 + \gamma^2 \leq \alpha^2. \end{cases}$$

Рис. 2. Классы областей  $ST$  и  $SN$ 

### 3. Вычисление жесткости кручения и момента инерции относительно границы

Искомые функции напряжений и расстояния мы аппроксимировали кусочно-линейными функциями  $\varphi$  и  $\delta$ , имеющими вид:

$$\nu = \sum_{m=1}^M \nu^{(m)} = \sum_{m=1}^M N^{(m)} V,$$

где  $V$  – вектор значений функции в узлах разбиения области  $\Omega$ . Вычислим интеграл  $\nu$ :

$$\iint_{\Omega} \nu \, dx \, dy = \sum_{m=1}^M \iint_{A_m} \nu^{(m)} \, dx \, dy = \sum_{m=1}^M \iint_{A_m} N^{(m)} V \, dx \, dy = \sum_{m=1}^M V^T \iint_{A_m} N^{(m)T} \, dx \, dy.$$

Используя формулу (7), получим выражение для вычисления интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nu \, dx \, dy &= \sum_{m=1}^M V^T \iint_{A_m} N^{(m)T} \, dx \, dy = \\ &= \sum_{m=1}^M V^T e^{(m)} |A_m| / 3 = \sum_{m=1}^M (V_i + V_j + V_k) |A_m| / 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, жесткость кручения и, момент инерции относительно границы можно вычислить с учетом (9):

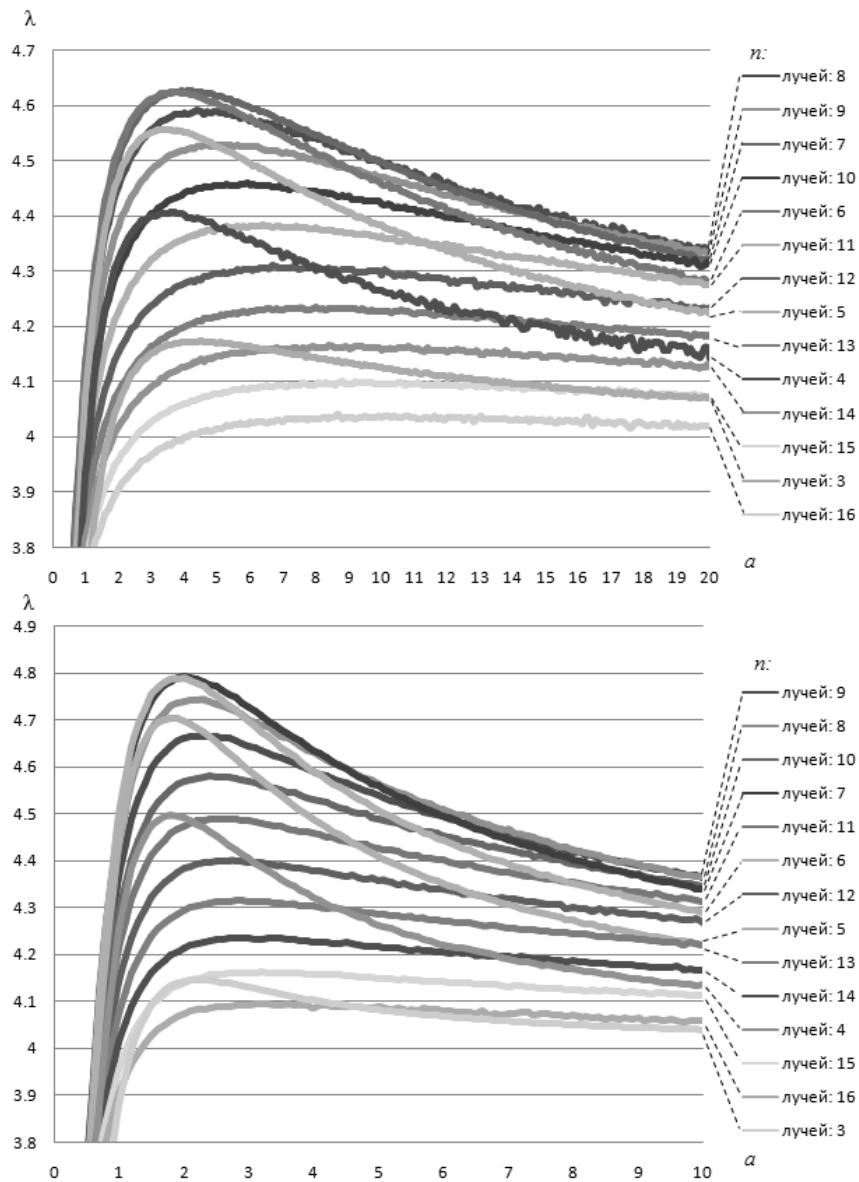
$$P(\Omega) = 2 \sum_{m=1}^M (\Phi_i + \Phi_j + \Phi_k) |A_m| / 3, \quad (10)$$

$$I(\partial\Omega) = \sum_{m=1}^M (E_i + E_j + E_k) |A_m| / 3. \quad (11)$$

Используя формулы (10), (11), можно приближенно вычислить функционалы  $P(\Omega)$  и  $I(\partial\Omega)$  для односвязной области  $\Omega$ , граница которой представляет собой произвольный многоугольник.

### 4. Результаты численного анализа

Для оценки константы  $\lambda$  был разработан программный комплекс, предназначенный для вычисления функционалов  $P(\Omega)$  и  $I(\partial\Omega)$  от односвязной области  $\Omega$ ,

Рис. 3. Классы областей  $ST(n, a)$  (вверху) и  $SN(n, a)$  (внизу)

представляющей собой произвольный многоугольник. Все основные расчеты проведены при разбиении области, содержащем порядка  $10^5$  узлов. Погрешность приближенного вычисления была оценена на областях, для которых искомые функционалы имеют аналитическое решение (см. [2, 3]). Расхождение между численным и точным решением варьируется в пределах от 0.0004% до 1.1%.

Целью численного анализа было нахождение экстремальных областей, для которых значение  $\lambda$  существенно бы превышало 4.08. В связи с этим интересными оказались следующие классы областей. Обозначим через  $ST(n, a)$  класс звездообразных областей с  $n$  лучами и отношением высоты луча к его основанию, равному  $a$ ; также введем класс «снежинок»  $SN(n, a)$  с аналогичными параметрами (см. рис. 2).

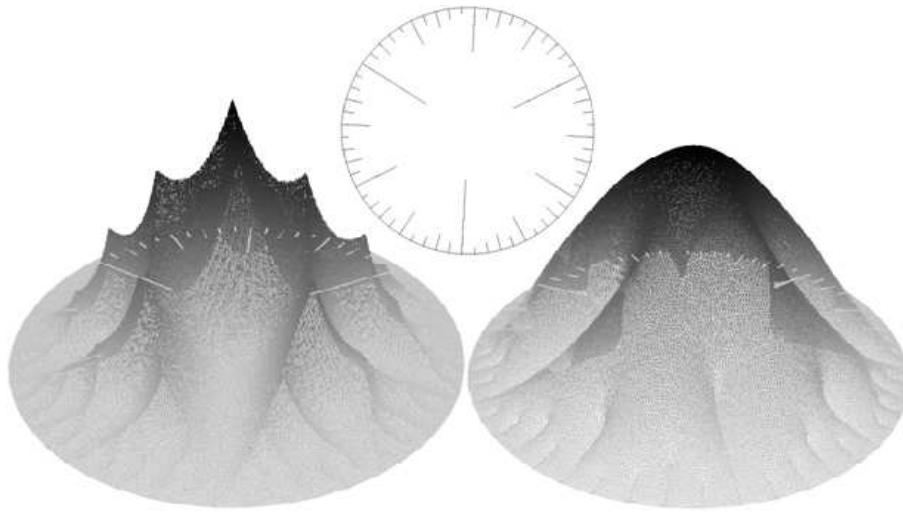


Рис. 4. Вверху: область  $\Omega_3$ . Внизу: результаты моделирования функции расстояния (слева) и функции напряжений (справа) для  $\Omega_3$

Результаты численных расчетов, представленные на рис. 3, позволяют сделать следующие выводы:

1. В классе  $ST$  найдется область  $\Omega_1$  ( $n = 7$ ,  $a \approx 3.9$ ) такая, что  $P(\Omega_1) \approx 4.64I(\partial\Omega_1)$  и выполняется следующее неравенство:

$$\lambda \geq \lambda(ST) \geq 4.64.$$

2. В классе  $SN$  найдется область  $\Omega_2$  ( $n = 7$ ,  $a \approx 2$ ) такая, что  $P(\Omega_2) \approx 4.8I(\partial\Omega_2)$  и выполняется следующее неравенство:

$$\lambda \geq \lambda(SN) \geq 4.8.$$

Далее был исследован класс областей, производных от  $SN$ , имеющих вид многоугольника с разрезами различных соотношений. На рис. 4 приведена область  $\Omega_3$ , а также результаты приближенного вычисления функций расстояния и напряжений для этой области, представленные в виде трехмерных поверхностей. Высота каждой точки поверхности определяется значением соответствующей функции.

Для области  $\Omega_3$  верно приближенное неравенство  $P(\Omega_3) \approx 6I(\partial\Omega_3)$ . Следовательно, в классе односвязных областей константа эквивалентности  $\lambda \geq 6$ .

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Ф.Г. Авхадиеву за предложенную задачу и ценные замечания, а также доктору физико-математических наук, профессору А.Б. Мазо за предоставленную программу триангуляции области.

### Summary

*D.A. Abramov. Lower Estimates for the Equivalence Constant of the Torsional Rigidity and the Moment of Inertia about a Boundary.*

In this paper, we consider the problem of approximate computation of the torsional rigidity coefficient for simply-connected domains. An approach to the distance function determination is defined; a numerical method for calculating the moment of inertia about a boundary

is proposed. Using a numerical experiment, the estimate for the equivalence constant of the torsional rigidity coefficient and the moment of inertia about a boundary is improved.

**Key words:** torsional rigidity, moment of inertia about a boundary, conjugate gradients method, Dirichlet problem.

#### Литература

1. *Coulomb C.A.* Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion, et sur l'élasticité de fils de métal // Mem. de l'Acad. de Sci. – 1784. – P. 229–269.
2. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
3. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тех. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 688 с.
4. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 519 с.
5. *Ахадиев Ф.Г.* Решение обобщенной задачи Сен-Венана // Матем. сб. – 1998. – № 12. – С. 3–12.
6. *Гиниятова Д.Х., Салахудинов Р.Г.* Евклидовый момент инерции и модифицированная жесткость кручения // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во. – 2007. – Т. 35. – С. 74–75.
7. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
8. *Eisenberg M.A., Malvern L.E.* On finite element integration in natural co-ordinates // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1973. – V. 7, No 4. – P. 574–575.
9. *Hestenes M.R., Stiefel E.* Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1952. – V. 49, No 6. – P. 409–436.

Поступила в редакцию  
15.04.11

---

**Абрамов Денис Александрович** – аспирант кафедры теории функций и приближений Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *quaerix@gmail.com*