

УДК 534.121

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.396-410

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛИННЫХ ПЛАСТИН

Б. Аффане, А.Г. Егоров

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Проведен асимптотический анализ классических уравнений теории пластин с напряжениями Кармана в предположении, что ширина пластины много меньше ее длины. Получена система одномерных уравнений балочного типа, описывающее нелинейное взаимодействие изгибных и крутильных колебаний. Их следствием является возможность возбуждения крутильных колебаний изгибными. Эта возможность проанализирована для модельной задачи, когда изгибные колебания происходят по нормальным модам.

Ключевые слова: асимптотический анализ, изгибные колебания, крутильные колебания, параметрический резонанс, окна резонанса, уравнение Матье

Введение

Изучение механических колебаний балок в последние десятилетия вызывает растущий интерес благодаря широким областям их применения, таким как атомная микроскопия [1], датчики и исполнительные механизмы на основе микромеханических осцилляторов [2], подводные роботизированные устройства [3]. Наш интерес в этой области исследований связан с разработкой подхода [4–6] к определению демпфирующих свойств материалов. Метод основан на измерении амплитуд затухающих изгибных колебаний (ИК) свободного конца консольно закрепленных балок в первом резонансном режиме. Толщина образцов h , их ширина b и длина L таковы, что $h \ll b \ll L$. Было замечено [7], что при больших амплитудах вынужденных ИК возникают также высокочастотные крутильные колебания (КК). Теоретическое исследование этого явления на основе классической теории среднего изгиба пластин невозможно из-за независимости в ней ИК и КК.

Простейшее геометрически нелинейное обобщение классической теории колебаний удлиненных пластин было проведено на физическом уровне строгости в [8]. Согласно предложенной в этой работе модели ИК и КК нелинейно связаны, что делает принципиально возможным возбуждение КК высокоамплитудными ИК из-за явления параметрического резонанса (ПР) [9].

В настоящей работе проводится математически строгий вывод взаимосвязанных уравнений ИК и КК длинных пластин, уточняющий результаты [8]. Он опирается на классические уравнения геометрически нелинейной теории пластин с напряжениями Кармана. Асимптотический анализ проводится в предположении $b \ll l$ с использованием известного (см., например, [10]) двухмасштабного метода осреднения. Постановка задачи и процедура осреднения даются в первых трех разделах статьи.

Полученные в результате асимптотического анализа взаимосвязанные уравнения ИК и КК анализируются в четвертом разделе. Для качественного понимания процесса параметрического возбуждения крутильных колебаний рассматривается модельная задача, когда изгибные колебания происходят по нормальной моде.

В этом случае крутильные колебания описываются классическим уравнением Маттье. Приводится его решение, строятся окна параметрического резонанса, анализируются результаты решения применительно к изучаемому в статье физическому процессу.

В заключении обсуждаются полученные результаты. Указывается на то, что возбуждение крутильных колебаний изгибными за счет параметрического резонанса вполне реально. Для этого достаточно, чтобы амплитуда изгибных колебаний пластины заметно превосходила ее толщину.

1. Постановка задачи

Рассмотрим колебания прямоугольной пластины с шириной b и длиной l , изготовленной из линейно упругого, изотропного материала и занимающей в недеформированном состоянии область

$$\Omega = \{0 < x < l, |y| < b/2\}.$$

Основные колебания с характерной амплитудой A происходят в направлении оси z . Пластина закреплена при $x = 0$, все остальные ее грани свободны. Будем считать выполненными условия

$$h \ll b \sim A \ll l. \tag{1}$$

Первое из них – стандартное условие применимости теории пластин. Второе определяет большую амплитуду колебаний, значительно превышающую толщину h пластины, что делает необходимым использование геометрически нелинейной теории. Последнее условие указывает на то, что пластина узкая, а значит, исходная система уравнений может быть осреднена по y с тем, чтобы приближенно описать исследуемый процесс одномерными по x уравнениями балочного типа.

Двумерные уравнения геометрически нелинейной теории пластин с напряжениями Кармана формулируются [11, 12] в терминах зависящих от x, y, t перемещений срединной поверхности пластины U, V, W по x, y, z соответственно. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 U &= \frac{E}{1-\nu^2} (P_x + G_y), \quad \rho \partial_t^2 V = \frac{E}{1-\nu^2} (Q_y + G_x), \\ \rho \partial_t^2 W &+ \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{h^2}{12} \Delta^2 W - (QW_y + GW_x)_y - (PW_x + GW_y)_x \right] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины. Величины P, Q, G пропорциональны напряжениям в срединной плоскости пластины (мембранные напряжения). Они нелинейным образом определяются через перемещения

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ G \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2U_x + W_x^2 + \nu(2V_y + W_y^2) \\ 2V_y + W_y^2 + \nu(2U_x + W_x^2) \\ (1-\nu)(U_y + V_x + W_x W_y) \end{pmatrix}.$$

Условия отсутствия усилий на боковых гранях пластины записываются как

$$y = \pm \frac{b}{2} : \quad Q = G = 0, \quad W_{yy} + \nu W_{xx} = 0, \quad W_{yyy} + (2-\nu)W_{yxx} = 0. \tag{3}$$

Граничные условия на торцах $x = 0, l$ пластины не привлекаются при выводе осредненных уравнений, за одним исключением. Требуется, чтобы в каждый момент времени в некотором, вообще говоря изменяющемся со временем сечении

пластины среднее по ее ширине значение P было равно нулю. Обозначая среднее значение угловыми скобками, запишем требуемое условие как

$$x = x_0(t) : \langle P \rangle = 0. \quad (4)$$

Это условие заведомо выполняется на торцевой грани, если она свободна от усилий либо жестко закреплена.

Задача состоит в нахождении осредненных по ширине пластины одномерных задач, описывающих при выполнении (1) поведение решений уравнений (2) с условиями (3), (4).

2. Асимптотическое разложение

2.1. Безразмерные переменные и параметры. Величина $\varepsilon = b/2l$ является малым параметром задачи. Второй малый параметр – отношение $2h/b$. Будем считать их соизмеримыми величинами, обозначать их отношение через β и полагать, что $\beta \sim 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{b^2}{hl} = \sqrt{12} \varepsilon^2 \frac{l}{h}.$$

Еще один безразмерный параметр $\alpha \sim 1$ определяется амплитудой колебания пластины

$$\alpha = \sqrt{3} \frac{Ab}{hl} = \sqrt{12} \varepsilon \frac{A}{h}.$$

Произведение $\alpha\beta$ равно отношению амплитуды колебаний к полуширине пластины

$$\alpha\beta = \frac{2A}{b}.$$

Переходя к безразмерным переменным, нормируем y на полуширину пластины $b/2$, x – на ее длину l , прогиб W – на амплитуду колебаний A пластины:

$$y_{sc} = \frac{b}{2}, \quad x_{sc} = l, \quad W_{sc} = A.$$

Характерные величины перемещений в плане и мембранных напряжений определяются как

$$V_{sc} = \frac{A^2 b}{2l^2} = \varepsilon U_{sc}, \quad U_{sc} = \frac{A^2}{l}, \quad P_{sc} = Q_{sc} = \frac{A^2}{l^2}, \quad G_{sc} = \varepsilon P_{sc}.$$

Что касается времени, то исследуемый процесс характеризуется целым спектром временных масштабов, наибольший из которых определяется собственным временем изгибных колебаний пластины

$$t_{sc} = \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho}{E}}.$$

Следующий по порядку величины – время крутильных колебаний – в ε раз меньше времени изгибных колебаний. Мы ограничимся здесь этими двумя масштабами, вводя в рассмотрение два безразмерных времени: медленное t и быстрое $\tau = t/\varepsilon$.

2.2. Безразмерная постановка задачи. Проведя указанное масштабирование и сохраняя за переменными старые обозначения, перепишем исходную задачу (2)–(3) в следующем безразмерном виде:

- определение мембранных напряжений

$$2 \begin{pmatrix} P \\ Q \\ G \end{pmatrix} = \varepsilon^{-2} \begin{pmatrix} \nu W_y^2 \\ W_y^2 \\ (1-\nu)(U_y + W_x W_y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2U_x + W_x^2 + 2\nu V_y \\ 2V_y + \nu(2U_x + W_x^2) \\ (1-\nu)V_x \end{pmatrix}; \quad (5)$$

- уравнения для U, V

$$\begin{aligned} (1-\nu^2)\beta^2\varepsilon^2(\varepsilon\partial_t + \partial_\tau)^2 U &= P_x + G_y, \\ (1-\nu^2)\beta^2\varepsilon^4(\varepsilon\partial_t + \partial_\tau)^2 V &= Q_y + \varepsilon^2 G_x; \end{aligned} \quad (6)$$

- уравнение для W

$$\begin{aligned} (1-\nu^2)(\partial_t + \varepsilon^{-1}\partial_\tau)^2 W + \varepsilon^{-4}W_{yyyy} + 2\varepsilon^{-2}W_{xxyy} + W_{xxxx} &= \\ = \alpha^2\varepsilon^{-2}[(\varepsilon^{-2}QW_y + GW_x)_y + (PW_x + GW_y)_x]; \end{aligned} \quad (7)$$

- граничные условия при $y = \pm 1$

$$G = Q = 0, \quad (8)$$

$$\varepsilon^{-2}W_{yy} + \nu W_{xx} = 0, \quad \varepsilon^{-2}W_{yyy} + (2-\nu)W_{yx} = 0. \quad (9)$$

2.3. Формальное асимптотическое разложение. Представим далее решение задачи как формальное асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} W &= W^0(t, \tau, x, y) + \varepsilon^2 W^1(t, \tau, x, y) + \dots, \\ U &= U^0(t, \tau, x, y) + \varepsilon^2 U^1(t, \tau, x, y) + \dots, \\ V &= V^0(t, \tau, x, y) + \varepsilon^2 V^1(t, \tau, x, y) + \dots, \\ P &= P^0(t, \tau, x, y) + \varepsilon^2 P^1(t, \tau, x, y) + \dots, \\ Q &= Q^0(t, \tau, x, y) + \varepsilon^2 Q^1(t, \tau, x, y) + \dots, \\ G &= G^0(t, \tau, x, y) + \varepsilon^2 G^1(t, \tau, x, y) + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

подставим (10) в (5)–(9) и, собирая члены при различных степенях ε , получим последовательность задач для нахождения компонент разложения.

Обратим внимание на то, что из (5) в главном (ε^{-2}) члене следует, что $W_y^0 = U_y^0 = 0$, а значит, эти функции могут зависеть лишь от времени и продольной координаты x . Условившись обозначать не зависящие от y функции строчными буквами, запишем

$$W^0 = w, \quad U^0 = u. \quad (11)$$

Из (11) следует, что в главном (ε^{-4}) члене уравнение (7) удовлетворяется автоматически. Последовательность задач для других членов в (10) будет представлена совместно с их решением в следующем разделе статьи.

3. Асимптотический анализ уравнений

3.1. Шаг 1. Уравнения (6) и соотношения (5) в членах порядка ε^0 записываются как

$$P_x^0 + G_y^0 = 0, \quad Q_y^0 = 0, \quad (12)$$

$$2 \begin{pmatrix} P^0 \\ Q^0 \\ G^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_x + w_x^2 + 2\nu V_y^0 \\ 2V_y^0 + \nu(2u_x + w_x^2) \\ (1 - \nu)(V_x^0 + U_y^1 + w_x W_y^1) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Второе из уравнений (12) с учетом граничных условий (8) дает $Q^0 = 0$. Исключая V_y^0 из двух первых соотношений (13), получим

$$2P^0 = 2p = (1 - \nu^2)(2u_x + w_x^2).$$

Условие разрешимости первого из уравнений (12) с учетом граничных условий (8) требует, чтобы $\langle P^0 \rangle_x = 0$. Отсюда с учетом (4) следует, что $\langle P^0 \rangle = 0$. Но P^0 не зависит от y , а значит, $P^0 = 0$. Как следствие и $G^0 = 0$. Итак,

$$P^0 = Q^0 = G^0 = 0. \quad (14)$$

С учетом этого из (13) следует

$$V^0 = v, \quad U^1 + w_x W^1 = -y v_x + \tilde{u}, \quad u_x = -\frac{1}{2} w_x^2. \quad (15)$$

Последнее соотношение здесь имеет простой геометрический смысл: в отсутствие мембранных напряжений длина элемента пластины сохраняется.

3.2. Шаг 2. В члене порядка ε^{-2} уравнения (7) имеем

$$|y| < 1 : (1 - \nu^2) \partial_\tau^2 w + W_{yyyy}^1 = 0, \quad y = \pm 1 : W_{yyy}^1 = 0, \quad W_{yy}^1 = -\nu w_{xx},$$

Интегрируя уравнение поперек пластины и учитывая первое из граничных условий, получим $\partial_\tau^2 w = 0$, следовательно, w не зависит от быстрого времени: $w = w(x, t)$. При этом для W^1 получаем однородное уравнение, интегрирование которого дает

$$W^1 = -\frac{\nu}{2} y^2 w_{xx} + y\varphi + \tilde{w}. \quad (16)$$

Функция $\varphi(x, t, \tau)$ определяет безразмерный, нормированный на $\varphi_{sc} = 2\varepsilon^2 A/b$ угол кручения пластины вокруг центральной линии.

В члене порядка ε^{-1} уравнения (7) имеем соотношение $\partial_{t\tau}^2 w = 0$, которое удовлетворяется автоматически в силу независимости w от τ .

3.3. Шаг 3. Следующий по порядку член (ε^2) в уравнении (6) и граничном условии (8) для функции V даст $Q^1 = 0$. Учитывая, что

$$2Q^1 = 2V_y^1 + (W_y^1)^2 + 2\nu(U_x^1 + W_x^1 W_x^0),$$

и принимая во внимание (15), (16) получаем

$$V^1 = -\frac{\nu^2}{3} y^3 w_{xx}^2 + \frac{\nu}{2} y^2 (2\varphi w_{xx} + v_{xx}) - \frac{y}{2} (\varphi^2 + 2\nu(\tilde{u}_x - w_{xx} \tilde{w})) + \tilde{v}.$$

Первое из уравнений (6) и граничное условие (8) приводят к следующей задаче для определения G^1 :

$$|y| < 1 : G_y^1 = -P_x^1, \quad G^1(\pm 1) = 0. \quad (17)$$

Мы здесь учли дополнительно, что u в силу связи (15) между u и w , так же как и w , не зависит от быстрого времени τ . Подсчитаем P^1 :

$$\begin{aligned} P^1 &= U_x^1 + W_x^0 W_x^1 + \nu V_y^1 + \frac{\nu}{2} (W_y^1)^2 = \\ &= (1 - \nu^2) (U_x^1 + w_x W_x^1) = (1 - \nu^2) (\tilde{u}_x - y v_{xx} - w_{xx} W_x^1) = \\ &= (1 - \nu^2) \left[\frac{\nu}{2} y^2 w_{xx}^2 - y(v_{xx} + \varphi w_{xx}) + \tilde{u}_x - \tilde{w} w_{xx} \right] \end{aligned}$$

Условие разрешимости выписанной выше задачи для G^1 требует, чтобы $\langle P^1 \rangle_x = 0$. Принимая во внимание условие на свободном конце пластины, получим $\langle P^1 \rangle = 0$, откуда следует, что \tilde{w} и \tilde{u}_x связаны соотношением

$$\tilde{u}_x - \tilde{w} w_{xx} = -\frac{\nu}{6} w_{xx}^2,$$

а P^1 представимо в виде

$$P^1 = (1 - \nu^2) \left[\frac{\nu}{6} (3y^2 - 1) w_{xx}^2 - y(v_{xx} + \varphi w_{xx}) \right].$$

Интегрированием (17) получаем отсюда

$$G^1 = (1 - \nu^2)(1 - y^2) \left[\frac{\nu}{6} y w_{xx}^2 - \frac{1}{2} (v_{xx} + \varphi w_{xx}) \right]_x.$$

3.4. Шаг 4. Выписывая следующий по порядку (ε^4) член во втором из уравнений (6), получим

$$(1 - \nu^2) \beta^2 \partial_\tau^2 v = Q_y^2 + G_x^1.$$

Проводя интегрирование по ширине пластины и учитывая, что $Q^2(\pm 1) = 0$, найдем первое из уравнений колебаний узкой пластины

$$\beta^2 \partial_\tau^2 v = \langle G^1 \rangle_x = -\frac{1}{3} (v_{xx} + \varphi w_{xx})_{xx}.$$

3.5. Шаг 5. Выписывая следующий по порядку (ε^0) член в уравнении (7), найдем

$$(1 - \nu^2) \partial_t^2 w + (1 - \nu^2) \partial_\tau^2 W^1 + W_{yyyy}^2 + 2W_{yyxx}^1 + w_{xxxx} = \alpha^2 \left[(w_x G^1)_y + (w_x P^1)_x \right].$$

Учитывая (16) и (17), преобразуем это выражение к виду

$$(1 - \nu^2) \partial_t^2 w + (1 - \nu^2) \partial_\tau^2 (y\varphi + \tilde{w}) + W_{yyyy}^2 + (1 - 2\nu) w_{xxxx} = \alpha^2 w_{xx} P^1.$$

Граничные условия (9) дадут

$$y = \pm 1: \quad W_{yy}^2 + \nu \left(\tilde{w} - \frac{\nu}{2} w_{xxxx} \pm \varphi_{xx} \right) = 0, \quad W_{yy}^2 + (2 - \nu) (\varphi_{xx} \mp \nu w_{xxxx}) = 0.$$

Выписанные уравнение и граничные условия определяют задачу для нахождения W^2 . Условия разрешимости этой задачи приводят еще к двум уравнениям колебаний узкой пластины. Первое из условий разрешимости получается умножением уравнения для W^2 на y с последующим интегрированием по ширине пластины:

$$\frac{(1 - \nu^2)}{3} \partial_\tau^2 \varphi + \frac{y}{2} W_{yyyy}^2 \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2} W_{yy}^2 \Big|_{-1}^1 = \frac{\alpha^2}{2} w_{xx} \int_{-1}^1 y P^1 dy = -\alpha^2 \frac{1 - \nu^2}{3} (v_{xx} + \varphi w_{xx}) w_{xx}$$

Используя граничные условия, найдем

$$\partial_\tau^2 \varphi - \frac{6}{1+\nu} \varphi_{xx} = -\alpha^2 (v_{xx} + \varphi w_{xx}) w_{xx}.$$

Второе условие разрешимости получается интегрированием по ширине пластины уравнения для W^2 с последующим использованием граничных условий и того, что $\langle P^1 \rangle = 0$. Оно имеет вид

$$\partial_t^2 w + w_{xxxx} = -\partial_\tau^2 \tilde{w}.$$

Усредним это равенство по τ , то есть проинтегрируем его правую и левую часть по τ от t до $t + \tau_\infty$ и разделим на τ_∞ , считая, что $1 \ll \tau_\infty \ll \varepsilon^{-2}$. При этом вид левой части не изменится, а в естественном предположении об ограниченности функции $\tilde{w}(\tau)$ правая часть обратится в нуль. Таким образом мы приходим к классическому уравнению Эйлера–Бернулли изгибных колебаний тонкой балки.

3.6. Результаты асимптотического анализа. Представим основные результаты проведенного анализа. Они состоят в том, что колебания узкой пластины могут быть описаны уравнениями балочного типа в терминах трех основных характеристик:

– вертикальное перемещение $w(x, t)$ средней линии, которое можно определять независимо от остальных характеристик, решая для w уравнение Эйлера–Бернулли

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0; \quad (18)$$

– горизонтальное перемещение $v(x, \tau; t)$ средней линии и угол $\varphi(x, \tau; t)$ поворота вокруг нее, решая для их определения уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \frac{2}{1+\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (19)$$

$$3\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (20)$$

в которых w считается известной функцией x и медленного времени t .

Для полноты изложения выпишем уравнения в размерной форме

$$\rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E b h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (21)$$

$$\frac{\rho b^3 h}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{E b h^3}{6(1+\nu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{E b h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (22)$$

$$\rho b h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{E b^3 h}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (23)$$

Полученные балочные уравнения допускают простую энергетическую трактовку. Введем кинетическую и упругую энергии системы соответственно как

$$T = \frac{\rho b h}{2} \int_0^l \left[\dot{w}^2 + \dot{v}^2 + \frac{b^2}{12} \dot{\varphi}^2 \right] dx, \quad (24)$$

$$\Pi = \frac{E b h}{24} \int_0^l \left[h^2 w_{xx}^2 + \frac{2h^2}{1+\nu} \varphi_x^2 + b^2 (\varphi w_{xx} + v_{xx})^2 \right] dx. \quad (25)$$

Варьируя функцию Гамильтона $T - \Pi$ по v , приходим к уравнению (23). Варьирование по φ дает уравнение (22). Наконец, варьирование по w слабо изменяет уравнение (21), приводя его к следующему виду

$$\rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E b h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{E b h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\varphi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (26)$$

Дополнительный член в тех предположениях, в которых мы исследовали процесс, мал; он появится лишь при продолжении асимптотического разложения для изгиба W . Вероятно, возможны ситуации, например, для ортотропных пластин, когда дополнительное слагаемое даст заметную поправку к классическому уравнению (21). Этот вопрос, однако, выходит за рамки настоящей статьи и нуждается в специальном исследовании.

4. Возбуждение крутильных колебаний изгибными

При малых амплитудах колебаний пластины изгибные колебания описываются уравнением Эйлера – Бернулли (18), крутильные – уравнением Сен-Венана, в которое переходит (19) при $\alpha = 0$. Эти уравнение независимы, и вопрос о взаимодействии изгибных и крутильных колебаний в линейной теории поставлен быть не может. В геометрически нелинейной теории, при сохранении уравнения Эйлера – Бернулли изгибных колебаний, уравнение (19) для угла кручения φ существенно зависит от изгиба w , тем в большей степени, чем выше безразмерная амплитуда α изгибных колебаний. При задании независимо определяемой функции $w(x, t)$ уравнение (19) является линейным с коэффициентом при φ , гармонически зависящим от времени и от пространственной координаты. Наличие такой параметрической зависимости приводит к явлению параметрического резонанса, когда в плоскости управляющих параметров процесса (ε, α) существуют целые области (окна неустойчивости, или лакуны), в которых самопроизвольно возбуждаются крутильные колебания пластины [9].

Заметим, что согласно уравнению (20) для v изгибные колебания влияют также и на поперечные колебания. Однако такое влияние оказывается не коэффициентно, а через правую часть – вынуждающие силы. Для того чтобы возбудить поперечные колебания, правая часть должна иметь временную гармонику, совпадающую по частоте с собственной частотой поперечных колебаний (которая в ε^{-1} раз выше частоты изгибных колебаний). В этом случае области неустойчивости в параметрической плоскости вырождаются в линии. Вероятность попадания в них равна нулю. Поэтому возбуждение поперечных колебаний – практически невозможное событие. Мы будем его игнорировать, полагая $v = 0$. Уравнение крутильных колебаний при этом примет вид

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \alpha^2 R(x, t) \varphi = 0, \quad R = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2. \quad (27)$$

Для качественного понимания процесса параметрического возбуждения крутильных колебаний проанализируем простую модельную задачу, когда изгибные колебания происходят по нормальной моде:

$$w = \cos(x - t), \quad R = \cos^2(x - t) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2(x - t)).$$

Пространственный масштаб l выбран так, что $2\pi l$ совпадает с длиной бегущей волны, при этом частота временных колебаний определяется как $\omega_{из} = t_{sc}^{-1}$.

4.1. Решение модельной задачи. Переходя в уравнении (27) от переменных x, t к переменным z, \hat{t}

$$z = (x - t), \quad \hat{t} = t - \frac{1 + \nu}{2} \varepsilon^2 x,$$

получим, пренебрегая величинами порядка ε^2 по сравнению с единицей:

$$\delta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + a^2 (1 + \cos 2z) \varphi = 0, \quad a^2 = \frac{1 + \nu}{4} \alpha^2, \quad \delta^2 = \frac{1 + \nu}{2} \varepsilon^2.$$

С той же точностью совпадают друг с другом переменные \hat{t} и t . отождествим их, «сняв крышечки» при t в выписанном выше уравнении.

Проводя преобразование Фурье по t : $\varphi(t) \leftrightarrow \psi(\omega)$, придем к уравнению Матье, которое в нашем случае удобно записать в виде

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} = u^2 (-1 + s^{-2} (1 + \cos(2z))) \psi, \quad u = \omega \delta = \omega \sqrt{\frac{1 + \nu}{8}} \frac{b}{l}, \quad s = \frac{u}{a} = \frac{\omega}{\sqrt{6}} \frac{h}{A}. \quad (28)$$

Уравнение Матье имеет широкую область применения, оно хорошо изучено и ему посвящена обширная литература [13–16]. Его важным свойством является то, что при некотором соотношении между коэффициентами u, s оно имеет экспоненциально растущие решения. Эти решения заполняют целиком счетное число областей Ω_n плоскости (s, u) управляющих параметров процесса (окна неустойчивости). Границы окон неустойчивости $u_n^\pm(s)$ и функции $\psi_n^\pm(z; s)$ на этих границах определяются как 2π -периодические решения задачи (28) на собственные значения u^2 . Собственные функции выражаются через функции Матье $se_n(z), ce_n(z)$, являющиеся либо π -периодическими, либо π -антипериодическими функциями z (см., например, [15]).

Заметим, что изгибные колебания 2π -периодичны по x . То же свойство должно выполняться и для крутильных колебаний $\varphi(x)$. А в силу 2π -периодичности φ по z на границах областей неустойчивости $\varphi(t)$ также должна быть 2π -периодической функцией. Как следствие, $\varphi(t)$ имеет дискретный спектр, и величина ω , определяющая в (28) параметры u, s , принимает целочисленные значения $k = 1, 2, 3, \dots$. Сами параметры u^{-1}, s^{-1} представляют собой безразмерные длину волны и амплитуду изгибных колебаний пластины.

Карта режимов для уравнения Матье (28) представлена на рис. 1. На нем окрашены области неустойчивости. Их границы u^+ и u^- показаны сплошными линиями. Вертикальная линия отвечает значению $s = \sqrt{2}$; на ней чередующиеся интервалы устойчивости и неустойчивости имеют один и тот же размер $u_n^+ - u_n^- = u_{n+1}^- - u_{n+1}^+ = \pi/4$. Горизонтальные линии, задаваемые как $u = (2k + 1)\pi/8$, $k = 1, 2, \dots$, определяют границы этих интервалов. Черные кривые

$$u = U_\pm(s) = \pm \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{s}{s^2 - 2} \quad (29)$$

дают асимптотическое представление при $u \rightarrow \infty$ границ интервала неустойчивости с центром, расположенным на линии $s = \sqrt{2}$. Как видно из рисунка, асимптотическая формула (29) удовлетворительно описывает весь диапазон изменения u . Кривые (29) можно условно трактовать как границы раздела параметрической плоскости на три области. Правее U_+ лежит область устойчивых решений. Окна неустойчивости Ω_n в ней по мере увеличения s быстро стягиваются в линии, выходящие при $s \rightarrow \infty$ на асимптоту $u = n$. Левее U_- лежит область неустойчивости. В ней, как видно из рис. 1, в линии стягиваются области устойчивости.

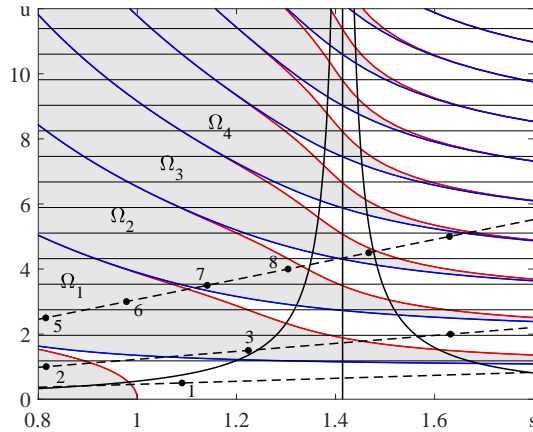


Рис. 1. Карта режимов для уравнения Матъе

При малых s эти линии определяются как

$$s \rightarrow 0 : u = \left(n + \frac{1}{2} \right) s^{-1/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Между областями устойчивости и неустойчивости лежит узкая переходная зона, в которой вероятности попадания в окна устойчивости и неустойчивости соизмеримы.

Представленные здесь для полноты изложения теоретические результаты анализа уравнения Матъе (28) в достаточной степени известны. Их изложение и ссылки на первоисточники можно найти, например, в обзоре [16].

4.2. Анализ результатов решения. С ростом номера k временной гармоники точка в параметрической плоскости движется вдоль прямой $u = \kappa s$ с коэффициентом $\kappa \sim 1$, зависящим от коэффициента Пуассона ν , геометрических характеристик h, b пластины и параметров l, A изгибных колебаний:

$$\kappa = \sqrt{\frac{3(1 + \nu)}{4} \frac{Ab}{lh}}.$$

Три таких прямых показаны пунктирными линиями на рис. 1. Укажем для определенности, что они соответствуют совершающей колебания с длиной волны $2\pi l = 32$ см дюралюминиевой пластине ($\nu = 1.33$) толщиной 0.8 мм, шириной 6 см. Нижняя прямая отвечает колебаниям малой (0.3 см), средняя – умеренной (0.8 см), верхняя – большой (2 см) амплитуды. Маркерами на этих прямых показано положение k -й (число при маркере) временной гармоники.

Как видно, малые изгибные колебания не в состоянии возбудить крутильные. Уже старшая ($k = 1$) крутильная гармоника здесь (рис. 1) устойчива. Умеренные колебания могут возбудить несколько первых крутильных гармоник. Согласно рис. 1 помимо первой гармоники, имеющей частоту изгибных колебаний, возбуждаются также гармоники удвоенной и утроенной частоты. Наконец, для высокоамплитудных колебаний возбуждается целая «гребенка» крутильных колебаний. Для показанного на рисунке случая она помимо основной частоты содержит частоты, превышающие основную в 2, 3, ... 9 раз.

Для определения количества «зубцов в гребенке» в наиболее интересном случае высокоамплитудных колебаний можно использовать условие того, что возбуждаемые частоты лежат в области $s < \sqrt{2}$. При этом число N возбуждаемых гармоник

крутильных колебаний будет зависеть только от толщины пластины и амплитуды изгибных колебаний

$$N = \sqrt{12} \frac{A}{h}.$$

Для малоамплитудных колебаний условие $s < \sqrt{2}$ следует (см. рис. 1) заменить на $s < 1$, что кардинально не изменит выводы. Это является следствием узости переходной зоны и ее ориентированности вдоль оси u . Подчеркнем, что полученные соотношения для N , равно как и критерий $N < 1$ невозможности возбуждения крутильных колебаний изгибными, зависят только от отношения амплитуды изгибных колебаний к толщине пластины, то есть от степени нелинейности процесса. Ни ширина пластины, ни длина волны, ни даже коэффициент Пуассона не являются здесь определяющими параметрами.

Заключение

В работе проведена асимптотическая процедура осреднения геометрически нелинейных уравнений колебаний пластины со свободными боковыми гранями в предположении, что характерный продольный масштаб изучаемого процесса много больше ширины пластины. Она позволила свести исходную систему двумерных уравнений к одномерной системе балочного типа, сформулированной в терминах изгиба, кручения и бокового смещения пластины. Установлены следующие факты.

- Изгибные (w) колебания являются ведущим процессом и их можно описать независимо от других типов колебаний классическим линейным уравнением Эйлера–Бернулли колебания тонкой балки. Подчеркнем это обстоятельство: применение уравнения Эйлера–Бернулли не требует малости параметра нелинейности A/h . Более того, это отношение может быть большим, соизмеримым и даже превосходящим отношение l/b длин сторон пластины.

- Боковые (v) и крутильные (φ) колебания нелинейно связаны между собой и управляются независимыми от них изгибными колебаниями. Такое управление осуществляется различным образом для v и φ . Для боковых колебаний оно происходит посредством появления возбуждающей силы, отличной от нуля, лишь тогда, когда в системе наряду с изгибными реализуются и крутильные колебания. Для крутильных колебаний управление реализуется особым, коэффициентным образом и не требует развитых боковых колебаний.

- Возбуждение боковых колебаний изгибными крайне маловероятно; в ситуации общего положения они будут происходить с малой амплитудой порядка bA^2/l^2 и основной частотой, равной удвоенной частоте изгибных колебаний.

- Возбуждение крутильных колебаний изгибными принципиально возможно из-за эффекта параметрического резонанса. При его реализации рост амплитуды крутильных колебаний будет ограничен лишь силами внутреннего трения и аэродинамического сопротивления.

Для иллюстрации возможности возбуждения крутильных колебаний изгибными рассмотрена простейшая модельная задача с изгибными колебаниями, происходящими по нормальным модам. Она сводится к уравнению Матье, хорошо развитая теория которого позволяет сделать следующие выводы.

1. Возбуждение крутильных колебаний изгибными за счет параметрического резонанса вполне реально. Для этого достаточно, чтобы параметр нелинейности A/h не был малым.

2. При малых амплитудах изгибных колебаний $A/h \lesssim 0.5$ крутильные колебания не возбуждаются. С ростом амплитуды возбуждаются последовательно крутильные колебания с частотами равными одной, двум, трем, ... частотам изгибных

колебаний. Число N возбуждаемых частот на высоких амплитудах определяется простой формулой $N = \sqrt{12} \cdot A/h$.

Разумеется, конкретные числа могут измениться при переходе от модельной задачи к реальным объектам, но общая картина процесса, на наш взгляд, должна сохраниться.

Литература

1. *Sader J.E.* Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // *J. Appl. Phys.* – 1998. – V. 84, No 1. – P. 64–76.
2. *Kimber M., Lonergan R., Garimella S.V.* Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers // *J. Fluids Struct.* – 2009. – V. 25, No 8. – P. 1334–1347. – doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2009.07.003.
3. *Yeh P.D., Alexeev A.* Free swimming of an elastic plate plunging at low Reynolds number // *Phys. Fluids.* – 2014. – V. 26, No 5. – Art. 053604, P. 1–13. – doi: 10.1063/1.4876231.
4. *Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G.* Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 1. Experimental basis // *Mech. Compos. Mater.* – 2014. – V. 50, No 2. – P. 127–136. – doi: 10.1007/s11029-014-9400-8.
5. *Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N.* Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens 2. Aerodynamic component of damping // *Mech. Compos. Mater.* – 2014. – V. 50, No 3. – P. 267–278. – doi: 10.1007/s11029-014-9413-3.
6. *Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N.* Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples // *J. Sound Vibr.* – 2018. – V. 421. – P. 334–347. – doi: 10.1016/j.jsv.2018.02.006.
7. *Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N.* Experimental determination of damping of plate vibrations in a viscous fluid // *Dokl. Phys.* – 2017. – V. 62. – P. 257–261. – doi: 10.1134/S1028335817050068.
8. *Kamalutdinov A.M., Paimushin V.N.* Refined geometrically nonlinear equations of motion for elongated rod-type plate // *Russ. Math.* – 2016. – V. 60, No 9. – P. 74–78. – doi: 10.3103/S1066369X16090103.
9. *Egorov A.G., Affane B.* Instability regions in flexural-torsional vibrations of plates // *Lobachevskii J. Math.* – 2020. – V. 41, No 7. – P. 1167–1174. – doi: 10.1134/S1995080220070094.
10. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
11. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 419 с.
12. *Reddy J.N.* An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With Applications to Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Solid Mechanics. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2014. – 768 p. – doi: 10.1093/acprof:oso/9780199641758.001.0001.
13. *Mclachlan N.W.* Theory and Application of Mathieu Functions. – N. Y.: Oxford Univ. Press, 1951. – 423 p.

14. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956 – 600 с.
15. *Wolf G.* Mathieu functions and Hill's equation // NIST Handbook of Mathematical Functions / Ed. by F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, Ch.W. Clark. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. – P. 651–682.
16. *Dunne G.V., Ünsal M.* WKB and resurgence in the Mathieu equation // Fauvet F., Manchon D., Marmi S., Sauzin D. (Eds.) Resurgence, Physics and Numbers. – Pisa: Edizioni della Normale, 2017. – P. 249–298. – doi: 10.1007/978-88-7642-613-1_6.

Поступила в редакцию
16.10.2020

Аффане Будхиль, младший научный сотрудник Института геологии и нефтегазовых технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *boudkhil.affane@gmail.com*

Егоров Андрей Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *aegorov0@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2020, vol. 162, no. 4, pp. 396–410

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.396-410

Asymptotic Analysis of Geometrically Nonlinear Vibrations of Long Plates

*B. Affane**, *A.G. Egorov***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **boudkhil.affane@gmail.com, **aegorov0@gmail.com*

Received August 4, 2020

Abstract

In this paper, we performed an asymptotic analysis for equations of the classical plate theory with the von Kármán strains under the assumption that the width of the plate is small compared with its length. A system of one-dimensional equations, which describes the nonlinear interaction of flexural and torsional vibrations of beams, was derived. This enables the possibility of exciting torsional vibrations by flexural vibrations. This possibility was analyzed for a model problem, when flexural vibrations occur in normal modes.

Keywords: asymptotic analysis, flexural vibrations, torsional vibrations, parametric resonance, resonance gaps, Mathieu equation

Figure Captions

Fig. 1. Mode map for the Mathieu equation.

References

1. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope. *J. Appl. Phys.*, 1998, vol. 84, no. 1, pp. 64–76. (In Russian)
2. Kimber M., Lonergan R., Garimella S.V. Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers. *J. Fluids Struct.*, 2009, vol. 25, no. 8, pp. 1334–1347. doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2009.07.003.
3. Yeh P.D., Alexeev A. Free swimming of an elastic plate plunging at low Reynolds number. *Phys. Fluids*, 2014, vol. 26, no. 5, art. 053604, pp. 1–13. doi: 10.1063/1.4876231.
4. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 1. Experimental basis. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 127–136. doi: 10.1007/s11029-014-9400-8.
5. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens 2. Aerodynamic component of damping. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 267–278. doi: 10.1007/s11029-014-9413-3.
6. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N. Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples. *J. Sound Vib.*, 2018, vol. 421, pp. 334–347. doi: 10.1016/j.jsv.2018.02.006.
7. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Experimental determination of damping of plate vibrations in a viscous fluid. *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, pp. 257–261. doi: 10.1134/S1028335817050068.
8. Kamalutdinov A.M., Paimushin V.N. Refined geometrically nonlinear equations of motion for elongated rod-type plate. *Russ. Math.*, 2016, vol. 60, no. 9, pp. 74–78. doi: 10.3103/S1066369X16090103.
9. Egorov A.G., Affane B. Instability regions in flexural-torsional vibrations of plates. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1167–1174. doi: 10.1134/S1995080220070094.
10. Berdichevskii V.L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoi sredy* [Variational Principles of Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1983. 448 p. (In Russian)
11. Vol'mir A.S. *Gibkie plastinki i obolochki* [Flexible Plates and Shells]. Moscow, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1956. 419 p. (In Russian)
12. Reddy J.N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With Applications to Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Solid Mechanics*. Oxford, Oxford Univ. Press, 2014. 768 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199641758.001.0001.
13. McLachlan N.W. *Theory and Application of Mathieu Functions*. New York, Oxford Univ. Press, 1951. 423 p.
14. Bolotin V.V. *Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem* [Dynamic Stability of Elastic Systems]. Moscow, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1956. 600 p. (In Russian)
15. Wolf G. Mathieu functions and Hill's equation. In: *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2010, pp. 651–682.

16. Dunne G.V., Ünsal M. WKB and resurgence in the Mathieu equation. In: Fauvet F., Manchon D., Marmi S., Sauzin D. (Eds.) *Resurgence, Physics and Numbers*. Pisa, Edizioni della Normale, 2017, pp. 249–298. doi: 10.1007/978-88-7642-613-1_6.

Для цитирования: Аффане Б., Егоров А.Г. Асимптотический анализ геометрически нелинейных колебаний длинных пластин // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 4. – С. 396–410. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.396-410.

For citation: Affane B., Egorov A.G. Asymptotic analysis of geometrically nonlinear vibrations of long plates. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 4, pp. 396–410. doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.396-410. (In Russian)