МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

ГОСУДАРСТВЕННОГО АВТОНОМНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Учебно-методическое пособие к лабораторным и практическим занятиям, курсовому проектированию по дисциплине «Основы моделирования и оптимизации материалов и технологических процессов»

Набережные Челны

2019

УДК 51-74

Основы моделирования и оптимизации материалов и технологических процессов: сост. Шафигуллин Л.Н., Романова Н.В., Панфилов Э.В. – Набережные Челны: НЧИ (ф) КФУ, 2019. – 86 с.

Учебно-методическое пособие по проведению лабораторных и практических занятий, курсового проектирования по дисциплине: «Основы моделирования и оптимизации материалов и технологических процессов» для студентов направления 22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов».

Рецензент: д.т.н., профессор, профессор кафедры «Материалы, технологии и качества» НЧИ КФУ Астащенко В.И.

Содержание

1. Основы оптимизации композиционных материалов в машиностроении

Под оптимизацией понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных. С точки зрения инженерных расчетов методы оптимизации позволяют выбрать наилучший вариант конструкции, наилучшее распределение ресурсов и т.п.

В процессе решения задачи оптимизации обычно необходимо найти оптимальные значения некоторых параметров, определяющих данную задачу. При решении инженерных задач их принято называть проектными параметрами, а в экономических задачах их обычно называют параметрами плана. В качестве проектных параметров могут быть, в частности, значения линейных размеров объекта, массы, температуры и т.п. Число n проектных параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$ характеризует размерность (и степень сложности) задачи оптимизации.

Выбор оптимального решения или сравнение двух альтернативных решений проводится с помощью некоторой зависимой величины (функции), определяемой проектными параметрами. Эта величина называется целевой функцией (или критерием качества). В процессе решения задачи оптимизации должны быть найдены такие значения проектных параметров, при которых целевая функция имеет минимум (или максимум). Таким образом, целевая функция - это глобальный критерий оптимальности в математических моделях, с помощью которых описываются инженерные или экономические задачи. Целевую функцию можно записать в виде:

$$y=F(x_1, x_2,.., x_n). \tag{1.1}$$

Примерами целевой функции, встречающимися в инженерных и экономических расчетах, являются прочность или масса конструкции, мощность установки, объем выпуска продукции, стоимость перевозок грузов, прибыль и т.п.

В случае одного проектного параметра ($n=1$) целевая функция является функцией одной переменной и её график – некоторая кривая на плоскости. При $n=2$ целевая функция является функцией двух переменных и её графиком является поверхность.

Следует отметить, что целевая функция не всегда может быть представлена в виде формулы. Иногда она может принимать только некоторые дискретные значения, задаваться в виде таблицы и т.п., но во всех случаях она должна быть однозначной функцией проектных параметров.

Целевых функций может быть несколько. Например, при проектировании изделий машиностроения одновременно требуется обеспечить максимальную надежность, минимальную материалоемкость, максимальный полезный объем (или грузоподъемность). Некоторые целевые функции могут оказаться несовместимыми. В таких случаях необходимо вводить приоритет той или иной целевой функции.

Можно выделить два типа задач оптимизации – безусловные и условные. Безусловная задача оптимизации состоит в отыскании максимума или минимума действительной функции от n действительных переменных и определении соответствующих значений аргументов на некотором множестве σ n-мерного пространства. Обычно рассматриваются задачи минимизации, которые легко сводятся, а также задачи на поиск максимума путем замены знака целевой функция на противоположный.

Условные задачи оптимизации, или задачи с ограничениями, - это такие задачи, при формулировке которых задаются некоторые условия (ограничения) на множестве σ. Ограничения задаются совокупностью некоторых функций, удовлетворяющих уравнениям или неравенствам.

Ограничения-равенства выражают зависимость между проектными параметрами и отражают законы природы, наличие ресурсов, финансовые требования и т.п. Они должны учитываться при нахождении решения.

В результате ограничений область проектирования σ, определяемая всеми n проектными параметрами, может быть существенно уменьшена в соответствии с физической сущностью задачи. Число m ограничений-равенств может быть произвольным. Их можно записать в виде:

$$\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{array}, \qquad (1.2)$$

В ряде случаев из этих соотношений можно выразить одни проектные параметры через другие. Это позволяет исключить некоторые параметры из процесса оптимизации, что приводит к уменьшению размерности задачи и облегчает ее решение. Аналогично могут вводиться также ограничения-неравенства, имеющие следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&a_1 \le \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1 \\
&a_2 \le \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2 \\
&.............................. \\
&a_m \le \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m
\end{aligned}
\quad . \qquad (1.3)
$$

Следует отметить особенность в отыскании решения при наличии ограничений. Оптимальное решение здесь может соответствовать либо локальному экстремуму внутри области проектирования, либо значению целевой функции на границе области. Если же ограничения отсутствуют, то ищется оптимальное решение на всей области проектирования, т.е. глобальный экстремум.

Теория и методы решения задач оптимизации при наличии ограничений составляют предмет исследования одного из важнейших разделов прикладной математики – математического программирования.

2. Однокритериальная оптимизация композиционных материалов

2.1 Одномерная оптимизация композиционных материалов

Одномерная задача оптимизации в общем случае формулируется следующим образом. Найти наименьшее (или наибольшее) значение целевой функции, заданной на множестве σ, и определить значение проектного параметра, при котором целевая функция принимает экстремальное значение. Существование решения поставленной задачи вытекает из следующей теоремы.

Теорема Вейерштрасса. Всякая функция $F(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, принимает на этом отрезке наименьшее и наибольшее значения, т.е. на отрезке $[a,b]$ существуют такие точки x_1 и x_2, что для любого $x \in [a,b]$ имеют место неравенства:

$$F(x_1) \leq F(x) \leq F(x_2). \tag{2.1}$$

Максимум или минимум дифференцируемой функции можно найти, исследуя её значения в точках, где производная обращается в ноль, а также в точках a и b, ограничивающих область проектирования. В тех случаях, когда возникают трудности с дифференцированием, либо решением дифференциальных уравнений, прибегают к численным методам поиска.

Численные методы поиска экстремальных значений целевой функции рассмотрим на примере нахождения минимума функции $F(x)$ на отрезке $[a,b]$. Будем предполагать, что целевая функция унимодальная, т.е. на данном отрезке она имеет только один минимум. Обычно в инженерной практике встречаются именно такие целевые функции.

Процесс решения задачи методом поиска состоит в последовательном сужении интервала изменения проектного параметра, называемого интервалом неопределенности. В начале процесса оптимизации его длина равна b-a, а к концу она должна стать меньше некоторого заранее заданного малого значения ε, определяющего погрешность вычисления. Таким образом, оптимальное значение проектного параметра должно находиться в интервале неопределенности $[x_к, x_{к+1}]$, при этом $x_{к+1} - x_к < \varepsilon$ (где $к$ - число выполненных шагов оптимизации, приводящих к сужению интервала неопределенности).

Существуют две принципиально различные стратегии выбора точек, в которых производится вычисление значений функции. Если все точки задаются заранее, до начала вычислений, - это пассивная (параллельная) стратегия. Если эти точки выбираются последовательно в процессе поиска с учетом результатов предыдущих вычислений,- это последовательная стратегия.

Метод равномерного поиска

Требуется найти безусловный минимум функции $F(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $F(x^*) = \frac{\min F(x)}{x \in R}$ (где R – область допустимых решений). Метод относится к пассивным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$ и количество вычислений функции N. Вычисления производятся в N равноотстоящих друг от друга точках (при этом интервал L_0 делится на $N + 1$ равных интервалов). Путем сравнения величин $F(x_i)$, $i = 1,...,N$ находится точка $x_к$, в которой значение функции наименьшее. Искомая точка минимума x^* считается заключенной в интервале $[x_{к-1},x_{к+1}]$ (рис. 2.1). Алгоритм метода выглядит следующим образом. Задается начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$, N - количество вычислений функции. Вычисляется значение целевой функции в точке $x_i = a_0 + i \cdot \frac{(b_0 - a_0)}{N+1}$, $i=1$. Если при этом $F(x_i)$ уменьшается, вычисляется значение целевой функции в следующей точке ($i=2$) и т.д. до тех пор, пока при очередном шаге новое значение $F(x_i)$ не окажется больше предыдущего. В этом случае делается один шаг назад, уменьшается длина шага и вся процедура повторяется. Поиск завершается тогда, когда длина очередного шага становится меньше заданной погрешности ε. Точка минимума x^* принадлежит интервалу: $x^* \in [x_{к-1}, x_{к+1}] = L_N$, на котором в качестве приближенного решения может быть выбрана точка $x^* \cong x_к$

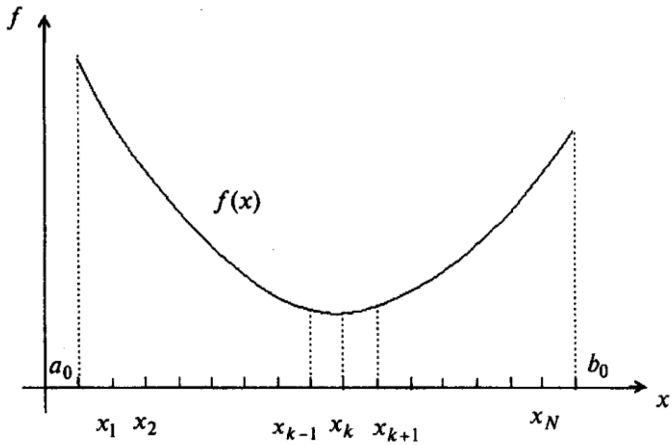


Рис. 2.1. Метод равномерного поиска

Для метода равномерного поиска характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = \dfrac{2}{N+1}$.

Метод перебора

Разбиение интервала $[a_0,b_0]$ на $N+1$ равных частей используется также в методе перебора. Для решения задачи этим методом следует: а) вычислить точки $x_i = a_0 + i \cdot \dfrac{(b_0 - a_0)}{N+1}$, $i=0,\ldots,N+1$, равностоящие друг от друга; б) вычислить значения функции в найденных точках: $F(x_i)$, $i=0,\ldots,N+1$; в) среди точек x_i, $i=0,\ldots,N+1$, найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение: $F(x_к) = \dfrac{min}{0 \le i \le N+1} F(x_i)$. Погрешность нахождения точки минимума методом перебора не превосходит $\dfrac{(b_0 - a_0)}{N+1}$.

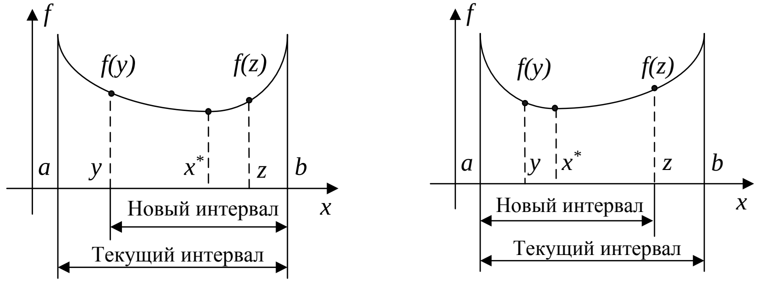
В данном методе точность решения зависит от N. С увеличением числа точек разбиения погрешность в определении минимума уменьшается, а объем вычислений резко возрастает.

Метод равномерного поиска отличается от метода перебора значительно меньшим объемом вычислений. Однако, при малой заданной погрешности, он все же остается неэкономичным с точки зрения затрат машинного времени.

Метод деления интервала пополам

Требуется найти безусловный минимум функции $F(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $F(x^*) = \min_{x \in R} F(x)$. Метод относится к последовательным стратегиям и позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации в точности половину текущего интервала неопределенности. Задается начальный интервал неопределенности, а алгоритм уменьшения интервала, являясь, как и в общем случае, "гарантирующим" (рис. 2.2), основан на анализе величин функции в трех точках, равномерно распределенных на текущем интервале (делящих его на четыре равные части). Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины погрешности ε. Алгоритм метода: 1) задается начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$ и $\varepsilon>0$ требуемая точность; 2) полагается $\kappa=0$, где κ - число выполненных шагов оптимизации; 3) вычисляется средняя точка $x_\kappa^c = \frac{a_\kappa + b_\kappa}{2}$, $|L_{2\kappa}| = b_\kappa - a_\kappa$, $F(x_\kappa^c)$; 4) вычисляются промежуточные точки и значения функции в них ($y_\kappa = a_\kappa + \frac{|L_{2\kappa}|}{4}$, $z_\kappa = b_\kappa - \frac{|L_{2\kappa}|}{4}$ и $F(y_\kappa)$, $F(z_\kappa)$). Точки $y_\kappa, x_\kappa^c, z_\kappa$ делят интервал $[a_\kappa, b_\kappa]$ на четыре равных части; 5) сравнивают значения $F(y_\kappa)$ и $F(x_\kappa^c)$, и если $F(y_\kappa) < F(x_\kappa^c)$, исключают интервал $(x_\kappa^c, b_\kappa]$ ($b_{\kappa+1} = x_\kappa^c$, $a_{\kappa+1} = a_\kappa$), средней точкой нового интервала становится точка y_κ ($x_{\kappa+1}^c = y_\kappa$), переходят к 7 этапу; если $F(y_\kappa) > F(x_\kappa^c)$, переходят к 6 этапу; 6) сравниваются $F(z_\kappa)$ с $F(x_\kappa^c)$, и если $F(z_\kappa) < F(x_\kappa^c)$, исключают интервал $[a_\kappa, x_\kappa^c)$ ($a_{\kappa+1} = x_\kappa^c$, $b_{\kappa+1} = b_\kappa$), средней точкой нового интервала становится точка z_κ ($x_{\kappa+1}^c = z_\kappa$), переходят к 7 этапу; если $F(z_\kappa) \geq F(x_\kappa^c)$, исключают интервалы $[a_\kappa, x_\kappa^c)$, $(z_\kappa, b_\kappa]$ ($a_{\kappa+1} = y_\kappa$, $b_{\kappa+1} = z_\kappa$), средней точкой нового интервала остается x_κ^c ($x_{\kappa+1}^c = x_\kappa^c$); 7) вычисляют $|L_{2(\kappa+1)}| = |b_{\kappa+1} - a_{\kappa+1}|$ и проверяют условие окончания: если $|L_{2(\kappa+1)}| \leq \varepsilon$, процесс поиска завершается и

$x^* \in L_{2(\kappa+1)} = [a_{\kappa+1}, b_{\kappa+1}]$, в качестве приближенного решения берется середина последнего интервала ($x^* \cong x^c_{\kappa+1}$); если $\left|L_{2(\kappa+1)}\right| > \varepsilon$, то полагается $\kappa = \kappa + 1$ и переходят к 4 этапу.



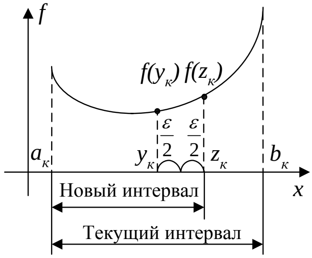
а) б)

Рис. 2.2. Метод деления отрезка пополам

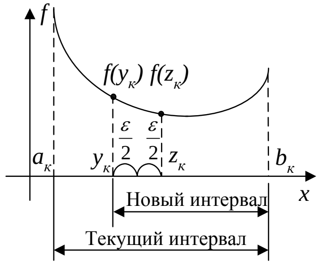
Для метода деления интервала пополам характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = \dfrac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$.

Метод дихотомии

Требуется найти безусловный минимум функции *F(x)* одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $F(x^*) = \dfrac{\min F(x)}{x \in R}$. Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках (рис. 2.3). Для их нахождения текущий интервал неопределенности делится пополам и в обе стороны от середины откладывается по $\dfrac{\delta}{2}$, где δ - малое положительное число ($\delta \le \varepsilon$). Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины. Алгоритм метода: 1) задается начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$, δ и $\varepsilon>0$ - требуемая точность; 2) полагают $\kappa = 0$, где κ - число выполненных шагов оптимизации; 3) вычисляют $y_\kappa = \dfrac{a_\kappa + b_\kappa - \delta}{2}$, $F(y_\kappa)$, $z_\kappa = \dfrac{a_\kappa + b_\kappa + \delta}{2}$, $F(z_\kappa)$; 4) сравнивают $F(y_к)$ с $F(z_к)$, если $F(y_к) \le F(z_к)$, то полагают $a_{к+1} = a_к$, $b_{к+1} = z_к$ (рис. 2.3, а) и переходят к 5 этапу, если $F(y_к) > F(z_к)$, то полагают $a_{к+1} = y_к$, $b_{к+1} = b_к$ (рис. 2.3, б); 5) вычисляется $\left|L_{2(к+1)}\right| = \left|b_{к+1} - a_{к+1}\right|$ и проверяется условие окончания: если $\left|L_{2(к+1)}\right| \le \varepsilon$, процесс поиска завершается и $x^* \in L_{2(к+1)} = \left[a_{к+1}, b_{к+1}\right]$, в качестве приближенного решения берут середину последнего интервала: $x^* \cong \frac{a_{к+1} + b_{к+1}}{2}$; если $\left|L_{2(к+1)}\right| > \varepsilon$, полагают *к = к+1* и переходят к 3 этапу.



а)



б)

Рис. 2.3. Метод дихотомии

Для метода дихотомии характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$. Эффективность методов дихотомии и деления интервала пополам при малых δ можно считать одинаковой.

Метод золотого сечения

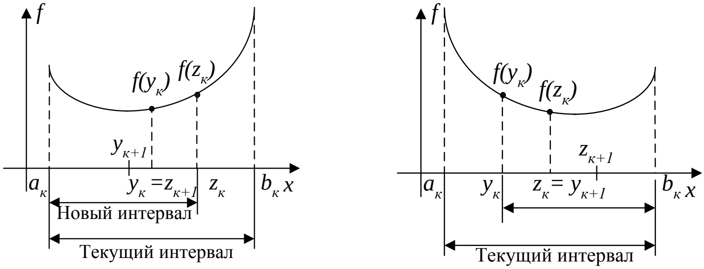
Требуется найти безусловный минимум функции *F(x)* одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $F(x^*) = \frac{\min F(x)}{x \in R}$. Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм уменьшения интервала опирается на анализ значений функции в двух точках (рис. 2.4). В качестве точек вычисления функции выбираются точки золотого сечения. Точка производит *"золотое* *сечение"* отрезка, если отношение длины всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей. На отрезке *[a₀,b₀]*, имеются две симметричные относительно его концов точки y_0 и z_0:

$$\frac{b_0-a_0}{b_0-y_0}=\frac{b_0-y_0}{y_0-a_0}=\frac{b_0-a_0}{z_0-a_0}=\frac{z_0-a_0}{b_0-z_0}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1{,}618\cdot \qquad (2.2)$$

Кроме того, точка y_0 производит золотое сечение отрезка $[a_0,z_0]$, а точка z_0 - отрезка $[y_0,b_0]$. Тогда с учетом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм метода: 1) задается начальный интервал неопределенности $L_0=[a_0,b_0]$ и ε - точность, Δ - величина наименьшего интервала неопределенности; 2) полагают $\kappa=0$, где κ - число выполненных шагов оптимизации; 3) вычисляют $y_\kappa=a_0+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0-a_0)$; $z_\kappa=a_0+b_0-y_0$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0{,}38196$; 4) вычисляют $F(y_\kappa)$ и $F(z_\kappa)$ 5) сравниваются $F(y_\kappa)$ и $F(z_\kappa)$: если $F(y_\kappa)\le F(z_\kappa)$, то полагают $a_{\kappa+1}=a_\kappa$, $b_{\kappa+1}=z_\kappa$ и $y_{\kappa+1}=a_{\kappa+1}+b_{\kappa+1}-y_\kappa$, $z_{\kappa+1}=y_\kappa$ (рис. 2.4, а) и переходят к 6 этапу; если $F(y_\kappa)>F(z_\kappa)$, полагают $a_{\kappa+1}=y_\kappa$, $b_{\kappa+1}=b_\kappa$ и $y_{\kappa+1}=z_k$, $z_{\kappa+1}=a_{\kappa+1}+b_{\kappa+1}-z_\kappa$ (рис. 2.4, б); 6) вычисляют $\Delta=|a_{\kappa+1}-b_{\kappa+1}|$ и проверяют условие окончания: если $\Delta\le\varepsilon$, процесс поиска завершается и $x^*\in[a_{\kappa+1},b_{\kappa+1}]$, в качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала: $x^*\cong\frac{a_{\kappa+1}+b_{\kappa+1}}{2}$; если $\Delta>\varepsilon$, положить $\kappa=\kappa+1$ и переходят к 4 этапу.

Для метода золотого сечения характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N)=(0{,}618)^{N-1}$.



а) б)

Рис. 2.4. Метод золотого сечения

2.2 Многомерная оптимизация композиционных материалов

На практике чаше встречаются задачи оптимизации в которых целевая функция является функцией многих проектных параметров. Однако в некоторых случаях после дифференцирования получается система очень сложных нелинейных уравнений, решить которую практически невозможно. Кроме того, не всегда целевую функцию можно задать аналитически и дифференцировать. Иногда её значения вычисляются по определенному алгоритму, либо определяются экспериментально. Во всех этих случаях для поиска минимума функции многих переменных используют специальные численные методы.

Простейшим методом поиска решения является метод перебора, основанный на вычислении и сравнении значений целевой функции в узлах n-мерной сети, равномерно покрывающей область проектирования σ. Данный метод позволяет с высокой степенью надёжности находить глобальный экстремум целевой функции, независимо от её вида. Однако с этим методом связан чрезвычайно большой объём вычислений, что создаёт определённые трудности.

В тех случаях, когда целевая функция является достаточно гладкой, т.е. определяемая ею многомерная поверхность не содержит множества оврагов и выступов, можно воспользоваться специальными численными методами целенаправленного поиска экстремума, которые значительно сокращают объём вычислений и общее время поиска.

Существует множество различных методов поиска экстремума целевых функций многих параметров (методы многомерного поиска). Их принципиальные отличия друг от друга заключаются в способе выбора направления очередного шага. В зависимости от того, какого порядка производные целевой функции по управляемым параметрам используются для определения направления движения, различают:

- методы *нулевого* порядка - в этих методах производные не используются (метод покоординатного спуска, метод случайного поиска, метод Розенброка и т.д.);

- методы *первого* порядка - используются производные первого порядка (метод градиента, метод наискорейшего спуска и т.д.);

- методы *второго* порядка - используются вторые производные (метод Ньютона, метод переменной метрики и т.д.).

Метод покоординатного спуска (метод Гаусса-Зейделя)

В этом методе направление очередного шага выбирается вдоль какой-либо координатной оси, например оси x_1. Движение в этом направлении производится в сторону, в которой наблюдается уменьшение *F(x)* и выполняется до тех пор, пока *F(x)* уменьшается (рис. 2.5). Далее движение осуществляется вдоль новой координатной оси, например по оси x_2, и т.д.

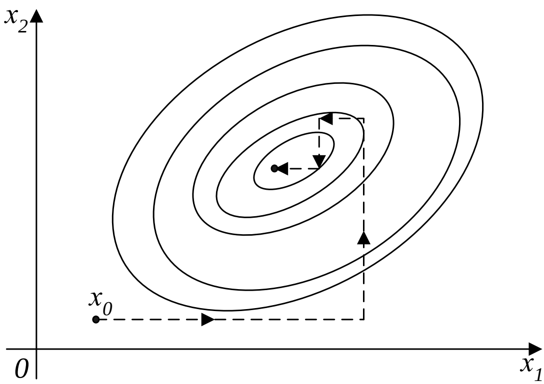


Рис. 2.5. Метод покоординатного спуска

После цикла спусков вдоль всех *n* осей производится новый цикл, если экстремум еще не найден.

Когда ни по одной из осей невозможно перемещение с уменьшением *F(x)* поиск прекращается и последняя полученная точка признается принадлежащей некоторой малой окрестности экстремальной точки *X*.

Метод случайного поиска

Существует много разновидностей этих методов, но основная идея заключается в следующем. Направление поиска выбирается случайно, проверяется, есть ли перспектива движения в сторону экстремума, при благоприятном результате проверки осуществляется шаг в этом направлении (рис. 2.6). При отрицательном результате проверки случайным образом выбирается новое направление и процесс повторяется.

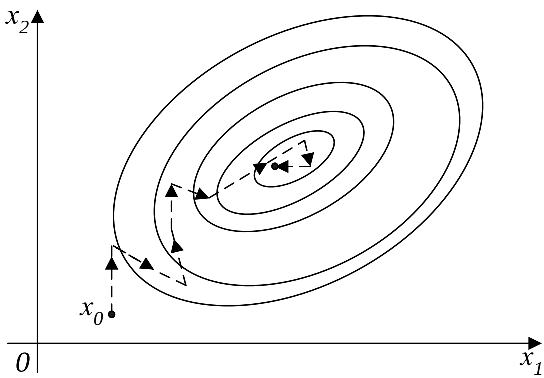


Рис. 2.6. Метод случайного поиска

Случайный выбор направления движения из любой точки *X* выполняется с помощью алгоритмов выработки случайных чисел.

Проверка перспективы движения в сторону экстремума выполняется путем расчета и сопоставления значений целевой функции *F(x)* в двух соседних точках.

Поиск обычно прекращается, если было выполнено подряд *K* неудачных попыток продвижения.

Метод градиента

В данном методе используется известный факт, что направление градиента совпадает с направлением наибыстрейшего возрастания целевой функции. Отсюда - при поиске максимума целевой функции необходимо двигаться по направлению градиента, при поиске минимума - в направлении антиградиента (рис. 2.7).

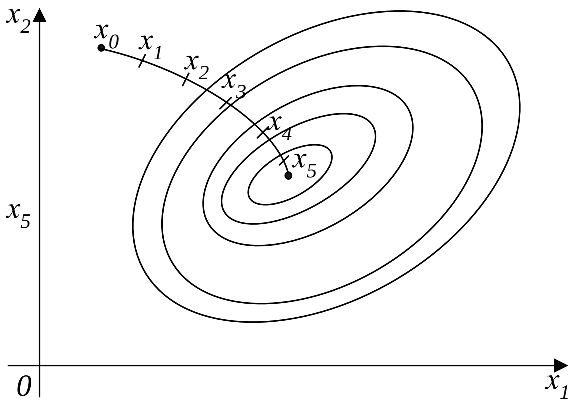


Рис. 2.7. Метод градиентного спуска

В рассматриваемом методе в каждой отображающей точке X рассчитывается градиент целевой функции

$$gradF(x) = \left[\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F(x)}{\partial x_n}\right], \qquad (2.3)$$

и определяется вектор g единичной длины, имеющий градиентное направление

$$g = gradF(x)/\left|gradF(x)\right| \cdot \qquad (2.4)$$

Далее, при минимизации осуществляется шаг в антиградиентном, т.е. в направлении противоположном градиентному.

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa - h \cdot g\ , \qquad (2.5)$$

где h - величина шага поиска.

Если $F(X_{\kappa+1})<F(X_\kappa)$, то процедура повторяется в новой точке.

Если $F(X_{\kappa+1}) \geq F(X_\kappa)$, то необходимо уменьшение величины шага и продолжение поиска. Если шаг уменьшен до некоторого заданного уровня, но по-прежнему $F(X_{\kappa+1}) \geq F(X_\kappa)$, то считается что точка X_κ находится в малой окрестности экстремальной точки X^* и поиск прекращается.

Метод наискорейшего спуска

Данный метод является разновидностью метода градиента. В одних случаях величина шага h рассчитывается оптимальной с помощью одномерной минимизации целевой функции вдоль градиентного направления. В других случаях из этого метода исключают процедуру одномерной минимизации и используют процедуру изменения величины шага h, применяемую в основном градиентном методе. Тогда различие между методами градиента и наискорейшего спуска будет заключаться в том, что по разному определяются направления движения.

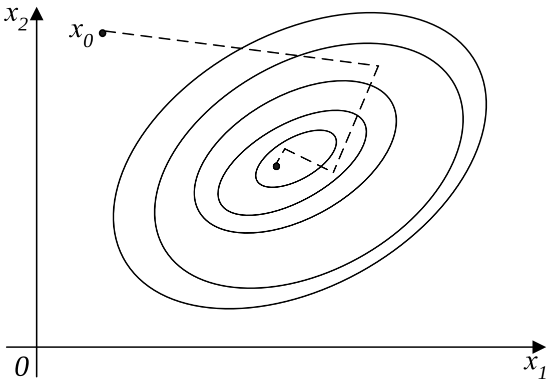


Рис. 2.8. Метод наискорейшего спуска

Так, если в точке $X_{к+1}$ выполняется условие $F(X_{к+1})<F(X_к)$, то спуск продолжается в прежнем направлении без расчета $gradF(x)$.

Если же $F(X_{к+1})\geq F(X_к)$, то осуществляются действия, совпадающие с действиями в градиентном методе при аналогичных случаях.

Метод наискорейшего спуска приводит к выполнению большего количества шагов, чем метод градиента, но в среднем требуется выполнение меньшего объема вычислений – градиент целевой функции считается реже.

Метод Ньютона

Данный метод относится к группе методов второго порядка и базируется на методе Ньютона для решения системы уравнений $F(X)/X=0$.

В этом случае рекуррентное выражение для поиска имеет вид

$$X_{к+1} = X_к - Ю_к^{-1} \cdot gradF(X), \qquad (2.6)$$

где $Ю_к^{-1}$ - матрица, обратная матрице вторых частных производных *F(X)* по *X* (матрица Гессе).

Скорость сходимости в методе Ньютона выше, чем в методах нулевого или первого порядка. Но не во всех задачах существует сам факт сходимости. Главный недостаток - в отсутствии простых и экономичных алгоритмов вычисления матрицы Гессе.

Если *F(X)* - квадратичная функция, то для перехода в точку минимума достаточно сделать один шаг. В случае нелинейной целевой функции минимум *F(X)* достигается за большее число шагов.

В базовом (основном) методе Ньютона используется следующее рекуррентная формула:

$$X_{к+1} = X_к - h_к \cdot Ю_к^{-1} \cdot gradF(X_к) / \left\| Ю_к^{-1} \cdot gradF(X_к) \right\|, \qquad (2.7)$$

где $h_к$ - шаг поиска.

В модификациях метода применяются различные способы ускоренного или приближенного вычисления матрицы *Ю*.

2.3 Теория линейного программирования

Графический способ решения задач линейного программирования

Геометрическая интерпретация задач линейного программирования (ЗЛП) даёт возможность наглядно представить их структуру, выявить особенности и открывает пути исследования более сложных свойств. ЗЛП с двумя переменными всегда можно решить графически, в трёхмерном пространстве такое решение усложняется, а в пространстве размерности больше трёх графическое решение, вообще говоря, невозможно.

Случай двух переменных не имеет особого практического применения, однако его рассмотрение поясняет свойства основной ЗЛП, приводит к идее её решения, делает геометрически наглядным способы решения и пути их практической реализации.

Графический способ решения будем применять для ЗЛП с двумя переменными в стандартной форме, которая выглядит следующим образом:

Определить максимальное (минимальное) значение целевой функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow max(min) \quad (2.8)$$

при следующих ограничениях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \begin{matrix} \le \\ = \\ > \end{matrix} b_i, \; i=\overline{1,k}, \quad (2.9)$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \quad (2.10)$$

Каждое из неравенств (2.9) - (2.10) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми:

$$\left.\begin{matrix} a_{i1}x_1 + a_{ai2}x_2 = b_i, \; i=\overline{1,k} \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0 \end{matrix}\right\}. \quad (2.11)$$

В этом случае, если система неравенств (2.9) - (2.10) совместна, область её решения есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей выпуклое, то областью допустимых значений (ОДЗ) для решений задачи (2.8) - (2.10) является выпуклое множество, которое называется многоугольником решений (при $n \ge 3$ - это многогранник решений). Стороны многоугольника решений лежат на прямых (2.11).

Решение ЗЛП (2.8) - (2.10) состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция (2.8) принимает максимальное (минимальное) значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст, а целевая функция ограничена на нём сверху (снизу).

При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное (минимальное) решение.

Для определения данной вершины строят линию уровня целевой функции: $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = h$, где *h* - *Const*, (*h* может быть равным нулю), проходящую через многоугольник решений. Определяют градиент целевой функции: $gradF = \bar{n} = (c_1; c_2)$. Продвигают линию уровня в направлении вектора $\vec{n}$ при определении максимума целевой функции (в направлении вектора -

$\vec{n} = (-c_1; -c_2)$ - при определении минимума). Координаты последней общей точки линии уровня и многоугольника решений определяют оптимальный план данной задачи.

При графическом решении задачи (2.8) - (2.10) возможны следующие результаты:

Максимальное (минимальное) значение целевой функции (2.8) достигается в единственной точке, т.е. оптимальный план единственный (рис. 2.9, а).

Минимальное значение целевой функции (2.8) достигается в любой точке отрезка АВ (АВ параллелен линии уровня), следовательно ЗЛП (2.8) - (2.10) имеет бесчисленное множество оптимальных планов (рис. 2.9, б). Для определения одного из них можно взять, например, координаты точки А.

Многоугольник решений (2.9) - (2.10) не замкнут, целевая функция (2.8) не ограничена сверху и конечного оптимального решения для задачи на максимум целевой функции (2.8) нет (рис. 2.9, в).

Многоугольник решений (2.9) - (2.10) не замкнут, целевая функция (2.8) не ограничена как снизу, так и сверху, конечного оптимального решения нет как для задачи на максимум целевой функции (2.8), так и для задачи на минимум целевой функции (2.8) (рис. 2.9, г).

ОДЗ (2.9) - (2.10) состоит из одной точки, и в ней целевая функция (2.8) достигает одновременно максимума и минимума (рис. 2.9, д).

ОДЗ (2.9) - (2.10) - пустое множество, т.к. система ограничений (2.9) - (2.10) несовместна. Задача не имеет оптимального решения (рис. 2.9, е).

Исходя из вышесказанного графический способ решения задачи линейного программирования включает следующие этапы:

1. Привести ЗЛП к стандартной форме:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow max(min) \tag{2.12}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \underset{>}{\leq} b_i, \; i = \overline{1,k}, \tag{2.13}$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0. \tag{2.14}$$

2. Построить прямые:

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{ai2}x_2 = b_i, \;\; i = \overline{1,k} \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}; \tag{2.15}$$

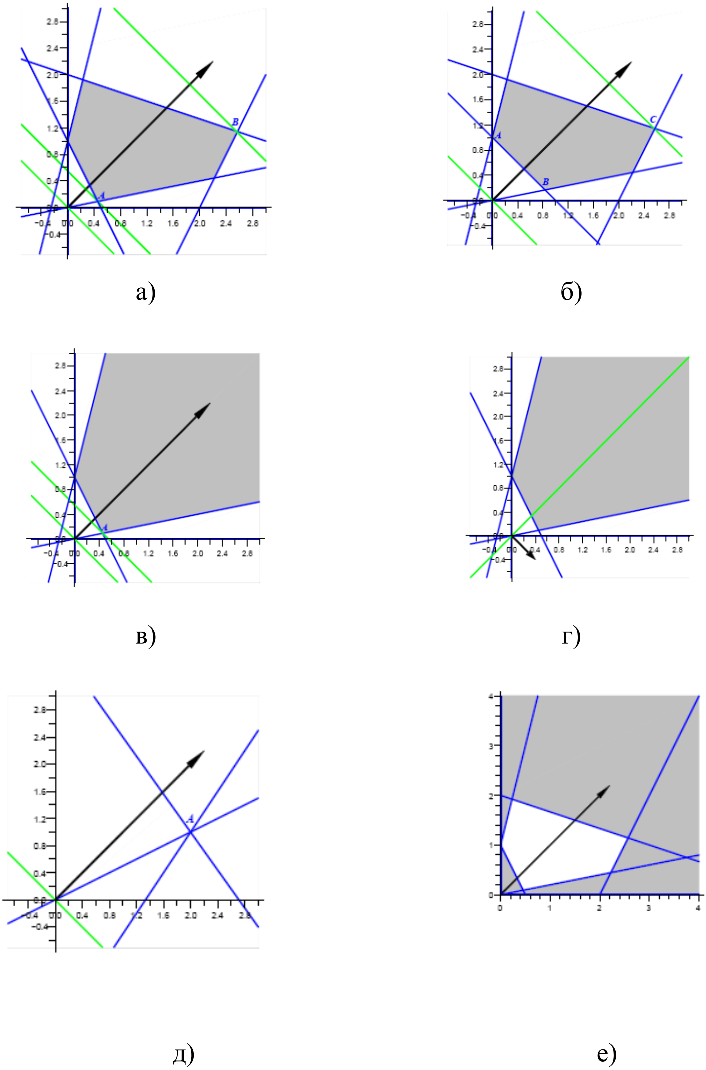


Рис. 2.9. Многогранники решений в ЗЛП

3. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений (2.13) - (2.14);

4. Определить многоугольник решений;

5. Построить вектор $gradF = \overline{n} = (c_1; c_2)$;

6. Провести линию уровня целевой функции (2.12): $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = 0$ (т.е. берём h = 0);

7. Параллельно перенести линию уровня в направлении вектора $\vec{n}$, в результате чего либо найти точку (точки), в которых целевая функция (2.12) принимает максимальное значение, либо установить неограниченность сверху целевой функции на множестве планов. В случае определения минимального значения целевой функции (2.12) прямая $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = 0$ передвигается в направлении вектора - $\vec{n} = (-c_1; -c_2)$;

8. Определить координаты точки максимума (минимума) целевой функции (2.12) и вычислить значение целевой функции в этой точке;

9. Дать анализ найденного решения.

Решение задач линейного программирования симплексным методом

С точки зрения геометрического смысла задачи линейного программирования (ЗЛП) каждая вершина многогранника решений определяет опорный план задачи и в одной из вершин целевая функция принимает оптимальное значение. Симплексный метод решения ЗЛП состоит в переборе опорных решений задачи по определённому правилу, обеспечивающему приближение к оптимальному решению на каждом шаге.

Замечание. Если первое опорное решение недопустимо, то для решения ЗЛП необходимо применить модифицированный симплексный метод. К появлению отрицательных компонент в первом опорном решении приводит наличие в системе ограничений неравенств типа " $\geq$ ", так как сведение таких неравенств к равенствам происходит вычитанием дополнительной неотрицательной переменной.

Модификация симплексного метода состоит в следующем: в каждое уравнение, дающее отрицательную компоненту в первом опорном решении вводится новая неотрицательная искусственная переменная y_i, которая имеет тот же знак, что и свободный член в правой части уравнения. В число базисных переменных включаются все искусственные переменные и обычные добавочные переменные, дающие неотрицательные компоненты первого опорного решения. Вводится новая целевая функция

$T = F - M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_к)$ и определяется её максимум, который достигается при всех y_i=0. При M=1 метод носит название метода искусственного базиса.

На практике T-задача сводится к вычислению минимума (максимума) M-функции равной сумме строк, содержащих искусственные переменные y_i или к вычислению максимума (-M)-функции.

2.4 Транспортная задача

Транспортная задача (ТЗ) также относится к задачам линейного программирования. Она состоит в наиболее рациональном закреплении пунктов отправления некоторого однородного продукта к пунктам потребления, при этом в качестве критерия оптимальности берется либо минимальная стоимость перевозок, либо минимальное время доставки груза.

Важность этих задач и специфика получающихся ограничений позволили разработать более эффективный по сравнению с симплекс-методом алгоритм решений.

Математическая модель задачи. Обозначим пункты отправления $A_i \ (i = \overline{1, m})$. В каждом из этих пунктов запасы груза - a_i. Пункты назначения обозначаются $B_j \ (j = \overline{1, n})$ и потребности каждого b_j. Выполняется условие баланса, т.е. количество груза отправленного с пунктов отправления, равно количеству пришедших грузов в пункт назначения. Задана матрица стоимостей $C = (c_{ij})$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & .. & c_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{.......................} \\ c_{m1} & c_{m2} & .. & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Требуется найти матрицу транспортных перевозок $X = (x_{ij})$, которая бы обеспечила минимум стоимости перевозок.

Составим целевую функцию:

$$F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min . \qquad (2.16)$$

Запишем ограничения:

1) Все грузы должны быть вывезены

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , i = \overline{1, m} \cdot \qquad (2.17)$$

2) Все потребности должны быть удовлетворены

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \ j = \overline{1, n} \cdot \qquad (2.18)$$

3) Грузы перевозятся из пунктов отправления в пункт назначения

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ i = \overline{1, m} \ , \ j = \overline{1, n} \ . \qquad (2.19)$$

4) Выполняется условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M, \quad (M > 0) \ \cdot \qquad (2.20)$$

Если последнее условие не выполняется, то задача называется открытой. Если условие (5) выполняется, то имеем закрытую ТЗ.

Существует два способа поиска начального опорного плана:

1. метод северо-западного угла;
2. метод минимальных затрат.

Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находят последовательно за ($m+n$-1) шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которую называют занятой. Заполнение этой клетки обеспечивает полностью, либо удовлетворение потребителей в грузе одного из пунктов назначения, либо вывоз грузов из одного из пунктов отправления. В первом случае временно исключают из рассмотрения столбец, содержащий заполненную клетку, и рассматривают задачу с таблицей условий на один столбец меньше (количество строк старые, но соответственно изменятся запасы груза). Во втором случае временно исключают из рассмотрения строку, содержащую заполненную клетку (количество столбцов сохраняется, потребности в грузе изменятся). Если на некотором шаге, но не на последнем, оказывается, что потребность очередного пункта назначения равна запасам очередного пункта отправления, то также исключают из рассмотрения либо строку, либо столбец, но только что-нибудь одно. При этом либо запасы соответствующего пункта отправления, либо потребности данного пункта назначения считают равным нулю. Этот ноль записывают в очередную заполняемую клетку и считают эту клетку занятой. Этот процесс гарантирует получение ($m+n$-1) ненулевых компонент опорного плана, что является исходным условием проверки опорного плана на оптимальность.

В методе северо-западного угла заполнение таблицы начинают с x_{11} и заканчивают x_{mn}. В методе минимальных затрат на каждом шаге выбирается клетка с минимальным тарифом. Первый опорный план даёт низкую стоимость перевозок.

Для определения оптимального плана используют *метод потенциалов*.

Теорема. Если для некоторого опорного плана $X^*(x_{ij}^*)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ в транспортной задаче существуют такие числа α_1, α_2,.., α_m и β_1, β_2,.., β_n, для которых выполняются условия:

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij} \ (x_{ij} > 0), \tag{2.21}$$

$$\beta_j - \alpha_i \le c_{ij} \ (x_{ij} = 0), \tag{2.22}$$

для всех i и j, то X^* - оптимальный опорный план.

Пусть найден некоторый опорный план. Для каждого пункта отправления и назначения определяют потенциалы α_i, β_j из соотношения (2.21). Так как число неизвестных на единицу больше числа заполненных клеток, то одно из значений α_i берут равным нулю (чаще всего $\alpha_1 = 0$), и находят все остальные α_i и β_j. После того, как все потенциалы найдены, для каждой из свободных клеток вычисляют $\gamma_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$.

Если среди γ_{ij} нет положительных, то опорный план - оптимальный. Если для некоторой свободной клетки $\gamma_{ij} > 0$, то полученный опорный план неоптимальный и необходимо сделать пересчет таблицы. Для этого рассматривают все свободные клетки, для которых $\gamma_{ij} > 0$. Из этих чисел выбирают максимальное. Клетку, которой соответствует максимальное число необходимо заполнить, изменив объемы поставок, записанных в ряде заданных клеток, связанных с выбранной клеткой так называемым «циклом».

Циклом называется ломаная, вершины которой находятся в занятых клетках таблицы, а звенья параллельны строкам и столбцам, причем в каждой вершине цикла встречается ровно 2 звена. Если ломаная, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами.

При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл.

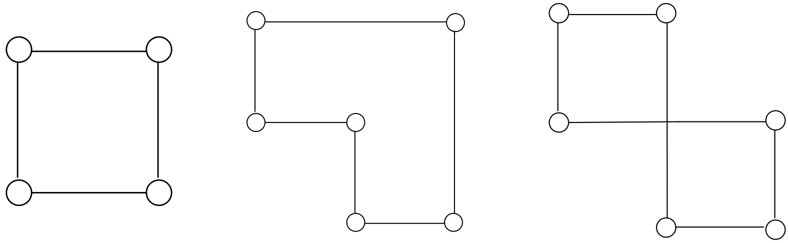


Рис. 2.10. Виды циклов пересчета

После того, как для выбранной клетки построили цикл, следует перейти к другому опорному плану, т.е. переместить грузы в пределах клеток, связанных с выбранной свободной клеткой цикла по следующим правилам:

1. К каждой клетке цикла приписывают знак, причем выбранной свободной клетке “+”, а всем остальным “-”, “+” и т.д.;

2. В свободную клетку переносят меньшую из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число прибавляется к соответствующим числам в клетках со знаком “+” и вычитается в клетках со знаком “-”.

Клетка, которая была свободной, становится занятой, а клетка с “-”, в которой стояло минимальное из чисел x_{ij} считается свободной. В результате этих перемещений грузов определяется новый опорный план ТЗ. Переход от одного плана к другому называется сдвигом по циклу пересчета. Новый опорный план проверяется на оптимальность (методом потенциалов). Если план не оптимальный, то процедуры повторяются.

При определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить на сколь угодно малое положительное $\varepsilon > 0$. В оптимальном плане такой задачи считаем $\varepsilon = 0$.

Решение открытых ТЗ. Существует два случая открытых моделей:

1. Транспортная задача с избытком запасов. Для отыскания оптимального плана вводят дополнительный фиктивный пункт назначения B_{n+1} с потребностью b_{n+1} равной избыткам

запасов и полагают стоимость перевозок в данный пункт равным 0. Полученная задача замкнута, определяется оптимальный план задачи и в полученной матрице перевозок отбрасывается последний столбец.

2. Транспортная задача с избытком заявок. Для отыскания оптимального плана вводят фиктивный пункт отправления A_{n+1} с потребностью a_{n+1}, стоимость перевозок из этого пункта считают нулевой. ТЗ становится замкнутой, и в оптимальном плане этой задачи отбрасывается последняя строчка.

Решение ТЗ при запрещении некоторых перевозок. Речь идет о задачах, в которых нельзя перевозить груз из некоторого пункта a_i в пункт b_j. В этом случае стоимость перевозок из пункта a_i в b_j полагают равной достаточно большому числу *М*. Тогда при отыскании оптимального плана соответствующие перевозки будут блокированы.

Решение ТЗ с ограничением на пропускные способности. По условию задачи перевозка груза из пункта a_i в b_j должна быть больше и равна некоторого заранее заданного числа ($x_{ij} \geq l_{ij}$). Тогда организуют условные перевозки объемом l_{ij}, вычитая из a_i и b_j это число. Тариф в клетке ij оставляют прежним. В оптимальном плане, полученной задачи в клетку ij устанавливают значение $l_{ij} + x_{ij}$.

Транспортная задача с обязательными поставками. В этом случае каждую обязательную перевозку $x_{ij} = d_{ij}$ реализуют условно, при этом уменьшают на это число запасы a_i и потребности b_j. В дальнейшем, в клетку ij ставим максимально большой тариф. В оптимальном решении полученной задачи на место x_{ij} снова ставим d_{ij}.

2.5 Задача целочисленного линейного программирования

Задача целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП) - это задача, в которой некоторые или все переменные должны принимать строго целые значения, а целевая функция и ограничения линейны.

Математическая модель ЗЦЛП:

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j = b_i & i=\overline{1,m} \\ x_j \ge 0 \quad j=\overline{1,n} & x_j \in Z \end{cases}, \qquad (2.23)$$

где Z - целые числа

Если в задаче переменные принимают значения только 0 и 1, то имеем задачу с булевыми переменными, то есть частный случай ЗЦЛП. К ЗЦЛП относится и транспортная задача, если целочисленны параметры условий.

Для решения ЗЦЛП используют методы:

1. Метод Гомори;
2. Метод ветвей и границ.

Сущность метода Гомори. Согласно этому методу, сначала ЗЦЛП решается без требований целочисленности переменных. Если оптимальное решение такой задачи целочисленное, то оно является оптимальным решением исходной задачи. Если решение нецелочисленное, то по специальному алгоритму строится некоторое дополнительное линейное ограничение, удовлетворяющее следующим свойствам: 1) данное дополнительное ограничение отсекает полученное нецелочисленное оптимальное решение; 2) дополнительное ограничение не отсекает ни одного целочисленного решения. Дополнительное ограничение, удовлетворяющее этим двум свойствам, называется правильным отсечением.

Алгоритм метода Гомори: пусть решение исходной задачи, полученное симплекс-методом, без требования целочисленности на последнем шаге соответствующее оптимальному решению дают следующее выражения базисных переменных $x_1 \ldots x_m$, определенные через свободные $x_{m+1} \ldots x_n$:

$$\begin{aligned} &x_1 = b'_1 - a'_{1,m+1} \cdot x_{m+1} - \ldots - a'_{1n} \cdot x_n \\ &\ldots \\ &x_m = b'_m - a'_{m,m+1} \cdot x_{m+1} - \ldots - a'_{mn} \cdot x_n \\ &X^* = (b'_1, b'_2 \ldots b'_m; 0; 0 \ldots 0) \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Среди компонент вектора X^* имеется хотя бы одна нецелочисленная. Пусть она соответствует b'_k. Составим линейное ограничение:

$$\{b'_k\} - \{a'_{k,m+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{a'_{kn}\}x_n \le 0 \qquad (2.25)$$

где $\{b'_k\}$ - дробная часть b'_k; $\{a\} = a - [a]$ (а - исходное число, $[a]$ и $\{a\}$ - целая и дробная части числа соответственно). Целая часть числа - это наибольшее целое число, не превосходящая *а*.

Полученное отсечение (2.25) является правильным. Если в оптимальном решении X^* несколько целочисленных компонент, тогда для составления дополнительного ограничения выбирается компонента с наибольшей дробной частью. Неравенство (2.25) преобразуется в равенство путём добавления новой неотрицательной переменной. Полученное соотношение добавляется к ограничениям задачи. Если решение новой задачи целочисленное, то оно является решением исходной задачи. В противном случае составляется новое дополнительное ограничение.

Геометрическая интерпретация метода Гомори. На координатных плоскостях наносятся графики исходных и дополнительных ограничений. Дополнительные ограничения осекают часть многогранника решений, в которой не содержится ни одного целочисленного решения. Полученные в процессе отсечения вершины многогранника решений являются решениями ЗЦЛП.

Сущность метода ветвей и границ состоит в разбиении допустимого множества решений на подмножества и вычисления оценок целочисленной функции на этих подмножествах, которые позволяют исключать из рассмотрения подмножества, заведомо не содержащей оптимальной точки.

Алгоритму метода ветвей и границ:

1) решается ЗЦЛП без условия целочисленности переменных симплекс-методом;

2) если полученное оптимальное решение целочисленно, то оно является решением исходной задачи;

3) если полученное решение нецелочисленное, то целевая функция ЗЛП становится верхней границей оптимального значения целевой функции ЗЦЛП;

4) проводится ветвление по одной из нецелочисленных переменных оптимального решения по следующей схеме: пусть x_i нецелочисленная компонента оптимального решения, тогда $n<x_i<n+1$, где n - целое число и разбиение проводится на два подмножества: $x_i \le n$ и $x_i \ge n+1$. Если в оптимальном плане имеется несколько нецелочисленных переменных, то для ветвления

выбирается та, у которой дробная часть наиболее близка к $1/2$. Ограничения, полученные при ветвлении, добавляются к исходным ЗЛП. Если не в одной из полученных задач не получили целочисленное оптимальное решение, то для дальнейшего ветвления выбираем задачу с наибольшим значением целевой функции. Алгоритм повторяется до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение.

Геометрическая интерпретация метода ветвей и границ. На координатных плоскостях наносятся графики исходных ограничений и дополнительных ограничений. Дополнительные ограничения будут параллельны соответствующим осям координат и осекают часть многогранника решений, в которой не содержится ни одного целочисленного решения. Полученные в процессе отсечения вершины многогранника решений являются решениями ЗЦЛП.

2.6 Теория нелинейного программирования

Задача нелинейного программирования (ЗНП) - это задача, в которой целевая функция или система ограничений нелинейны. Также, часто на практике, имеются задачи, в которых они одновременно нелинейны.

Общий вид ЗНП:

$$F(x_1; x_2; ...; x_n) \to \max(\min), \tag{2.26}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношению:

$$\left.\begin{array}{ll} g_i(x_1; x_2; ...; x_n) \le b_i & i = \overline{1; k} \\ g_i(x_1; x_2; ...; x_n) = b_i & i = \overline{k+1; m} \end{array}\right\}, \tag{2.27}$$

где - F и g_i - некоторые известные функции *n* переменных, b_i - заданные числа.

Множество точек, удовлетворяющих системе (2.27), составляют ОДЗ задачи.

Функция $F(x_1; x_2; ...; x_n) \to \max$ называется *выпуклой вниз* (рис. 2.10) на выпуклом множестве *S*, если для любых точек этого множества $X' \in S$ и $X'' \in S$ выполняется соотношение для всех $c \in (0;1)$:

$$F(c \cdot X' + (1-c) \cdot X'') \le c \cdot F(X') + (1-c) \cdot X'' \tag{2.28}$$

Если соотношение (2.28) выполняется со знаком $\ge$, то функция называется *выпуклой вверх*.

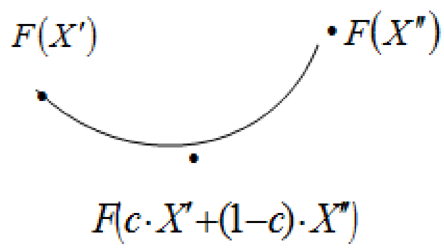


Рис. 2.10. «Выпуклое вниз» множество

Множество S называется выпуклым, если между любыми 2 своими точками оно содержит отрезок, соединяющий их.

Для выпуклого программирования (ЗВП) справедливы следующие теоремы:

1. Выпуклая функция $F(X)$ достигает своего глобального минимума в точке, в которой градиент функции равен 0. Вогнутая функция $F(X)$ определенная на выпуклом множестве S достигает своего глобального максимума, где градиент функции равен 0.
2. Локальный минимум выпуклой функции $F(X)$ совпадает с ее глобальным минимумом, а локальный максимум - с глобальным максимумом.
3. Критерий выпуклых функций - функция $F(X)$ выпуклая вниз, если ее вторые частные производные образуют матрицу с неотрицательными главными минорами.

Для решения ЗНП используют методы:

1. Графический метод решения ЗНП.
2. Метод множителей Лагранжа.
3. Градиентный метод.

Графический метод решения ЗНП для функций 2-х переменных:

$$F(x_1,x_2)\to \max$$
$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2)\le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,x_2)\le b_m \\ X=(x_1,x_2)\in R \end{cases}, \qquad (2.29)$$

Решить ЗНП графически - значит найти такую точку в ОДЗ задачи, через которую проходит линия уровня $F(x_1,x_2)=C$ с наибольшим значением *C*. В отличии от ЗЛП решение ЗНП может находиться как на границе области ОДЗ, так и внутри нее.

Этапы графического решения ЗНП:

1. На плоскости наносится геометрическое место точек, соответствующее каждому уравнению $g_i(x_1; x_2) = b_i$. Строится ОДЗ. Если ОДЗ пустое множество, то задача решения не имеет.

2. Строится линия уровня целевой функции $F(x_1, x_2) = C$ при различных значениях *C*.

3. Выбирается направление возрастания для максимума и убывания для минимума целевой функции.

4. Определяется точка ОДЗ, через которую проходит линия уровня с максимальным значением *C* для максимума и с минимальным значением *C* для минимума целевой функции. Если задача на максимум и целевая функция неограниченна сверху, то задача не имеет решения.

5. Для найденной точки $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ находят значение целевой функции $F^* = F(x_1^*, x_2^*)$ - оптимальное решение ЗНП.

Сущность метода множителей Лагранжа. Пусть требуется решить ЗНП следующего вида:

$$\begin{gathered} F(x_1; x_2; ...; x_n) \to \max(\min) \\ g_i(x_1; x_2; ...; x_n) = b_i \quad i = \overline{1, m} \end{gathered}, \tag{2.30}$$

Функции F и g_i непрерывны вместе со своими частными производными. Для нахождения решение задачи необходимо ввести набор переменных $\lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m$, называемых множителями Лагранжа, и составить функцию Лагранжа.

$$L(x_1; x_2; ...; x_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m) = F(x_1; x_2; ...; x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1; x_2; ...; x_n)], \tag{2.31}$$

Затем определить частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}; \quad j = \overline{1, n} \quad и \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2.32}$$

Рассматривается система $n + m$ уравнений (необходимое условие экстремума функции Лагранжа):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0; \quad j = \overline{1, n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \Rightarrow \quad X_0 = (x_1; ...; x_n; \lambda_1; ...; \lambda_m), \tag{2.33}$$

Решая эту систему, получают точку $X_0 = (x_1;...;x_n;\lambda_1;...;\lambda_m)$, которая может быть экстремумом. Необходимо использовать достаточное условие экстремума для подтверждения оптимальности полученного решения:

$$\begin{cases} d^2L(X_0) > 0 \Rightarrow \text{ условный min} \\ d^2L(X_0) < 0 \Rightarrow \text{ условный max} \end{cases}$$

Для функции 2-х переменных составляется определитель:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x_1} & L''_{\lambda x_2} \\ L''_{\lambda x_1} & L''_{x_1x_1} & L''_{x_1x_2} \\ L''_{\lambda x_2} & L''_{x_1x_2} & L''_{x_2x_2} \end{vmatrix}. \qquad (2.34)$$

Если $\Delta > 0$ - условный min; $\Delta < 0$ – условный max.

Множителям Лагранжа можно придать экономический смысл:

Если в уравнениях связей b_i имеет переменное значение, то: $\dfrac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = \lambda_i, \quad i = \overline{1,m}$. Если рассматривать целевую функцию F как доход или стоимость, а b_i - затраты некоторых ресурсов, то множители λ_i показывают как изменится максимальный доход или минимальная стоимость при изменении ресурса *i*-го вида на единицу выпущенной продукции.

Градиентные методы используют для решения любых ЗНП. Однако в общем случае эти методы позволяют найти точку локального экстремума. Поэтому наиболее целесообразно использовать градиентные методы для нахождения решения ЗВП, так как для выпуклых функций локальный экстремум является одновременно глобальным. Необходимым и достаточным условием оптимальности в точке X^* является равенство нулю градиента функции в этой точке.

Сущность градиентного метода. Если заранее известно, что функция $F(X)$ имеет в ОДЗ единственный экстремум, то поиск точки экстремума проводится следующим образом:

1. В ОДЗ берется произвольная точка X_0. С помощью градиента в случае отыскания максимума целевой функции и антиградиента, если рассматривается минимум целевой функции, определяется направление, в котором целевая функция изменяется с наибольшей скоростью. Сделав шаг в этом направлении, переходят в новую точку $X_1 \in$ ОДЗ, снова определяют направление

наибыстрейшего изменения и получают точку X_2 и т.д. Таким образом, строится последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$, сходящаяся к X^*.

Для точек этой последовательности выполняется условие:

1) $F(X_0) < F(X_1) < \ldots$, если рассматривается $F \to \max$;

2) $F(X_0) > F(X_1) > \ldots$, если рассматривается $F \to \min$.

Величина шага по направлению градиента или антиградиента определяется значением параметра λ в уравнении прямой:

1) $X = X_0 + \nabla F(X_0) \cdot \lambda$ – движение в сторону градиента;

2) $X = X_0 - \nabla F(X_0) \cdot \lambda$ – движение в сторону антиградиента.

Значение λ выбирается исходя из конкретных условий задачи или по следующему правилу: перемещение по прямой в новую точку X_1 сопровождается изменением целевой функции $F(X)$ на величину ΔF, зависящую от выбранного λ.

Значение λ^*, при котором приращение ΔF принимает наибольшее значение, определяется из необходимого признака экстремума для функции ΔF:

$$\frac{d\Delta F}{d\lambda} = 0 \text{ или } \nabla F(X_0) \cdot \nabla F(X_1) = 0. \tag{2.35}$$

Градиентные методы, как правило, дают точное решение за бесконечное число шагов. Условием окончания поиска является равенство 0 производной в найденной точке, либо когда значение очередного шага станет меньше бесконечно малого числа ε.

Условие Куна-Таккера для решения задач выпускного программирования. Рассматривается ЗНП вида:

$$F(x_1; x_2; \ldots; x_n) \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1; \ldots; x_n) \le b_i; \quad i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0 \;; \quad j = \overline{1,n} \end{cases}. \tag{2.36}$$

Пусть функции $g_i(X)$ удовлетворяют условию регулярности, т.е. они линейны и существует хотя бы одна точка X, в которой $g_i(X) < b_i$.

Теорема 1 (для задачи на max):

Пусть $F(X)$ и $g_i(X)$ дифференцируемы в ОДЗ задачи (функции $g_i(X)$ выпуклые и удовлетворяют условиям регулярности). Если $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ - оптимальное решение задачи, то существуют $\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*$, для которых выполняется условие:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i(X^*)}{\partial x_j} = 0; \quad \overline{j = 1; n} & (2.37) \\ \lambda_i^* (g_i(X^*) - b_i) = 0; \quad i = \overline{1; m} & (2.38) \\ \lambda_i^* \geq 0 \end{cases}$$

Для задачи на минимум данные условия отличаются только знаком «+» в равенстве (2.36)

Теорема 2

Пусть в дополнение к условиям Теоремы 1 *F(X)* выпукла вверх для задачи на максимум и выпукла вниз для задачи на минимум. Тогда $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ - оптимальное решение задачи, если существуют $\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*$, удовлетворяющие условию (2.38).

Данные условия можно рассматривать как условия для функции Лагранжа при множителях Лагранжа:

Если рассматривается $F \to \max$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X^*)}{\partial x_j} \leq 0, \quad j = \overline{1, n} \\ x_j^* \cdot \dfrac{\partial L(X^*)}{\partial x_j} = 0 \\ x_j^* \geq 0 \\ \dfrac{\partial L(X^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ \lambda_i^* \cdot \dfrac{\partial L(X^*)}{\partial \lambda_i} = 0 \\ \lambda_i^* \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.39) \\ \\ (2.40) \end{matrix}$$

Точка $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*)$ называется *седловой точкой*, если рассматривается максимум по X и минимум по λ.

Если рассматривается $F \to \min$, то знаки неравенств (2.39) и (2.40) меняются на противоположные. Для $F \to \min$ в *седловой точке*, рассматривается минимум по X и максимум по λ.

Условия Куна-Таккера расширяют область применения функции Лагранжа для ЗВП.

Задача квадратичного программирования (ЗКП) является частным случаем ЗВП. К ним относят задачи, в которых целевая функция содержит квадратичные слагаемые, а система ограничений линейна.

Квадратичной формой относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называют числовую функцию этих переменных следующего вида:

$$F(x_1; ...; x_n) = d_{11}x_1x_1 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_1x_3 + ... = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j, \quad (2.41)$$

Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если $F(X) > 0$ при любом X кроме $x = 0$, и *отрицательно определенной*, если $F(X) < 0$, при любом X кроме $x = 0$.

Квадратичная форма называется *положительно полуопределенной*, если $F(X) \geq 0$ при любом X и существует точка X', где не все $x_j \neq 0$, такая что $F(X') = 0$.

Квадратичная форма называется *отрицательно полуопределенной*, если $F(X) \leq 0$ при любом X и существует точка X', где не все, такая что $F(X') = 0$.

Квадратичная форма является выпуклой вверх, если она отрицательно полуопределенная; и выпуклой вниз, если она положительно полуопределенная.

Общий вид ЗКП:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0; & j = \overline{1,n} \end{cases} \quad . (2.42)$$

Условие Куна-Таккера для ЗКП:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \\
&2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k - \vartheta_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i = -c_j \\
&x_j \geq 0; \quad \vartheta_j \geq 0; \quad y_i \geq 0; \quad \lambda_i \geq 0 \\
&\sum_{j=1}^{n} x_j \vartheta_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \lambda_i = 0
\end{aligned} \quad . \qquad (2.43)
$$

Алгоритм решения ЗКП: 1) составляется функция Лагранжа; 2) записываются условия Куна-Таккера для существования седловой точки функции Лагранжа; 3) используя метод искусственного базиса, устанавливают либо отсутствие, либо координаты седловой точки функции Лагранжа.

3. Многокритериальная оптимизация композиционных материалов

Полимерные композиты характеризуются многокомпонентностью, что определяет сложность выбора оптимальных составов для различных технических приложений. Это связано с тем, что для каждой смолы возможно применение различных отвердителей и модификаторов, которые в значительной степени определяют как технические характеристики получаемого материала, так и его стоимость. При этом использование различных наполнителей приводит к еще более сложной задаче определения оптимальных составов. Вследствие этого трудно осуществить повторяемость результатов определения оптимальных составов, что приводит к субъективному характеру выбора содержания многокомпонентной полимерной смеси.

Задачи оптимизации составов обычно сводятся к поиску экстремума целевой функции $f(c,x)$ (c - вектор весовых коэффициентов, x - вектор изменяемых параметров (свойства материала)). Наиболее важным является подбор весовых коэффициентов таким образом, чтобы максимум целевой функции приходился именно на точку с оптимальными свойствами.

При решении практических задач нередко приходиться иметь дело с ситуациями, когда необходимо одновременно выполнение нескольких критериев, зачастую противоречивых. При производстве изделий из полимерных композиционных материалов необходимо обеспечение противоречивых физико-технических показателей (высокие значения предела прочности при одноосном сжатии, твердости и динамического модуля упругости; низкое значение массопоглощения) при минимальной себестоимости полученного изделия. Для решения данных задач используют методы многокритериальной оптимизации

Пусть имеется несколько целевых функций, которые для упрощения записи нужно максимизировать (задача на минимум преобразуется в задачу максимизации заменой знака функции на противоположный). Имеется набор ограничений, задающих область допустимых значений задачи. Получаем задачу многокритериальной оптимизации, которая в общей форме формулируется следующим образом:

$$f_i(x) \to \max, i = 1,\dots,m, \qquad (3.1)$$
$$x \in X.$$

Главная возникающая здесь сложность в неоднозначности оптимального решения: в точке, где один из критериев достигает своего максимума, другой может быть очень далек не только от максимума, но и даже от какой-либо приемлемой величины (рис.3.1).

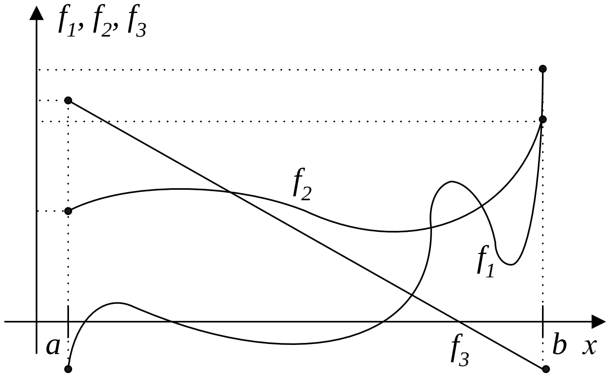


Рис.3.1. Задача многокритериальной оптимизации

Максимумы функций f_1 и f_2 достигаются в точке *b*, однако она же является точкой минимума третьей функции f_3, максимум которой достигается в точке *a*. Существует множество способов нахождения компромиссных решений.

Выделение главного критерия (условная максимизация)

Суть методики: выбирается наиболее важный из всего набора критерий и проводится его оптимизация при условии того, что значения остальных критериев не хуже наперед заданных фиксированных значений, считающихся удовлетворительными.

Пусть выбран наиболее важный для нас критерий f_1 (перенумеруем критерии так, чтобы самый важный оказался первым). Пусть заданы числа $f_i^{\min}$, $i = 2,\dots,m$ - удовлетворяющие нас значения соответствующих критериев. Будем решать однокритериальную задачу:

$$\begin{gathered} f_1(x) \to \max, \\ f_i(x) \geq f_i^{\min}, i = 2,\dots,m, \\ x \in X. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Главное в этом подходе избежать двух крайних случаев: когда множество точек *x*, при которых выполняются все неравенства $f_i(x) \geq f_i^{\min}$, совпадает с самим множеством *X* (тогда непонятно, для чего нужны остальные критерии) и когда подобное пересечение с множеством *X* пусто (т.е. были заданы недостижимые значения критериев $f_i^{\min}$, при которых не осталось ни одной допустимой точки).

Линейная свертка

Наиболее простым и часто используемым способом сведения многокритериальной задачи к однокритериальной является линейная свертка. Задаются весовые неотрицательные коэффициенты c_i, обозначающие степень важности каждого критерия, и максимизируется линейная комбинация целевых функций, т.е. решается задача

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x), \qquad (3.3)$$

$$x \in X,$$

$$c_i \geq 0, i = 1, \ldots, m, \sum_{i=1}^{m} c_i = 1.$$

В крайнем случае, когда какой-то из коэффициентов $c_j = 1$, а все остальные $c_i = 0,\ i \neq j$, мы приходим к однокритериальной задаче максимизации j - целевой функции.

Максиминная свертка

В этом способе заранее задаются масштабирующие коэффициенты f_i^0 (в частном случае все значения можно принять равными $f_i^0 = 1$) и решается задача максиминной оптимизации

$$g(x) = \min_{i=1,\ldots,n} \frac{f_i(x)}{f_i^0} \to \max, \qquad (3.4)$$

$$x \in X.$$

Коэффициенты f_i^0 здесь используются для приведения всех целевых функций к примерно одному масштабу, либо наоборот, для выделения какого-либо из критериев. Основным недостатком данного подхода является возможная потеря гладкости полученной целевой функции, однако в некоторых случаях применение такого способа свертки является достаточно удобным.

Макси-минимальная свертка

Вычисляются максимальные и минимальные значения, которые могут принимать на допустимом множестве каждая из целевых функций:

$$f_i^{\max} = \max f_i(x), x \in X, i = 1,\dots,m,$$
$$f_i^{\min} = \min f_i(x), x \in X, i = 1,\dots,m. \tag{3.5}$$

В этом случае разность этих значений $f_i^{\max} - f_i^{\min}$ будет интерпретироваться как амплитуда, разность значений $f_i^{\max} - f_i(x)$ - как абсолютное отклонение от максимума i - целевой функции в точке *x*, а их частное $\frac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}$ - как относительное отклонение от максимума i - целевой функции (в точке максимума оно равно нулю, а в точке минимума - единице).

Способ свертки состоит в решении задачи минимизации линейной комбинации с неотрицательными весовыми коэффициентами c_i, обозначающими важность i - критерия, относительных отклонений, определенных выше:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} \to \min,$$
$$x \in X, \tag{3.6}$$
$$c_i \geq 0, i = 1,\dots, \sum_{i=1}^{m} c_i = 1.$$

Существенным недостатков данного подхода является большой объем вычислений, необходимых для получения решения.

Метод ранжирования критериев

Пусть все критерии можно ранжировать (строго упорядочить) по важности так, что при последовательном рассмотрении критериев вначале используется первый (наиболее важный с точки зрения линейного программирования) критерий, затем второй и т.д. Это позволяет на множестве допустимых решений задать лексикографическое отношение предпочтения.

1) $f_1(x') > f_1(x'')$;

2) $\exists$ i < m: $f_j(x') > f_j(x'')$ для $j=1,\dots,i$, и $f_{i+1}(x') > f_{i+1}(x'')$. (3.7)

Допустимое решение x' лексикографически предпочтительнее допустимого решения x'' ,если выполняется одно из условий:

Если $f_1(x') = f_1(x'')$ для всех $i=1,\ldots,m$, то допустимые решения x', x'' лексикографически эквивалентны.

Допустимое решение x'' лексикографически оптимальное, если не существует допустимого решения x', для которого выполняется условие (3.7).

Найти лексикографически оптимальное решение многокритериальной задачи можно, решив следующую последовательность задач:

1) найти max $f_1(x') = f_1^*$ в области $x \in X$;

2) найти max $f_2(x') = f_2^*$ в области, задаваемой условиями
$x \in X;\ f_1(x')=f_1^*$;

………………………………………………………………… (3.8)

m) найти max $f_m(x') = f_m^*$ в области, задаваемой условиями
$x \in X;\ f_i(x')=f_i^*;\ \ i=\overline{1,m-1}$.

При этом искомым лексикографически оптимальным является всякое решение последней (m-ой) задачи. Полученное лексикографически оптимальное решение является одной из эффективных точек, однако выбор порядка ранжирования существенно влияет на то, какая из эффективных точек будет найдена.

Так как область допустимых решений очередной задачи представляет собой множество оптимальных решений предшествующих задач, то она быстро сужается до одной точки, лишая свободы выбора при максимизации последующих критериев. Попытка избавиться от этого недостатка предпринята в методе последовательных уступок.

Метод последовательных уступок (компромиссов)

Здесь так же, как и в предыдущем подходе, вначале производится качественный анализ относительной важности критериев. На основании такого анализа критерии нумеруются в порядке убывания важности.

Ищем максимальное значение f_1^* первого критерия $f_1(x)$ на всем множестве допустимых решений. Затем назначаем величину «допустимого» снижения (*уступки*) Δ_1 критерия $f_1(x)$ и определяем наибольшее значение f_2^* второго критерия $f_2(x)$ при условии, что значение первого критерия должно быть не меньше, чем - $f_1^*-\Delta_1$. Затем назначаем величину «допустимого» снижения (*уступки*) Δ_2

критерия $f_2(x)$ и определяем наибольшее значение f_3^* третьего критерия $f=f_3(x)$ при условии, что значение второго критерия должно быть не меньше, чем - $f_2^*-\Delta_2$ и т.д. При этом оптимальным решением многокритериальной задачи считается всякое решение последней из задач последовательности:

1) найти max $f_1(x') = f_1^*$ в области $x \in X$;
2) найти max $f_2(x') = f_2^*$ в области, задаваемой условиями
$x \in X;\ f_1(x') \geq f_1^*-\Delta_1$;
…………………………………………………………………… (3.9)
m) найти max $f_m(x') = f_m^*$ в области, задаваемой условиями
$x \in X; f_i(x') \geq f_i^*-\Delta_i$,
$i = \overline{1, m-1}$.

Очевидно, что если все $\Delta_i=0$, то метод уступок находит только лексикографически оптимальные решения, которые доставляют *первому* по важности критерию наибольшее X значение. В другом крайнем случае, когда величины уступок очень велики, решения, получаемые по этому методу, доставляют *последнему* по важности критерию наибольшее X значение. Поэтому величины уступок можно рассматривать как своеобразную меру отклонения приоритета частных критериев от жесткого лексикографического.

Метод последовательных уступок не всегда приводит к получению только эффективных точек, но среди получаемых этим методом точек всегда существует хотя бы одна эффективная. Это следует из следующих утверждений:

1. Если $X \subset R^n$ - множество замкнутое и ограниченное, а функции $f_i(x)$ непрерывны, то решением m-й задачи из (3.9) является, по крайней мере, одна эффективная точка.

2. Если X^* - единственная (с точностью до эквивалентности) точка, являющаяся решением m-й задачи из (3.9), то она эффективна.

Метод идеальной точки

Определим множество достижимости многокритериальной задачи как множество всех возможных значений целевых функций, которые мы получаем при всех допустимых значениях x:

$$Y = \left\{ y \in R^{\mathbf{m}} : y = f(x), x \in X \right\}. \tag{3.10}$$

Идеальной точкой назовем вектор, состоящий из максимальных значений всех целевых функций (рис.3.2):

$$f^* = \left(\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} f_1(x), \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} f_2(x), \ldots, \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} f_m(x) \right). \tag{3.11}$$

Основным исследуемым случаем является вариант, когда $f^* \notin Y$. В противном случае имеется точка, в которой достигается максимум по всем критериям, она и является оптимальной.

Решением задачи многокритериальной оптимизации считается точка, вектор значений целевых функций в которой минимально по норме отличается от идеальной точки:

$$\left\| f(x) - f^* \right\| \to \min, x \in X \;. \qquad (3.12)$$

Подобное решение $f^{\mathbf{opt}}$ изображено на рисунке.

Можно использовать как стандартную евклидову норму

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(f_i(x) - f_i^* \right)^2} \to \min, x \in X \;, \qquad (3.13)$$

так и Чебышевскую норму (максимальное по модулю отклонение)

$$\max_{i=1,\ldots,n} \left| f_i(x) - f_i^* \right| \to \min, x \in X \;. \qquad (3.14)$$

так и любой другой вид нормы.

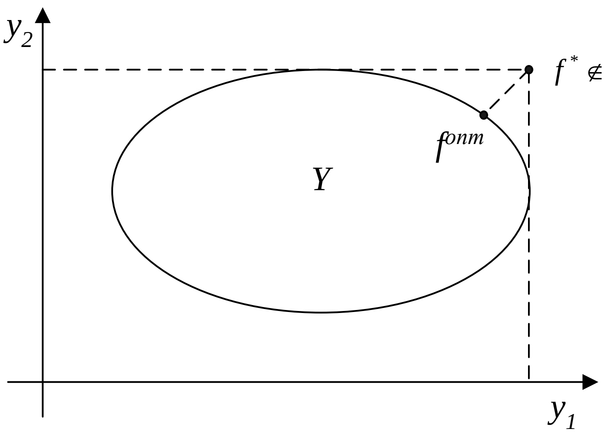


Рис.3.2. Метод идеальной точки

Решения, оптимальные по Парето и по Слейтеру

Рассмотрим наиболее общий подход к решению задач многокритериальной оптимизации.

Назовем решение $x \in X$ оптимальным по Парето, если не существует такого $y \in X$, что $f_i(y) \geq f_i(x), i = 1,\ldots,m$ и при этом хотя бы для одного i решения выполняется в строгой форме, т.е. если нельзя улучшить решение хотя бы по одному критерию, не ухудшив его по остальным.

Решение $x \in X$ - оптимально по Слейтеру, если не существует такого $y \in X$, что $f_i(y) > f_i(x), i = 1,..., m$, т.е. если нельзя улучшить решение одновременно по всем критериям.

Понятие оптимальности по Слейтеру более широкое, чем оптимальности по Парето. Любая точка, оптимальная по Парето будет оптимальной по Слейтеру, но не наоборот.

Однако и Парето-оптимальные решения дают нам весь спектр оптимальных решений многокритериальной задачи.

Заметим также интересный факт: подставляя различные весовые коэффициенты c_i при решении задачи (3.3), мы всегда получаем Парето-оптимальное решение. Более того, любое Парето-оптимальное решение является решением задачи (3.3) при некотором наборе весов c_i. В этом смысле, линейная свертка является самодостаточной.

4. Практическое применение методов оптимизации в композитных системах

4.1 Симплекс метод, как эффективный способ оптимизации затрат при производстве полимерных композиционных материалов

Рассмотрим применение симплексного метода для конкретной задачи.

Предприятие выпускает два вида продукции: А и В, при этом используется сырьё трёх типов. На изготовление единицы изделия А необходимо затратить: a_{11} = 2 кг сырья первого типа, a_{21} = 3 кг сырья второго типа, a_{31} = 1 кг сырья третьего типа.

Для изготовления единицы изделия В тратится: a_{12} = 1 кг сырья первого типа, a_{22} = 4 кг сырья второго типа, a_{32} = 3 кг сырья третьего типа.

Производство обеспечено сырьём каждого типа в количествах: b_1 = 400 кг сырья первого типа, b_2 = 900 кг сырья второго типа, b_3 = 600 кг сырья третьего типа.

Прибыль от реализации единицы изделия А составляет c_1=60 денежных единиц, единицы изделия В - c_2 = 40 денежных единиц.

Составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль при их реализации.

Решение:

Сформулируем задачу математически: пусть x_1 - количество изделий А и x_2 - количество изделий В, спланированных к производству. Тогда потребуется: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 2x_1 + x_2$ кг сырья первого типа, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 3x_1 + 4x_2$ кг сырья второго типа, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = x_1 + 3x_2$ кг сырья третьего типа.

Таким образом, система ограничений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 400 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 900 \\ x_1 + 3x_2 \le 600 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} . \qquad (4.1)$$

При реализации продукции будет получено $60x_1 + 40x_2$ денежных единиц, следовательно целевая функция запишется в виде:

$$F = 60x_1 + 40x_2 \to max .$$

Окончательно, математическая модель рассматриваемой задачи:

$$F = 60x_1 + 40x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 400 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 900 \\ x_1 + 3x_2 \le 600 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}. \qquad (4.2)$$

Требуется найти такие x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений и приводят целевую функцию к максимуму.

Полученная ЗЛП имеет стандартный вид, для применения симплексного метода её необходимо привести к каноническому виду. Для этого систему ограничений из неравенств переводим в равенства путём прибавления неотрицательной дополнительной переменной в случае неравенства "$\le$"и вычитания неотрицательной дополнительной переменной в случае неравенства "$\ge$".

Рассматриваемая ЗЛП в каноническом виде:

$$F = 60x_1 + 40x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 400 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 900 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 600 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}.$$

При решении задачи будем использовать так называемые симплексные таблицы, которые составляются из коэффициентов задачи. В качестве базисных переменных выберем такие переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений, и нет другого уравнения этой системы, в которое они не входят. В нашей задаче указанным условиям удовлетворяют x_3, x_4, x_5. Их выбираем за базисные переменные. Строки, кроме последней, заполняются соответствующими коэффициентами системы ограничений. Последняя строка таблицы называется индексной и состоит из коэффициентов уравнения:

$$F - 60x_1 - 40x_2 = 0.$$

В опорном решении ЗЛП переменные, не являющиеся базисными принимают нулевые значения, а базисные переменные равны частному от деления соответствующего свободного члена на коэффициент перед рассматриваемой переменной: $x_j = b_j / a_{ij}$. Первое опорное решение X_1 = (0; 0; 400; 900; 600) является допустимым, так как все его компоненты неотрицательны (необходимое условие применения симплексного метода выполнено). Значение целевой функции для первого опорного решения $F(X_1) = F_1 = 0$ (это значение находится на пересечении столбца свободных членов и индексной строки).

Проверим полученное решение на оптимальность: если все свободные члены b_i неотрицательны, а в индексной строке нет отрицательных элементов, то опорное решение оптимально. В индексной строке таблицы 1 находятся два отрицательных элемента, следовательно решение X_1 не оптимально.

Столбец таблицы, соответствующий наименьшему отрицательному элементу индексной строки, называется ключевым. Здесь ключевым будет столбец, соответствующий x_1 (наименьший отрицательный элемент индексной строки: -60).

Таблица 1

Базисные переменные	Неизвестные					b_i	Оценочные отношения
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
X_3	2	1	1	0	0	400	400/2=200
X_4	3	4	0	1	0	900	900/3=300
X_5	1	3	0	0	1	600	600/1=600
F	-60	-40	0	0	0	0	

Найдём оценочные отношения, то есть отношения свободных членов к соответствующим элементам ключевого столбца: 400/2 = 200, 900/3 = 300, 600/1 = 600, и занесём их в последний столбец таблицы 1. Если в ключевом столбце находится нулевое значение или свободный член и соответствующий элемент ключевого столбца имеют разные знаки, то оценочное отношение приравняем к бесконечности. Если все оценочные отношения таблицы равны бесконечности, то целевая функция неограниченна сверху и оптимальное решение не существует.

Строка таблицы, которой соответствует наименьшее оценочное отношение, называется ключевой. В нашем случае это первая строка. Элемент, стоящий на пересечении ключевого столбца и ключевой строки называется разрешающим элементом. Обозначим его a^*. То есть в таблице 1 ключевой столбец соответствует переменной x_1, ключевая строка соответствует базисной переменной x_3, разрешающий элемент $a^* = 2$.

Перейдём к составлению второй таблицы. Переменную соответствующую ключевому столбцу переведём в базисные на место переменной соответствующей ключевой строке: $x_1 \rightarrow x_3$. Все элементы ключевой строки делим на разрешающий элемент a^* и ставим в соответствующую строку таблицы 2.

Все элементы ключевого столбца, кроме разрешающего, который теперь стал равен 1, заменяем нулями и вносим в соответствующий столбец таблицы 2. Все остальные элементы таблицы 1 преобразуем по правилу прямоугольника. Для каждого элемента a_{ij} исходной таблицы составляем прямоугольник так, чтобы преобразуемый и разрешающий элементы располагались на одной диагонали этого прямоугольника:

$$\begin{array}{ccc} a^{*} & \text{- - - - - -} & B \\ | & & | \\ A & \text{- - - - - -} & a_{ij} \end{array}$$

где В - элемент, стоящий в одном столбце с a_{ij} и в одной строке с a^*; А - элемент, стоящий в одной строке с a_{ij} и в одном столбце с a^*.

В таблице 2 на место элемента a_{ij} ставим $a'_{ij} = a_{ij} - (A \cdot B)/a^*$.

Считаем остальные элементы таблицы 2.

2-я строка:

$a_{22}=4$, $a'_{22} = 4-(1\cdot 3)/2 = 5/2 = 2{,}5$; $a_{23}=0$, $a'_{23} = 0-(1\cdot 3)/2 = -3/2 = -1{,}5$; $a_{24}=1$, $a'_{24} = 1-(0\cdot 3)/2 = 1$; $a_{25}=0$, $a'_{25} = 0-(0\cdot 3)/2 = 0$; $b_2=900$, $b_2 = 900-(400\cdot 3)/2 = 300$.

3-я строка:

$a_{32}=3$, $a'_{32} = 3-(1\cdot 1)/2 = 2{,}5$; $a_{33}=0$, $a'_{33} = 0-(1\cdot 1)/2 = 0{,}5$; $a_{34}=0$, $a'_{34} = 0-(0\cdot 1)/2 = 0$; $a_{35} = 1$, $a'_{35} = 1-(0\cdot 1)/2 = 1$; $b_3 = 600$, $b_3 = 600-(400\cdot 1)/2 = 400$.

Индексная строка:

$c_2 = -40$, $c'_2 = -40-1\cdot(-60)/2 = -40+30 = -10$; $c_3 = 0$, $c'_3 = 0-[1\cdot(-60)]/2 = 30$; $c_4 = 0$, $c'_4 = 0-[0\cdot(-60)]/2 = 0$; $c_5=0$, $c'_5 = 0-[0\cdot(-60)]/2 = 0$; $F_1=0$, $F_2 = 0-[400\cdot(-60)]/2 = 12000$.

Опорное решение X_2=(200; 0; 0; 300; 400) является допустимым, значение целевой функции $F_2=F(X_2)$=12000. Полученное решение не является оптимальным, так как в индексной строке отрицательный элемент: -10.

Единственному отрицательному элементу соответствует столбец x_2. Этот столбец и будет ключевым. Оценочные отношения: 200/0,5 = 400; 300/2,5 = 120; 400/2,5 = 160.

Таблица 2

Базисные переменные	Неизвестные					b_i	Оценочные отношения
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
X_1	1	0,5	0,5	0	0	200	200/0,5=400
X_4	0	2,5	-1,5	1	0	300	300/2,5=120
X_5	0	2,5	-0,5	0	1	400	400/2,5=160
F	0	-10	30	0	0	12000	

Наименьшее оценочное отношение соответствует строке x_4. Эта строка будет ключевой. Разрешающий элемент a^* = 2,5. Проведя соответствующий пересчёт элементов, переходим к таблице 3.

Таблица 3

Базисные переменные	Неизвестные					b_i
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_1	1	0	0.8	-0.2	0	140
X_2	0	1	-0.6	0.4	0	120
X_5	0	0	1	-1	1	100
F	0	0	24	4	0	13200

Опорное решение X_3 = (140; 120; 0; 0; 100) является допустимым и оптимальным, так как в индексной строке нет отрицательных элементов и все свободные члены положительны. $X_{\max}$ = (140; 120; 0; 0; 100) и значение целевой функции $F_{\max} = F(X_{max}) = 13200$.

Вывод: продукцию вида А необходимо произвести 140 единиц, вида В - 120 единиц. При этом прибыль будет максимальна и равна 13200 денежных единиц. Значение переменной x_5 = 100, следовательно сырья третьего типа осталось неиспользованным 100 кг. Значение переменной $x_3 = x_4 = 0$, следовательно сырьё первого и второго типов израсходовано полностью.

4.2 Оптимизация физико-технологических свойств полимерных композиционных материалов

В процессе производства композиционных материалов достаточно легко оценить стоимость компонентов, но стоимость технологического процесса изготовления композита зависит во многом от массогабаритных параметров изделия. Вследствие этого общая целевая функция по методу линейной свертки представляет собой сумму трех целевых функций параметров объекта:

$$F(x) = c_1 * f_1(x) + c_2 * f_2(x) + c_3 * f_3(x), \quad (4.3)$$

где $f_1(x)$ - функция, определяемая показателями физико-механических свойств композита; $f_2(x)$ - функция, определяемая стоимостью компонентов композита; $f_3(x)$ - функция, определяемая стоимостью технологического процесса изготовления КМ; c_1, c_2, c_3 - весовые коэффициенты.

Процесс оптимизации физико-технологических свойств разбивают на два последовательных этапа:

1) оптимизируется матрица композита. Для выбранной пары «смола - отвердитель» находят экстремум функции $F(x)$ (x - массовое содержание отвердителя), а функция $F(x)$ является целевой, включающей в себя физико-технологические показатели, являющиеся важными с точки зрения результирующей оценки свойств композита и выраженные через массовое содержание отвердителя x, стоимость компонентов и технологического процесса изготовления композиционного материала. Весовые коэффициенты при этих параметрах определяются из специфики нагруженности деталей. При этом задача сводится к одномерной задаче поиска экстремума.

Для решения данной задачи применяют любые известные алгоритмы. Основным критерием выбора алгоритма является меньшее количество итераций с целью уменьшения количества экспериментов.

2) оптимизируется объемное содержание наполнителя в композиционном материале. Выбирается соответствующий наполнитель, и определяется оптимальное содержание из условия максимума целевой функции $F(x)$ (x - объемное содержание наполнителя), в которую с различными весовыми коэффициентами входят характеристики физико-технологических свойств, стоимость компонентов композиционного материала и технологического процесса. При таком подходе второй этап оптимизации так же сводится к одномерному поиску экстремума.

Таким образом, задача оптимизации физико-технических свойств композиционных материалов сводится к двум последовательным задачам одномерного поиска экстремума.

4.3 Оптимизация режимов механической обработки резанием полимерных композиционных материалов

Модель оптимизации режимов механической обработки резанием полимерных композиционных материалов строится по двум связанным между собой функциональным группам, включающим целевой критерий оптимизации и область граничных условий в виде неравенств, образующих область возможных решений. Целевая функция представляет собой аналитическую зависимость между целевым критерием и параметрами оптимизации процесса механической обработки. Параметрами оптимизации выступают скорость обработки (n - частота вращения шпинделя, об/мин) и подача (S, мм/об).

Целевые критерии делят на две группы:

1) технологический

$$F_{о.т.}(n,S) = \frac{L}{n \cdot S}, \tag{4.4}$$

где L - длина рабочего хода осевого инструмента, мм.

Данный критерий обеспечивает достижение максимальной выработки рабочего. Он применяется при ликвидации узких мест, когда экономия «живого» труда имеет наибольшее значение. Однако данный критерий может оказаться экономически неоправданным, поэтому предпочтительным является критерий, ориентированный на комплексные показатели - минимальную себестоимость процесса обработки и высокий коэффициент загрузки оборудования ($F_{о.к.}(n,S)$):

- для операции сверления

$$F_{о.к.}(n,S) = \frac{L}{n \cdot S} \cdot [k_{ст} + k_{зп} + \frac{k_{ин} \cdot (n \cdot S^{y_v})^{1/m}}{(k+1)(318 \cdot C_v \cdot D^{x_v - 1} \cdot e^{w} \cdot K_v)^{1/m}}] \tag{4.5}$$

,

- для операции фрезерования

$$F_{ок}(n,S) = \frac{L}{n \cdot S} \cdot [k_{ст} + k_{зп} + \frac{k_{ин} \cdot (n \cdot S_z{}^{y_v} \cdot B^{n_v} \cdot z^{g_v} \cdot t^{x_v})^{1/m}}{(k+1)(318 \cdot C_v \cdot D^{w_y - 1} \cdot e^{w} \cdot K_v)^{1/m}}], \tag{4.6}$$

где $k_{ст}$ - стоимость одной минуты работы станка; $k_{зп}$ - стоимость одной минуты рабочего времени работника; $k_{ин}$ - стоимость инструмента; C_v - коэффициент факторов, не входящих в уравнение в явном виде (физико-технические свойства обрабатываемого материала и осевого инструмента); D - диаметр инструмента; e - основа натурального логарифма; S_z - подача на зуб фрезы; t - глубина резания; T - стойкость инструмента; k - число переточек инструмента, зависящее от марки инструментального материала и его конструкции; K_v - коэффициент, учитывающий отличие конкретных условий работы инструмента от принятых за основу;

x_v, y_v, m, w_y, g_v, n_v - коэффициенты технологических параметров обработки; B - ширина срезаемого слоя; z - количество режущих кромок инструмента; w - показатель степени, зависящий от D, S, T.

Выбор ограничений представляет аналитическую взаимосвязь между технологическими условиями обработки и подлежащими оптимизации рабочими режимами резания. Ограничения, влияние которых на оптимизацию технологических параметров проявляется наиболее значительно, могут быть разделены на группы. Ограничения, отнесенные к станку:

1) минимальная (S_{min}) и максимальная подача станка (S_{max});

2) предельные скорости обработки, зависящие от минимальных (n_{min}) и максимальных (n_{max}) чисел оборотов шпинделя станка;

3) максимально допустимые нагрузки, ограниченные мощностью электродвигателя привода главного движения

$$S^{y_z} \cdot n^{n_z} \le \frac{N_H \cdot \eta}{C_z \cdot D^{z_z} \cdot \pi^{n_z} \cdot K_z}, \tag{4.7}$$

где N_H - мощность электродвигателя главного привода станка, кВт; η - коэффициент полезного действия механизма передачи от электродвигателя к инструменту; C_z - постоянный коэффициент, характеризующий условия обработки; K_z - общий поправочный коэффициент на мощность, учитывающий измененные условия обработки против нормативных; y_z, n_z, z_z - показатели степени;

4) максимально допустимые нагрузки механизма подачи станка

$$n^{n_s} \cdot S^{y_s} \ge \frac{10^{3 \cdot n_s} \cdot P_{s.доп}}{C_s \cdot D^{n_s + z_s} \cdot \pi^{n_s} \cdot K_s}, \tag{4.8}$$

где n_s, z_s - показатели степени; $P_{s.доп}$ - сила подачи станка, допускаемая прочностью механизмов станка; K_s - поправочный коэффициент на подачу резания; C_s - постоянный коэффициент, характеризующий условия обработки;

5) производительность станка

$$n \cdot S \ge \frac{L \cdot R}{60 \cdot K_з \cdot r_R - T_{В.Н.} \cdot R}, \tag{4.9}$$

где R - заданная производительность станка, шт.ч.; $K_з$ - коэффициент загрузки станка; r_R - число деталей, обрабатываемых одновременно на одной позиции; $T_{В.Н}$ - вспомогательное неперекрываемое время, мин.

6) со стойкостью инструмента

$$S^{y_v} n \le \frac{318 \cdot C_v \cdot D^{x_v - 1} \cdot K_v \cdot e^w}{T^m}. \qquad (4.10)$$

Сумма ограничений образует “комплекс ограничений”, а область совместности ограничений, выраженная неравенствами, - “поле решений”. В полученном “поле решений” возможно нахождение оптимальных режимов обработки. На основе неравенств и уравнений ограничений выбирается рациональные технологические параметры обработки в рамках заданных ограничений. Для решения задачи оптимизации используются методы линейного программирования.

Для анализа математической модели процесса механической обработки с использованием методов линейного программирования необходимо все неравенства технических ограничений и уравнения оценочной функции преобразовать в линейные формы.

Прологарифмировав систему ограничений и уравнения оценочной функции, введя обозначения $\lg n = X_1$ и $\lg S = X_2$, получим систему линейных неравенств и линейные функции, подлежащие оптимизации, которые в совокупности и представляют собой математическую модель процесса механической обработки резания:

$$\begin{cases} z_1 \cdot X_1 + y_1 \cdot X_2 \le\ge b_1; \\ z_2 \cdot X_1 + y_2 \cdot X_2 \le\ge b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n \cdot X_1 + y_n \cdot X_2 \le\ge b_n; \end{cases}; \qquad (4.11)$$

$$f_i = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 \to \max(\min),$$

где C_1, C_2 - весовые коэффициенты скорости и подачи соответственно.

Для решения системы неравенств используют симплекс метод.

При решении практических задач нередко приходиться иметь дело с ситуациями, когда необходимо одновременно выполнение нескольких критериев, зачастую противоречивых. При оптимизации режимов механической обработки осевыми инструментами необходимо обеспечение максимальной производительности, минимальной себестоимости процесса резания и высокого коэффициента загрузки оборудования.

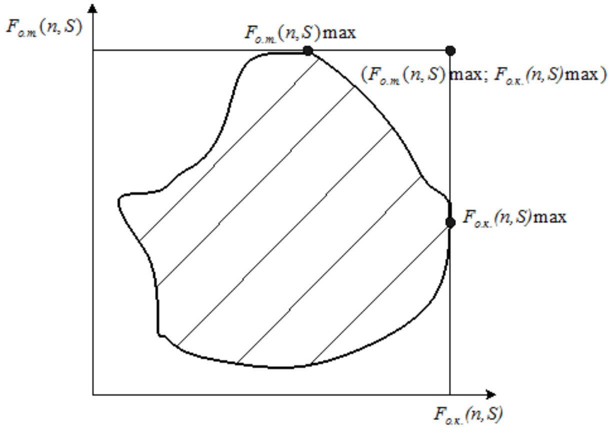


Рис.4.1. Множество Парето

Для решения данных задач используют методы многокритериальной оптимизации (множество Парето) рис.4.1.

В общем случае $F_{о.т.}(n,S)\max$ и $F_{о.к.}(n,S)\max$ достигаются в разных точках, а точка ($F_{о.т.}(n,S)\max$; $F_{о.к.}(n,S)\max$) лежит вне плоскости Парето. Для решения поставленной задачи необходимо нахождение компромиссного решения, используя метод уступок или метод идеальной точки.

5. Примеры выполнения курсовой работы

Однопараметрическая оптимизация физико-механических свойств композиционных материалов

Рассмотрим задачу проектирования композиционного материала с заданными механическими свойствами. При этом предполагается, что компоненты, входящие в состав композиционной системы, известны, как и влияние этих компонентов на отдельные механические характеристики материала. Задача, таким образом, сводится к выбору оптимальных значений концентрации данных компонентов для достижения требуемых механических свойств.

Выберем для рассмотрения эпоксиполиуретановый композит, для получения которого используют следующие исходные составляющие: эпоксидная смола (ЭД-20); отвердитель ПЭПА; модифицирующая добавка – полиизоцианат; наполнитель – молотый кварцевый песок.

Эти составляющие перемешивают в следующей последовательности. Сначала, в течение 5 минут, смешивают эпоксидную смолу и отвердитель. Затем вводят в смесь модифицирующую добавку и наполнитель и также осуществляют перемешивание в течение 5 минут. Окончательное формирование эпоксиполиуретана происходит в последующие 24 часа, в течение которых идёт реакция полимеризации. Процедура изготовления композита может завершаться операцией термообработки.

В качестве проектируемой механической характеристики будем рассматривать динамический модуль упругости эпоксиполиуретана - $E_д$. Для этого воспользуемся результатами измерений величины $E_л$, а также известными из литературы формулами, отражающими зависимость модуля упругости эпоксиполиуретана от концентрации компонентов, входящих в его состав.

Результаты анализа экспериментальных данных показывают, что измеренные значения модуля упругости эпоксиполиуретана при различных концентрациях отвердителя могут быть описаны некоторой аналитической кривой, определяемой формулой:

$$E_Д = -0{,}6527 \cdot M^3 + 18{,}032 \cdot M^2 - 78{,}428 \cdot M + 3633{,}7,$$

где M - количество отвердителя в массовых частях на 100 массовых частей смолы (количество отвердителя варьировалось в пределах от 8 до 25 массовых частей).

Для определения влияния количества полиизоцианата на динамический модуль упругости воспользуемся формулой, применяемой обычно для предварительной оценки модуля упругости вновь разрабатываемых композитов:

$$E_Д = E_m \cdot (1 + 11 \cdot M_{мод}^{1,7}),$$

где E_m - модуль упругости матрицы; $M_{мод}$ - количество модификатора в массовых частях на 100 массовых частей смолы (количество модификатора варьировалось в пределах от 0 до 20 массовых частей).

Дисперсный наполнитель - кварцевый песок добавляют в композит для его удешевления и увеличения $E_д$. Существуют уравнения, прогнозирующие свойства композитов с усиливающим наполнителем. Для кварцевого песка наиболее применимо уравнение Гутто-Смолвуда:

$$E_Д = E_m \cdot (1 + 2,5 \cdot \vartheta + 14,1 \cdot \vartheta^2),$$

где ϑ - объёмное содержание наполнителя.

Для дисперснонаполненных композитов количество добавки обычно варьируется в пределах от 0 до 0,7 от объёма композита. Предположим, мы используем в качестве наполнителя кварцевый песок со следующими параметрами: плотность $\rho_f = 1855$ кг/м^3, удельная поверхность $S_{уд} = 250$ м^2/кг, коэффициент компактности $\eta = 0.86$. Наполнители с таким показателем компактности относят к высокополидисперсным, и для них оптимальное значение объёмного содержания определяется неравенствами:

$$0,637/(2,3 \cdot 10^{-7} \cdot \rho_f \cdot S_{уд} + 1)^3 < \vartheta < 0,87/(2,3 \cdot 10^{-7} \cdot \rho_f \cdot S_{уд} + 1)^3,$$

После вычислений получаем интервал варьирования для ϑ от 0,41 до 0,57.

Собрав все вышеперечисленные формулы воедино, получим общее уравнение зависимости динамического модуля упругости эпоксиполиуретанового композита от количества исходных составляющих:

$$E_Д = (-0,6527 \cdot M_{отв}^3 + 18,032 \cdot M_{отв}^2 - 78,428 \cdot M + 3633,7) \cdot (1 + 11 \cdot M_{мод}^{1,7}) \cdot (1 + 2,5 \cdot \vartheta + 14,1 \cdot \vartheta^2)$$

Таким образом, мы полностью описали проектируемый композит, установив зависимость проектируемой величины $E_д$ от концентрации компонентов, входящих в его состав.

Постановка и решение задачи оптимизации. Предположим, мы хотим получить зпоксиполиуретан с динамическим модулем упругости равным 6000 МПа. В таком случае, целевая функция, выступающая в роли критерия при выборе оптимального состава материала, должна выглядеть следующим образом:

$$F(M, M_{мод}, \vartheta) = \left|6000 - E_{Д}\right| \cdot$$

Сформулируем задачу математически. Обозначим количество отвердителя M через x_1, количество модификатора $M_{мод}$ через x_2, а количество наполнителя ϑ через x_3. Результаты предварительно проведённых исследований, а также известные из литературы факты дают следующую систему неравенств, определяющих, в данном случае, область проектирования:

$$8 \le x_1 \le 25,$$

$$0 \le x_2 \le 20,$$

$$0{,}41 \le x_3 \le 0{,}57.$$

После введённых обозначений целевая функция принимает следующий вид:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left|6000 - (-0{,}6527 \cdot x_1^3 + 18{,}032 \cdot x_2^2 - 78{,}428 \cdot x_1 + 3633{,}7) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (1 + 11 \cdot x_2^{1{,}7}) \cdot (1 + 2{,}5 \cdot x_3 + 14{,}1 \cdot x_3{}^2) \right|$$

Решаемая нами задача будет заключаться в нахождении таких значений параметров x_1, x_2, x_3, которые бы удовлетворяли вышеприведённой системе неравенств и обеспечивали бы наименьшее значение для целевой функции $F(x_1, x_2, x_3)$.

Данная задача относится к типичным условным задачам многомерной оптимизации. Для её решения можно использовать любой метод многомерного поиска, в которой задача одномерной оптимизации может быть решена любым методом одномерного поиска.

Задача оптимизации решается с использованием программ (Mathlab, MathCAD, Excel) и ряда других специализированных программ.

Многокритериальная оптимизация физико-механических свойств композиционных материалов

Рассмотрим задачу определения оптимального варианта композиционного материала с использованием максиминной свертки (аддитивный критерий). Частными критериями, с помощью которых оценены варианты КМ, являются его физико-механические свойства: предел прочности при одноосном сжатии, динамический модуль упругости. Оба критерия «работают» на максимум, т.е. наилучшими вариантами КМ являются те из них, которые обеспечивают наибольший предел прочности при одноосном сжатии и динамический модуль упругости. Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 8.

Таблица 8

Исходные данные для определения оптимального варианта КМ

Критерий F_i	Весовой коэф-фициент C_i	Значения критериев для вариантов КМ		
		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Предел прочности при одноосном сжатии (F_1), МПа	0,6	1000	2000	4000
Динамический модуль упругости (F_2), МПа	0,4	1500	1000	500

Целевая функция на основе аддитивного критерия запишется следующим образом:

$$F(X) = C_1 \cdot \frac{F_1(X)}{F_1^{(0)}(X)} + C_2 \cdot \frac{F_2(X)}{F_2^{(0)}(X)} \to \max .$$

В качестве нормирующих делителей в данной задаче примем наилучшие (максимальные) значения частных критериев:

$F_1^{(0)}(X) = 4000$ МПа, $F_2^{(0)}(X) = 1500$ МПа.

Значения обобщенного аддитивного критерия рассчитываются для каждого варианта КМ:

Вариант 1.

$F(X)$ = 0,6(1000/4000) + 0,4(1500/1500) = 0,550.

Вариант 2

$F(X)$ = 0,6(2000/4000) + 0,4(1000/1500) = 0,558.

Вариант 3

$F(X)$ = 0,6(4000/4000) + 0,4(500/1500) = 0,732.

Оптимальным является 3 вариант КМ, т.к. ему соответствует максимальное значение обобщенного аддитивного критерия.

Один из недостатков этого метода заключается в том, что весовые коэффициенты назначает проектировщик. Разные проектировщики могут назначать разные весовые коэффициенты. Пусть, например, C_1 = 0,4; C_2 = 0,6. Определим теперь значения аддитивных критериев для КМ:

Вариант 1.

$F(X)$ = 0,4(1000/4000) + 0,6(1500/1500) = 0,700.

Вариант 2.

$F(X)$ = 0,4 (2000/4000) + 0,6(1000/1500) = 0,602.

Вариант 3.

$F(X)$ = 0,4(4000/4000) + 0,6(500/1500) = 0,732.

Т.е. при таком изменении значений весовых коэффициентов **оптимальным уже будет 1 вариант КМ.**

Оптимизация режимов механической обработки резанием композиционных материалов

Рассмотрим задачу оптимизация режимов механической обработки резанием композиционных материалов с использованием графического метода решения ЗЛП.

Исходные данные задачи: необходимо определить оптимальные режимы резания при сверлении отверстия в КМ глубиной 10 мм, обеспечивающие максимальную производительность.

Частным критерием, с помощью которого оценены режимы резания КМ, является технологический критерий. Данный критерий «работает» на минимум, т.е. наилучшими вариантами режимов механической обработки КМ являются те из них, которые обеспечивают наименьшее время резания КМ.

Целевая функция запишется в виде:

$$F_{о.т.}(n,S) = \frac{L_{р.х.}}{n \cdot S} \to \min$$

$$L_{р.х.} = L_0 + L_{р.п.} = 10 + 4 = 14 мм,$$

где $L_{р.х.}$ - длина рабочего хода инструмента; L_o - глубина резания; $L_{р.п.}$ - длина перебега режущего инструмента.

Введем ряд ограничений, связанных с интервалами допустимых режимов резания КМ:

S_{min}=0,1 мм/об, S_{max}=0,8 мм/об; n_{min}=250 об/мин, n_{max}=1000 об/мин.

Так как графический метод относиться к ЗЛП, то приведем целевую функцию и систему ограничений к линейному виду путем логарифмирования:

1) введем обозначения $\lg n = X_1$ и $\lg S = X_2$;
2) получим систему ограничений и целевую функцию в виде:

$$\lg n_{min} \le \lg n = X_1 \le \lg n_{max};$$

$$\lg S_{min} \le \lg S = X_2 \le \lg S_{max};$$

$$\begin{cases} \lg S_{\min} = \lg 0{,}1 = -1 \le X_2 \\ \lg S_{\max} = \lg 0{,}8 = -0{,}1 \ge X_2 \\ \lg n_{\min} = \lg 250 = 2{,}4 \le X_1 \\ \lg n_{\max} = \lg 1000 = 3 \ge X_1 \end{cases};$$

$$F(X) = \lg(\frac{L}{n \cdot S}) = \lg L - \lg n - \lg S = 1{,}15 - X_1 - X_2 \to \min$$

3) так как значения переменных X_1 и X_2 должны удовлетворять условию не отрицательности, то путем замены - $X_2 = X_3$ получим:

$$3 \ge X_1 \ge 2{,}4$$

$$1 \ge X_3 \ge 0{,}1$$

$$F(X) = 1{,}15 - X_1 + X_3 \to \min$$

$$\bar{n} = (-1;1)$$

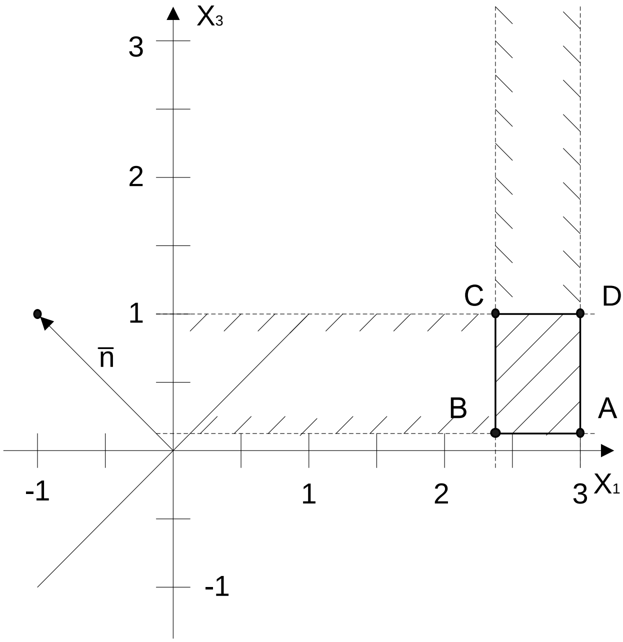


Рис.5.1. Графический способ решения ЗЛП

Минимальное значение функции *F(X)* достигается в точке А, с координатами (3;0,1). Путем замены $X_2 = -X_3$ и сделав обратное преобразование прологарифмированных величин, получим оптимальные режимы резания, обеспечивающие максимальную производительность станочного оборудования: *n*=1000 об/мин, *S*=0,8 мм/об.

При большом количестве ограничений и при использовании ЭВМ для решения поставленной задачи эффективнее использовать симплекс метод решения ЗЛП.

6. Примеры заданий на лабораторные работы

Лабораторная работа №1. Решение задач линейного программирования графическим методом.

Задание

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

2.Оформить отчет по работе, который должен содержать решения ЗЛП графическим методом, выводы, ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Сформулировать общую ЗЛП, стандартную ЗЛП, каноническую ЗЛП.
2. Переход от одной формы ЗЛП к другой форме ЗЛП.
3. Геометрическая интерпретация ЗЛП.
4. Виды многоугольников решений ЗЛП.

Варианты заданий.

Решить графическим способом задачи линейного программирования:

№ 1

а) $F = 3x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 75 \\ x_1 + x_2 \le 30 \\ x_1 + 4x_2 \le 84 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = 7x_1 - x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_2 \ge 2 \\ 8x_1 + 2x_2 \le 48 \\ 13x_1 - 6x_2 \ge 65 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = -4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_j \ge 0;\ j = 1;4 \end{cases}$$

№ 2

а) $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 26 \\ x_1 + 11x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 3

а) $F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ 10x_1 \le 8 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_5 = 8 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 4

а) $F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 9 \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = 2x_1 - 3x_2 + 1 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = -16x_1 - 7.5x_3 + 23.5x_4 - 5x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 12 \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 8 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 5 а) $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = x_1 + x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4 \\ 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 6 а) $F = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = 2x_1 - x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ -x_1 - 6x_2 \ge -10 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = 5x_1 + x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 7 а) $F = 6x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 4x_1 + x_2 \le 8 \\ 4x_1 - x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = x_1 - x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le -8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 8

а) $F = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = 8x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 18 \\ 3x_1 - x_2 \ge 3 \\ 2x_1 + x_2 \ge 18 \\ 4x_1 - x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = 14x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 8x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 5 \\ 5x_1 + x_3 + 3x_4 = 41 \\ -5x_1 + x_4 + 4x_5 = 15 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 9

а) $F = x_1 + x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 4x_1 - x_2 \le 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = 12x_1 + 4x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 1/2 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = 3x_1 + 3x_2 + x_5 - 4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_5 = 4 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 10

а) $F = 20x_1 + 60x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 16 \\ x_1 + x_2 \le 30 \\ 3x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 j \geq 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 11

а) $F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 \leq 44 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

б) $F = x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

в) $F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 j \geq 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 12

а) $F = x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \leq 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

б) $F = 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

в) $F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 j \geq 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 13

а) $F = x_1 + 5x_2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 7 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = -x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1 - 5x_2 \ge -5 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16 \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_5 = 12 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 14

а) $F = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = 12x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} 11x_1 - 6x_2 \le 66 \\ -x_1 + 11x_2 \le 11 \\ x_1 - 3x_2 \ge 15 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16 \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_5 = 12 \\ x_1 j \ge 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 15

а) $F = 7x_1 + 9x_2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 7x_1 + x_2 \le 35 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $F = -5x_1 - x_2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ 7x_1 + 3x_2 \le 28 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1+4x_2-2x_3+x_4=12 \\ x_1+x_2+2x_3+x_5=17 \\ 2x_1-x_2+2x_3=4 \\ x_1j\geq 0;\ j=\overline{1;5} \end{cases}$$

№ 16

а) $F=2x_1+x_2\to\max(\min)$

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2\leq 24 \\ 3x_1-3x_2\leq 9 \\ -x_1+3x_2\leq 3 \\ x_1\geq 0; x_2\geq 0 \end{cases}$$

б) $F=3x_1-2x_2\to\max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\leq 10 \\ -3x_1+2x_2\leq 12 \\ 3x_1+4x_2\geq 24 \\ x_1\geq 0; x_2\geq 0 \end{cases}$$

в) $F=6x_1+8x_2+x_3\to\max$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_5=4 \\ 5x_1-2x_2+x_4=8 \\ x_1j\geq 0;\ j=\overline{1;5} \end{cases}$$

№ 17

а) $F=3x_1+2x_2\to\max(\min)$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leq 13 \\ x_1-x_2\leq 6 \\ -3x_1+x_2\leq 9 \\ x_1\geq 0; x_2\geq 0 \end{cases}$$

б) $F=5x_1-3x_2\to\max(\min)$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\geq 6 \\ 2x_1-3x_2\geq -6 \\ x_1-x_2\leq 4 \\ 4x_1+7x_2\leq 28 \\ x_1\geq 0; x_2\geq 0 \end{cases}$$

в) $F=x_1+x_2+2x_3\to\max$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8 \\ -x_1+x_2+x_4=-4 \\ -x_1-2x_2+x_5=-6 \\ x_1j\geq 0;\ j=\overline{1;5} \end{cases}$$

№ 18

а) $F=x_1+4x_2\to\max(\min)$

$$\begin{cases} -x_1+4x_2\leq 2 \\ 3x_1+2x_2\leq 6 \\ x_1-x_2\leq 1 \\ x_1\geq 0; x_2\geq 0 \end{cases}$$

б) $F=7x_1+6x_2\to\max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2\geq 10 \\ 5x_1+2x_2\geq 10 \\ x_1\leq 6 \\ x_1\geq 0; x_2\geq 0 \end{cases}$$

в) $F = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18 \\ x_1 j \geq 0;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

№ 19

а) $F = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

б) $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

в) $F = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 j \geq 0;\ j = \overline{1;4} \end{cases}$$

№ 20

а) $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 44 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 28 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

б) $F = 2x_1 - x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

в) $F = x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 j \geq 0;\ j = \overline{1;4} \end{cases}$$

№ 21

а) $F = 4x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

б) $F = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

в) $F = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 j \geq 0;\ j = \overline{1;4} \end{cases}$$

Лабораторная работа №2. Решение задач линейного программирования симплекс методом

Задание

1. Записать задачу для числовых данных, соответствующих номеру варианта.

2. Составить математическую модель задачи, обеспечивающую максимальную прибыль данного производства с учётом имеющихся ограничений.

3. Решить задачу симплексным методом. Дать экономический анализ решения.

4. Решить задачу графическим методом. Сравнить результаты решений.

5. Сформулировать в экономических терминах двойственную задачу, составить её экономическую модель и найти решение, используя теоремы двойственности.

6. Определить интервал устойчивости двойственных оценок по отношению к изменению сырья каждого вида в отдельности. Указать наиболее дефицитный и недефицитный ресурсы.

7. Оформить отчёт о работе, в который включить ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Математическая формулировка ЗЛП.
2. Какие неизвестные в системе называются базисными и как их выбирать.
3. В чем заключается идея симплексного метода.
4. Последовательность шагов симплекс - алгоритма, реализованного на основе симплекс таблиц.
5. Формулировка критериев оптимальности, допустимости, альтернативности решения ЗЛП, совместности системы ограничения и ограниченности целевой функции для симплексного метода.
6. Каково назначения искусственного базиса и когда он используется?
7. В чем сущность зацикливания при решение ЗЛП и как оно устраняется?

Варианты заданий

№	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{23}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	10	5	1	8	10	2	168	180	24	14	18
2	2	4	6	3	1	7	180	240	426	16	12
3	1	1	1	0	2	1	10	16	12	3	2
4	6	2	3	4	3	1	240	150	90	8	4
5	1	2	1	2	1	1	13	16	8	3	4
6	2	3	1	1	1	2	20	45	22	40	50
7	2	1	0	5	1	1	1600	3000	200	20	60
8	4	2	3	1	2	2	44	28	48	4	3
9	3	4	1	2	1	2	18	24	10	4	5
10	1	3	5	2	4	3	184	424	582	34	50
11	12	4	1	4	4	4	300	120	84	30	40
12	1	3	1	2	2	1	10	18	6	2	3
13	2	2	1	1	3	5	132	180	250	40	30
14	2	3	2	7	3	1	560	300	158	56	35
15	1	3	2	3	4	1	300	540	260	50	30
16	2	3	1	3	1	2	298	300	185	22	40
17	4	1	5	2	2	4	440	400	655	32	24
18	3	3	1	4	1	5	600	357	600	42	26
19	5	2	1	4	1	2	810	490	288	34	36
20	1	1	3	2	1	2	290	170	438	30	44
21	5	4	1	2	5	3	750	807	396	30	48

Лабораторная работа №3. Решение транспортных задач.

Задание

1. Составить математическую модель транспортной задачи, обеспечивающую минимальную стоимость перевозок.
2. Решить транспортную задачу методом потенциалов, построив начальный опорный план методами северо-западного угла и минимальных затрат.
3. Оформить отчет по работе, содержащий постановку и решение транспортной задачи, выводы, ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Какие модели транспортных задач называются замкнутыми, открытыми.
2. Способы построения начального опорного плана.

3. Методы решения транспортных задач.

4. Критерий оптимальности плана перевозок согласно методу потенциалов.

5. Решение открытых задач транспортных задач.

6. Метод решения транспортных задач при запрещении некоторых перевозок.

7. ТЗ с ограничением на пропускную способность, методы решения.

Варианты заданий.

Для строительства четырёх объектов используется кирпич, изготовляемый на трёх заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовлять 100, 150, 50 условных единиц кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 75, 80, 60, 85 условных единиц. Известны также тарифы перевозок одной условной единицы кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов:

$$C = \begin{pmatrix} c & 7 & 3 & a \\ 1 & 2 & e & 6 \\ d & 10 & 20 & b \end{pmatrix}$$

Требуется составить план перевозок, имеющий минимальные транспортные издержки. Значения параметров *a, b, c, d, e* приведены в таблице:

Вариант	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	2	3	4	5
2	1	3	4	5	4
3	2	3	4	5	4
4	2	6	5	2	3
5	3	6	5	2	3
6	3	9	6	3	2
7	4	9	6	3	2
8	4	7	8	4	1
9	5	7	8	4	1
10	5	8	2	6	5
11	6	8	2	6	6
12	6	5	1	7	6
13	7	5	1	7	7
14	7	4	3	8	8

15	8	4	3	8	8
16	8	3	7	9	9
17	9	2	7	9	2
18	9	1	9	2	2
19	1	1	9	2	1
20	1	2	1	1	1
21	3	2	5	2	1

Лабораторная работа №4. Решение задач целочисленного программирования.

Задание

1. Решить ЗЦЛП методом Гомори. Графически представить полученные отсечения.
2. Решить ЗЦЛП методом ветвей и границ. Дать графическую иллюстрацию этапов решения.
3. Сравнить результаты решения ЗЦЛП, полученные этими методами.
4. Оформить отчет по работе, содержащий решение ЗЦЛП двумя методами, графические иллюстрации решений с полученными отсечениями, выводы, ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи относятся к ЗЦЛП?
2. Сущность метода Гомори.
3. Алгоритм метода Гомори.
4. Геометрическая интерпретация метода Гомори.
5. Главная идея метода ветвей и границ.
6. Этапы решения ЗЦЛП методом ветвей и границ. Правила ветвления.
7. Графическая иллюстрация отсечений проведенных по методу ветвей и границ.

Варианты заданий

1) $F = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$

2) $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

3) $F = 20x_1 + 40x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 1600 \\ \frac{1}{6} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \le 10 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

4) $F = 3x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 \le 44 \\ x_1 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

5) $F = 20x_1 + 40x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

6) $F = 2x_1 - 8x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 17 \\ x_1 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

7) $F = 7x_1 + 9x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 1600 \\ 3x_2 \le 7 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

8) $F = x_1 - 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 3x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$

9) $F = x_1 - 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \ge 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 11 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$

10) $F = x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$

11) $F = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$

12) $F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 25 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$

13) $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 4x_1 - x_2 \leq 15 \\ x_1 + 3x_2 \leq 16 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_{1.2} \in z$

14) $F = 7x_1 + 9x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_{1.2} \in z$

15) $F = 3x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 1600 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_{1.2} \in z$

16) $F = 5x_1 + 7x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 25 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_{1.2} \in z$

17) $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 3x_1 - 3x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_{1.2} \in z$

18) $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 9 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

19) $F = 7x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 110 \\ 11x_1 - 3x_2 \ge 24 \\ 2x_1 - 7x_2 \ge 15 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

20) $F = 6x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50 \\ -x_1 + 4x_2 \ge 18 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

21) $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_{1.2} \in z$$

Лабораторная работа №5. Решение задач нелинейного и квадратичного программирования

Задание

1.Решить ЗНП градиентным методом.

2.Решить ЗНП, используя условия Куна-Таккера.

3.Оформить отчет по работе, содержащий решение ЗНП двумя методами, графические иллюстрации решений, выводы, ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Какая задача называется ЗНП? Её математическая модель.
2. Определение выпуклых, вогнутых функций, особенности их поведения.
3. В чём состоит графический метод решения?
4. Сущность метода множителей Лагранжа для решения ЗНП.
5. Этапы решения ЗНП градиентным методом.
6. Условия Куна-Таккера для задач выпуклого программирования.
7. Задача квадратичного программирования, её математическая модель.
8. Условия Куна-Таккера для задачи квадратичного программирования.
9. Схема решения ЗКП с использованием условий Куна-Таккера.

Варианты заданий

1) $f = x_1 + 4 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 12 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2) $f = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8 \cdot x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) $f = -2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 12 \\ - x_1 + x_2 \ge -8 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4) $f = -2 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_1^2 - 3 \cdot x_2 + 0{,}2 \cdot x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 13 \\ 2\cdot x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5) $f = -4\cdot x_1 + 0{,}2\cdot x_1^2 - 2\cdot x_2 + 0{,}2\cdot x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} 4\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 30 \\ 6\cdot x_1 + 17\cdot x_2 \le 102 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6) $f = -2{,}4\cdot x_1 + 0{,}2\cdot x_1^2 - 5{,}2\cdot x_2 + 0{,}2\cdot x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 \le 15 \\ 13\cdot x_1 + 20\cdot x_2 \le 260 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7) $f = -5\cdot x_1 + 0{,}25\cdot x_1^2 - 7{,}5\cdot x_2 + 0{,}25\cdot x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} 3\cdot x_1 + 1{,}5\cdot x_2 \le 22{,}5 \\ 6{,}5\cdot x_1 + 10\cdot x_2 \le 130 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8) $f = -2{,}4\cdot x_1 + 0{,}4\cdot x_1^2 - 5{,}6\cdot x_2 + 0{,}4\cdot x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 \le 12 \\ 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9) $f = -x_1 + 0{,}125\cdot x_1^2 - 2{,}25\cdot x_2 + 0{,}125\cdot x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} 1{,}5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 18 \\ 10\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

10) $f = x_1 + 2 \cdot x_2 - 0{,}5 \cdot x_1^2 - 0{,}5 \cdot x_2^2 \to \max$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 18 \\ 10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

11) $f = 4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12 \\ x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

12) $f = -x_1^2 - x_2^2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5 \cdot x_2 \ge 1 \\ x_1 + 0{,}5 \cdot x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

13) $f = (x_1 - 3)^2 + 2 \cdot (x_2 - 2)^2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 4 \cdot x_2 \le 16 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

14) $f = x_1 + 2 \cdot x_2 - 0{,}2 \cdot x_1^2 - 0{,}2 \cdot x_2^2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4 \cdot x_2 \le 14 \\ 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 42 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

15) $f = 100 \cdot x_1^2 - (\cdot x_2 - 3)^2 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12 \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 30 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 22 \\ x_1 - 3 \cdot x_2 \le 0 \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \ge 10 \\ 5 \cdot x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

16) $f = x_2 - x_1^2 + 6 \cdot x_1 \to \max$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 24 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \le 15 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 24 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

17) $f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 7 \\ 10 \cdot x_1 - x_2 \le 8 \\ -18 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

18) $f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 6 \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \le 18 \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

19) $f = x_1 \cdot x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 12 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 24 \\ -3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

20) $f = 9 \cdot (x_1 - 5)^2 + 4 \cdot (x_2 - 6)^2 \to \min$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

21) $f = 6 \cdot x_1 + x_2 - x_1^2 - 9 \to \max$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 15 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Список литературы

1. 1. Леушин И. О. Моделирование процессов и объектов в металлургии [Электронный ресурс]: учебник/ И. О. Леушин. - Москва: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 208 с.- (Высшее образование).- В пер.- ISBN 978-5-91134-732-1.- Режим доступа: http://znanium.com/bookread.php?book=401597

2. Акулович Л. М. Основы автоматизированного проектирования технологических процессов в машиностроении [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л.М.Акулович, В.К. Шелег. - Москва: ИНФРА-М; Минск: Нов. знание, 2012. - 488 с. - (Высшее образование).- В пер.- ISBN 978-5-16-005289-2.- Режим доступа: http://znanium.com/bookread.php?book=249119

3. Конюх В. Л. Проектирование автоматизированных систем производства [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Л. Конюх. - Москва: КУРС: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 312 с. - В пер. - ISBN 978-5-905554-53-7. - Режим доступа : http://znanium.com/bookread.php?book=449810#none.

4. Воробьев Н.Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. - Л., 1974.

5. Тятюшкин А.И. Решение и анализ задач линейного программирования: Учебное пособие. - Иркутск: ИГЭА, 1994.

6. Зоркальцев В.И. Модели рыночной экономики: Учебное пособие. - Иркутск: ИГУ, 1993.

7. Подиновский, В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В. М. Гаврилов. - М.: Сов. радио, 1975. - 192 с.

8. Синергетика композитных материалов / В.И. Соломатова [и др.]. - Липецк: НПО “ОРИУС”, 1994. - 153 с.

9. Сафронов Н.Н., Акст Е.Р. Методы оптимизации в инженерной практике: Учебное пособие. - Наб. Челны: Изд-во КамПИ, 2002. - 30 с.

10. Сборник заданий по математике в 2-х ч.1 / В.В. Абрамова, Р.М. Зайниев, А.С. Сафаров: Под ред. А.М. Котляра. - Наб. Челны: Изд-во КамПИ, 2002.

11. Цифровое моделирование и анализ динамических систем. Лабораторный практикум / А.З. Асанов - Уфа, - Набережные Челны: Изд-во Камского государственного политехнического института, 2004. - 105 с.

12. ЭВМ и оптимизация композиционных материалов / В.А. Вознесенский [и др.] - К.: Будивэльнык, 1989. - 240 с.: ил.

13. Исследование операций в экономике: Учеб.пособие для вузов / Н.Ш. Кремер [и др.] - М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. - 407 с.

14. Турчак, Л.И. Основы численных методов. - М.: Наука, 1987.

Подписано в печать ____________
Формат 60x84/16 Бумага офсетная Печать ризографическая
Уч.-изд.л. 86 Усл.-печ.л. 5,4 Тираж 50 экз.
Заказ ___________
Издательско-полиграфический центр
Набережночелнинского института
Казанского (Приволжского) федерального университета

423810, г. Набережные Челны, Новый город, проспект Мира, 68/19
тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru