

U-критерий Манна-Уитни



Автор статьи – Ольга Фролова – в центре, между Еленой Желновой и Мирославом Меньшовым.

Ольга Фролова – бакалавр математики (Пензенский государственный университет, 2019). Выпускная квалификационная работа: Фролова О.В. «Задача синтеза многослойного анизотропного покрытия в СВЧ-диапазоне». Научный руководитель – профессор кафедры «Математика и суперкомпьютерное моделирование» Ю.Г. Смирнов.

Статистические гипотезы – это предположения или допущения о неизвестных генеральных параметрах, выражаемых в терминах вероятности, которые могут быть проверены на основании выборочных показателей с помощью статистических критериев, основанных на использовании статистических распределений.

Статистические гипотезы различают по виду предположений, содержащихся в них, при этом рассматривают *нулевую* и *альтернативную* гипотезы.

Существует два типа статистических методов **параметрические** и **непараметрические**.

Параметрические методы – это количественные методы статистической обработки данных, применение которых требует обязательного знания закона распределения изучаемых признаков в совокупности и вычисления их основных параметров. Например, известно, что выборки извлечены из генеральных совокупностей с нормальным законом распределения и одинаковыми дисперсиями. Требуется выяснить, одинаковы ли генеральные средние этих совокупностей.

Непараметрические методы – это количественные методы статистической обработки данных, применение которых не требует знания закона распределения изучаемых признаков в совокупности и вычисления их основных параметров. Например, непараметрической является гипотеза о равенстве генеральных средних значений двух совокупностей, если нет информации о виде законов распределения измеряемой величины.

Статистический критерий (К) (критерий значимости) – это некий параметр, вычисленный по определенному алгоритму, который используется для проверки основной гипотезы.

Согласно статистическим методам статистические критерии делятся на **параметрические** и **непараметрические**. *Параметрические критерии* используются в задачах проверки параметрических гипотез и включают в свой расчет показатели распределения, например, средние, дисперсии и т.д. Это такие известные классические критерии, как критерий Стьюдента, критерий Фишера и др. Они позволяют сравнить основные параметры генеральных совокупностей, а также оценить разности средних и различия в дисперсиях. Критерии способны выявить тенденции изменения признака, оценить взаимодействие двух и более факторов в воздействии на изменения признака.

Непараметрические критерии проверки гипотез основаны на операциях с другими данными, в частности, частотами, рангами и т.п. Непараметрические критерии менее точные, но зато у них нет жестких требований к данным. Эти данные могут быть почти любыми.

К числу непараметрических критериев относится **U-критерий Манна-Уитни**.

U-критерий Манна-Уитни – это непараметрический статистический критерий, использующийся для сравнения выраженности показателей в двух несвязных выборках.

Впервые непараметрические критерии применили в 30-х годах XX века. Они отличаются простотой проведения, для них не требуется вычислять какие-либо параметры распределения (средние значения, стандартные отклонения и др.)

Непараметрические критерии позволяют решить некоторые важные задачи, связанные с выявлением различий исследуемого признака, с оценкой сдвига значений исследуемого признака, выявлением различий в распределениях.

КРИТЕРИЙ МАННА-УИТНИ (U-критерий Манна-Уитни)

Данный метод выявления различий между выборками был предложен в 1945 году Фрэнком Уилкоксоном (F. Wilcoxon). В 1947 году он был существенно переработан и расширен Х.Б.Манном (H. B. Mann) и Д.Р.Уитни (D. R. Whitney), по именам которых и называется. U-критерий Манна-Уитни – непараметрический статистический критерий, используется для оценки различий между двумя независимыми и несвязанными малыми выборками по уровню какого-либо признака, измеренного количественно, например, для обнаружения различий в средних значениях двух генеральных совокупности (оценка эффективности новых лекарственных препаратов, новых методов физиотерапевтического лечения, сравнение результатов биохимического исследования в двух группах лиц и т.д.), выборки из которых представлены в ранговой шкале. Измеренные признаки располагаются на этой шкале в порядке возрастания, а затем нумеруются целыми числами. Эти числа и называются рангами. Значение имеет не сама величина признака, а лишь порядковое место, который она занимает среди других величин. Мерой отличия является число T-сумма рангов для каждой из групп. Этот метод определяет, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя рядами (ранжированным рядом значений параметра в первой выборке и таким же во второй выборке). Чем меньше значение критерия, тем вероятнее, что различия между значениями параметра в выборках достоверны.

Ограничения критерия Манна-Уитни

1. Число испытуемых в группах при использовании критерия Манна-Уитни не должно быть больше 60 человек.
2. Минимальное число испытуемых – 3 человека в каждой группе.
3. Объем групп не должен быть строго одинаковым, но не должен сильно различаться.

4. Сравнимые показатели могут быть как психологическими (тревожность, агрессивность, самооценка и пр.), так и не психологическими (успешность обучения, эффективность профессиональной деятельности и пр.)

U-критерий Манна-Уитни представляет непараметрическую альтернативу t-критерию Стьюдента для независимых выборок и вычисляется по формуле:

$$U = n_x \cdot n_y + \frac{n(n+1)}{2} - T, \quad (1)$$

где n_x и n_y – объемы выборок; n – объем выборки, имеющей большую ранговую сумму; T – большая сумма рангов из выборок X и Y .

Алгоритм использования U-критерия Манна-Уитни

При сравнении двух независимых малых (число вариантов в выборках менее 30) выборок за «рабочую» гипотезу принимается альтернативная гипотеза: H_1 ($\bar{X}_r - \bar{Y}_r \neq 0$), т.е. признается статистическая значимость различий между уровнями признака в рассматриваемых выборках.

1. Составить единый ранжированный ряд из обеих сопоставляемых выборок, расставив их элементы по степени нарастания признака и приписав меньшему значению меньший номер (ранг).

Ранжирование – распределение вариантов внутри вариационного ряда, от меньших величин к большим.

Если значения совпадают, им присваивают один и тот же средний ранг (например, если два значения поделили 3-е и 4-е номера обоим присваивают ранг 3,5).

2. Подсчитать отдельно сумму рангов для первой и второй выборок.
3. Определить наибольшую из двух ранговых сумм T .
4. Вычислить эмпирическое значение U-критерия (U) (по формуле (1)).

5. Определить по таблице для избранного уровня статистической значимости ($\beta = 5\%$ или $\beta = 1\%$) или доверительной вероятности ($p = 0.95$ или $p = 0.99$) критическое значение ($U_{кр}$) при заданной численности групп (Таблица 1 приложения).

6. Решение о достоверности различий, наблюдаемых между уровнем признака в рассматриваемых выборках, принимают на основании сравнения полученных эмпирического (U) и критического ($U_{кр}$) значений критерия Манна-Уитни.

Таблица 1.

Решение о принятии гипотезы	Условия принятия гипотезы	Вывод о достоверности различий между уровнем признака в рассматриваемых выборках
Гипотезу H_0 принимают	$U > U_{кр}$	Различия не являются статистически достоверными и носят случайный характер $(\bar{X}_r = \bar{Y}_r)$
Гипотезу H_1 принимают (гипотезу H_0 отвергают)	$U \leq U_{кр}$	Различия являются статистически достоверными $(\bar{X}_r - \bar{Y}_r \neq 0)$

Пример 1.

Результаты тестирования по 30-бальной шкале для группы X и группы Y представлены в Таблице 2. Сравнить эффективность двух методов обучения студентов в двух группах для уровня статистической значимости $\beta = 5\%$.

Уровень статистической значимости отражает степень точности вывода о наличии различий.

Таблица 2.

X	18	10	7	15	14	11	13				
Y	15	20	10	8	16	10	19	7	15	14	29

Составим объединенную ранговую таблицу 3, расположив во второй строке значения вариант из обеих выборок в порядке возрастания.

Таблица 3.

Принадлежность к выборке	X	Y	Y	X	Y	Y	X	X	X	Y	X	Y	Y	Y	X	Y	Y	Y
	7	7	8	10	10	10	11	13	14	14	15	15	15	16	18	19	20	29
Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	1.5	1.5	3	5	5	5	7	8	9.5	9.5	12	12	12	14	15	16	17	18
Ранг																		

Найдем суммы рангов каждой выборки и выберем большую из них: $T = 113$

Рассчитаем эмпирическое значение критерия по формуле (1):

$$U = 7 \cdot 11 + \frac{[11 \cdot (11 + 1)]}{2} - 113 = 30$$

Определим по таблице 1 приложения критическое значение критерия при уровне значимости $\beta = 5\%$: $U_{кр} = 16$.

Вывод: так как эмпирическое значение U-критерия больше критического ($U > U_{кр}$) при уровне значимости $\beta = 5\%$, то гипотеза H_0 о равенстве средних принимается и различия в методиках обучения не существенны.

Приложение

Таблица 1

Критические значения U-критерия Манна-Уитни для уровня значимости $\beta = 5\%$ и доверительной вероятности $p=0.95$.

n_x	n_y													
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	12	15	17	20	23	26	28	30	34	37	39	42	45	48
10	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	16	19	23	26	30	33	37	40	44	48	51	55	58	62
12	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	22	26	30	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	26	31	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

n_x и n_y - объем выборок.

Литература

1. Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.
2. Крамер Г. Математические методы статистики, 2 изд., пер. с англ., М., 1975.



«Когда мы ребяташками с пеналами и книжками...»