О гомологической классификации полуколец

С.Н.Ильин

Казанский (Приволжский) федеральный университет

27 августа 2021 г.

Гомологическая классификация колец:

Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1977, 1979.
Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.
Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — New York: Springer-Verlag, 1992.
Lam T. Y. Lectures on Modules and Rings. — New York–Berlin: Springer–Verlag, 1999.
Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

Гомологическая классификация дистрибутивных решеток:

Fofanova T. S. Polygons over distributive lattices, in: Universal Algebra, in: Colloq. Math. Soc. János Bolyai, V.29, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982. P.289–292.

Гомологическая классификация дистрибутивных решеток:

Fofanova T. S. Polygons over distributive lattices, in: Universal Algebra, in: Colloq. Math. Soc. János Bolyai, V.29, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982. P.289–292.

Гомологическая классификация моноидов:

Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2000.

Гомологическая полуколец:

Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999. (Chapter 17, менее 10 цитированных статей)

Гомологическая полуколец:

Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999. (Chapter 17, менее 10 цитированных статей)

Katsov Y. On flat semimodules over semirings // Algebra Univers. V. 51. N 2–3. 2004. P. 287–299.
Katsov Y. Toward homological classification of semirings: Serre's conjecture and Bass's perfectness in a semiring context // Algebra Univers. V. 52. N 2–3. 2004. P. 197–214.

Гомологическая полуколец:

Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999. (Chapter 17, менее 10 цитированных статей)

Katsov Y. On flat semimodules over semirings // Algebra Univers. V. 51. N 2–3. 2004. P. 287–299.
Katsov Y. Toward homological classification of semirings: Serre's conjecture and Bass's perfectness in a semiring context // Algebra Univers. V. 52. N 2–3. 2004. P. 197–214.

2004 – настоящее время: более 20 статей (Abuhlail J. Y., I., Katsov Y., Nam T. G.)

Определение.

Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0)$ такая, что
1) $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид;
2) $(S, \cdot)$ — полугруппа;
3) $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ для всех $x, y, z \in S$;
4) $0x = x0 = 0$ для всех $x \in S$.

В случае, когда $(S, \cdot, 1)$ — моноид, говорят, что S — *полукольцо с единицей*. Ниже все полукольца (если это не оговорено особо) предполагаются содержащими единицу, не исключая случай, когда $1 = 0$ и, следовательно, $S = \{0\}$.

Определение.

Коммутативный моноид $(M, +, 0_M)$ называется *правым полумодулем* над полукольцом S (*правым* S*-полумодулем*), если для любых $m \in M$ и $s \in S$ определено произведение $ms \in M$, причем для всех $m, m' \in M$, $s, s' \in S$ верно

1) $m(ss') = (ms)s'$;
2) $(m + m')s = ms + m's$;
3) $m(s + s') = ms + ms'$;
4) $m1 = m$;
5) $0_M\, s = 0_M = m0$.

Аналогично определяются *левые полумодули*.

Основные понятия

Определение.

Полумодуль M над полукольцом S называется *свободным*, если $M \cong \bigoplus_{i\in I} S_i$, где $S_i \cong S_S$ для всех $i \in I$.

Определение.

Полумодуль M называется *инъективным*, если для любого S-полумодуля B и его подполумодуля A, всякий S-гомоморфизм $\varphi\colon A \to M$ можно продолжить до S-гомоморфизма $\bar{\varphi}\colon B \to M$.

Определение.

Полумодуль M называется *проективным*, если для любых S-полумодулей A и B, любого сюръективного S-гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$ и любого S-гомоморфизма $\varphi\colon M \to B$ существует S-гомоморфизм $\psi\colon M \to A$, такой что $\alpha\psi = \varphi$.

Инъективность и проективность некоторых типов полумодулей

Теорема. [И., 2006]

Следующие условия для полукольца S эквивалентны:
1) все правые S-полумодули инъективны;
2) все конечно-порожденные правые S-полумодули инъективны;
3) все правые S-полумодули проективны;
4) все конечно-порожденные правые S-полумодули проективны;
5) S — классически полупростое кольцо.

Инъективность и проективность некоторых типов полумодулей

Теорема. [И., 2006]

Следующие условия для полукольца S эквивалентны:
1) все правые S-полумодули инъективны;
2) все конечно-порожденные правые S-полумодули инъективны;
3) все правые S-полумодули проективны;
4) все конечно-порожденные правые S-полумодули проективны;
5) S — классически полупростое кольцо.

Следствие. [И., 2010]

Все полумодули над полукольцом S свободны тогда и только тогда, когда S — тело.

Пусть $V(S) = \{s \in S : \ s + s' = 0$ для некоторого $s' \in S\}$. Для любых $a, b \in S$ положим: $a \equiv_{V(S)} b \ \Leftrightarrow \ a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in V(S)$.

Теорема. [И., 2010]

Следующие условия для полукольца S эквивалентны:
1) все проективные S-полумодули инъективны;
2) все инъективные S-полумодули проективны и $S/\equiv_{V(S)}$ можно вложить в инъективный полумодуль;
3) S — квазифробениусово кольцо.

Определение.

Полумодуль $M \neq 0$ называется *простым*, если он обладает ровно двумя конгруэнциями: отношением равенства и универсальной конгруэнцией.

Определение.

Полумодуль $M \neq 0$ называется *простым*, если он обладает ровно двумя конгруэнциями: отношением равенства и универсальной конгруэнцией.

Определение.

Полукольцо S называется *правым V-полукольцом* (*правым V^*-полукольцом*), если все простые правые S-полумодули инъективны (проективны).

Определение.

Полумодуль $M \neq 0$ называется *простым*, если он обладает ровно двумя конгруэнциями: отношением равенства и универсальной конгруэнцией.

Определение.

Полукольцо S называется *правым V-полукольцом* (*правым V^*-полукольцом*), если все простые правые S-полумодули инъективны (проективны).

Определение.

Полукольцо S называется *зероидным*, если уравнение $a + x = x$ разрешимо в S при любом $a \in S$.

V- и V^*-полукольца

Теорема. [И., 2012]

Для полукольца S следующие условия эквивалентны:
1) S — правое V-полукольцо;
2) любое существенное расширение каждого простого правого S-полумодуля M совпадает с M;
3) $S = R \oplus T$, где R — правое V-кольцо, T — зероидное правое V-полукольцо;
4) каждое фактор-полукольцо полукольца S — правое V-полукольцо.

Определение.

Правый (левый, двусторонний) идеал I полукольца S называется *строгим*, если $a + b \in I$ влечет $a, b \in I$ для всех $a, b \in S$.

Определение.

Правый (левый, двусторонний) идеал I полукольца S называется *строгим*, если $a + b \in I$ влечет $a, b \in I$ для всех $a, b \in S$.

Предложение. [Abuhlail, I., Katsov, Nam, 2015]

Полукольцо, имеющее не более двух тривиальных строгих правых идеалов, есть правое V-полукольцо тогда и только тогда, когда оно либо является правым V-кольцом, либо зероидным полукольцом.

V- и V^*-полукольца

Определение.

Правый (левый, двусторонний) идеал I полукольца S называется *строгим*, если $a+b \in I$ влечет $a, b \in I$ для всех $a, b \in S$.

Предложение. [Abuhlail, I., Katsov, Nam, 2015]

Полукольцо, имеющее не более двух тривиальных строгих правых идеалов, есть правое V-полукольцо тогда и только тогда, когда оно либо является правым V-кольцом, либо зероидным полукольцом.

Следствие. [Abuhlail, I., Katsov, Nam, 2015]

Полукольцо с делением есть правое V-полукольцо тогда и только тогда, когда оно является либо телом, либо зероидным полутелом.

V- и V^*-полукольца

Теорема. [И., 2012]

Коммутативное полукольцо S является V-полукольцом в том и только том случае, когда $S = R \oplus T$, где R — регулярное кольцо, а T — зероидное полукольцо со свойством: если $I \subset T$ — строгий первичный идеал и $x \in I$, то $\mathrm{Ann}(x) \not\subseteq I$.

V- и V^*-полукольца

Теорема. [И., 2012]

Коммутативное полукольцо S является V-полукольцом в том и только том случае, когда $S = R \oplus T$, где R — регулярное кольцо, а T — зероидное полукольцо со свойством: если $I \subset T$ — строгий первичный идеал и $x \in I$, то $\mathrm{Ann}(x) \not\subseteq I$.

Теорема. [И., 2017]

Всякое правое V^*-полукольцо является правым V-полукольцом.

V- и V^*-полукольца

Определение.

Элемент $z \in S$ называется *бесконечным*, если $a + z = z$ при любом $a \in S$.

Теорема. [И., 2017]

Полукольцо S является правым V^*-полукольцом ровно тогда, когда $S = R \oplus T$, где R — классически полупростое кольцо, а T — зероидное полукольцо, в котором существуют такие взаимно ортогональные элементы $z_1, \dots, z_k$, что
1) $z_1 + \ldots + z_k$ — бесконечный элемент для T;
2) все простые правые T-полумодули с точностью до изоморфизма исчерпываются попарно неизоморфными друг другу простыми полумодулями $z_1 T, \ldots, z_k T$.

Определение.

Полукольцо S называется *правым* CI*-полукольцом* (*правым* CP*-полукольцом*), если все циклические правые S-полумодули инъективны (проективны).

Определение.

Полукольцо S называется *правым CI-полукольцом* (*правым CP-полукольцом*), если все циклические правые S-полумодули инъективны (проективны).

Предложение. [И., 2018]

Всякое правое CI-полукольцо (правое CP-полукольцо) является правым V-полукольцом (соотв., правым V^*-полукольцом).

Определение.

Полукольцо S называется *гельфандовым*, если элемент $1+s$ обратим при любом $s \in S$.

CI- и CP-полукольца

Определение.

Полукольцо S называется *гельфандовым*, если элемент $1 + s$ обратим при любом $s \in S$.

Теорема. [Abuhlail, I., Katsov, Nam, 2015, 2017]

Гельфандово полукольцо S есть правое CI-полукольцо (правое CP-полукольцо) ровно тогда, когда S — конечная булева алгебра.

Определение.

Полукольцо S называется *антиограниченным*, если $S = V(S) \cup \{1 + s,\ s \in S\}$.

Определение.

Полукольцо S называется *антиограниченным*, если $S = V(S) \cup \{1 + s,\, s \in S\}$.

Пусть $\mathbb{B}_2$ — двухэлементная булева алгебра, $\mathbf{B}_3$ — полукольцо, получающееся присоединением к $\mathbb{B}_2$ "внешнего" бесконечного элемента, $B(3,2) = \mathbb{N}/(2 \sim 3)$. Для всякого полукольца S обозначим через $\mathrm{Ext}(S)$ полукольцо, получающееся последовательным присоединением к S "внешних" нулевого и бесконечного элементов.

Теорема. [Abuhlail, I., Katsov, Nam, 2015]

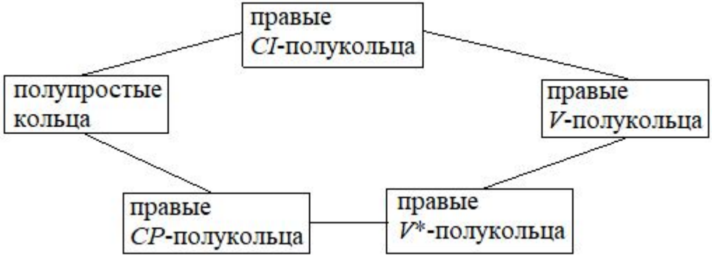
Антиограниченное полукольцо S является правым CI-полукольцом тогда и только тогда, когда $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T изоморфно либо $\mathbb{B}_2$, либо $\mathbf{B}_3$, либо $\mathrm{Ext}(R')$ для некоторого полупростого кольца R'.

Теорема. [Abuhlail, I., Katsov, Nam, 2015]

Антиограниченное полукольцо S является правым CI-полукольцом тогда и только тогда, когда $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T изоморфно либо $\mathbb{B}_2$, либо $\mathbf{B}_3$, либо $\mathrm{Ext}(R')$ для некоторого полупростого кольца R'.

Теорема. [I., Katsov, Nam, 2017]

Антиограниченное полукольцо S является правым CP-полукольцом тогда и только тогда, когда $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T изоморфно либо $\mathbb{B}_2$, либо $\mathbf{B}_3$, либо $B(3,2)$, либо полукольцу вида $\mathrm{Ext}(R')$ для некоторого полупростого кольца R'.


правые
CI-полукольца
полупростые
кольца
правые
V-полукольца
правые
CP-полукольца
правые
*V**-полукольца

Инъективные оболочки полумодулей

Теорема. [Wang, 1994]

Каждый полумодуль над аддитивно идемпотентным полукольцом обладает инъективной оболочкой.

Инъективные оболочки полумодулей

Теорема. [Wang, 1994]

Каждый полумодуль над аддитивно идемпотентным полукольцом обладает инъективной оболочкой.

Теорема. [Katsov, 1997]

Каждый полумодуль над аддитивно регулярным полукольцом обладает инъективной оболочкой.

Инъективные оболочки полумодулей

Теорема. [Wang, 1994]

Каждый полумодуль над аддитивно идемпотентным полукольцом обладает инъективной оболочкой.

Теорема. [Katsov, 1997]

Каждый полумодуль над аддитивно регулярным полукольцом обладает инъективной оболочкой.

Задача.

Пусть $\mathcal{T}$ некоторый фиксированный тип полумодулей. Описать все полукольца, над которыми любой полумодуль типа $\mathcal{T}$ обладает инъективной оболочкой.

Определение.

Полукольцо S *полузероидно*, если уравнение $a + x + y = y$ разрешимо в S при любом $a \in S$.

Теорема. [И., 2016]

Для полукольца S следующие условия эквивалентны:
1) каждый простой правый S-полумодуль обладает инъективной оболочкой;
2) каждый аддитивно идемпотентный простой правый S-полумодуль обладает инъективной оболочкой;
3) каждый простой правый S-модуль обладает инъективной оболочкой;
4) каждый правый S-модуль обладает инъективной оболочкой;
5) S полузероидно.

Инъективные оболочки полумодулей

Определение.

Полукольцо S *аддитивно π-регулярно*, если для каждого $a \in S$ уравнение $na + x + na = na$ разрешимо в S при подходящем $n \geq 1$.

Теорема. [И., 2016]

Для полукольца S следующие условия эквивалентны:
1) Каждый аддитивно идемпотентный правый S-полумодуль обладает инъективной оболочкой;
2) Каждый аддитивно регулярный правый S-полумодуль обладает инъективной оболочкой;
3) S аддитивно π-регулярно.

Теорема. [И., 2021]

Для полукольца S следующие условия эквивалентны:
1) Каждый правый S-полумодуль обладает инъективной оболочкой;
2) Каждый конечно-порожденный правый S-полумодуль обладает инъективной оболочкой;
3) S аддитивно регулярно.

Плоские полумодули и проективные оболочки

Теорема. [Katsov, 2004]

Пусть S — аддитивно регулярное полукольцо, для которого существует сюръективный гомоморфизм $\alpha : S \to \mathbb{B}_2$.
Следующие условия для S эквивалентны:
1) каждый правый S-полумодуль является плоским;
2) S — регулярное кольцо.

Теорема. [Katsov, 2004]

Пусть S — аддитивно регулярное полукольцо, для которого существует сюръективный гомоморфизм $\alpha : S \to \mathbb{B}_2$.
Следующие условия для S эквивалентны:
1) каждый плоский правый S-полумодуль проективен;
2) S — совершенное справа кольцо.

Теорема. [И., 2014]

Для полукольца S следующие условия эквивалентны:
1) каждый правый S-полумодуль обладает проективной оболочкой;
2) каждый плоский правый S-полумодуль проективен;
3) S — совершенное справа кольцо.

Определение.

Многообразие $\mathcal{M}_S$ правых S-полумодулей называется *шрайеровым*, если всякий подполумодуль любого свободного S-полумодуля свободен.

Теорема. [И., 2018]

Пусть S — полукольцо, не являющееся кольцом. Тогда многообразие $\mathcal{M}_S$ не шрайерово.

Определение.

Многообразие $\mathcal{M}_S$ правых S-полумодулей называется *p-шрайеровым*, если всякий проективный S-полумодуль свободен.

Шрайеровы и p-шрайеровы многообразия полумодулей

Определение.

Многообразие $\mathcal{M}_S$ правых S-полумодулей называется *p-шрайеровым*, если всякий проективный S-полумодуль свободен.

Предложение. [I., Katsov, 2011]

Пусть S — аддитивно π-регулярное полукольцо. Если многообразие $\mathcal{M}_S$ p-шрайерово, то S — кольцо.

Шрайеровы и p-шрайеровы многообразия полумодулей

Определение.

Полукольцо S *слабо аддитивно сократимо*, если $a + a = a + b$ влечет $a = b$ для всех $a, b \in S$.

Теорема. [I., Katsov, 2014]

Многообразие полумодулей $\mathcal{M}_S$ над полутелом S является p-Шрайеровым тогда и только тогда, когда S слабо аддитивно сократимо.

Теорема. [I., Katsov, 2014]

Пусть R — антинегативное полукольцо без делителей нуля, X — непустое множество и $S = R(X)$ — полукольцо многочленов над R от (необязательно коммутирующих) переменных из X. Тогда p-шрайеровость многообразия $\mathcal{M}_S$ равносильна p-шрайеровости многообразия $\mathcal{M}_R$.

Следствие. [I., Katsov, 2014]

Пусть R — полутело, не являющееся телом. Многообразие $\mathcal{M}_{R(X)}$ p-шрайерово тогда и только тогда, когда R слабо аддитивно сократимо.

Литература:

1. Ильин С. Н. Полукольца, над которыми все полумодули инъективны (проективны) // Матем. вестник пед. вузов и ун-тов Волго-Вятского региона. – 2006. – Вып.8. – С.50–53.
2. Ильин С. Н. О применимости к полукольцам двух теорем теории колец и модулей // Матем. заметки. – 2008. – Т.83, вып.4. – С.536—544.
3. Ильин С. Н. Прямые суммы инъективных полумодулей и прямые произведения проективных полумодулей над полукольцами // Изв. вузов. Матем. – 2010. – №10. – С.31–44.
4. Il'in S.N., Katsov Y. On p-Schreier varieties of semimodules // Comm. Algebra (2011) **39**:4 1491–1501.
5. Katsov Y., Nam T. G. Morita equivalence and homological characterization of semirings // J. Algebra Appl. (2011) **10**:3 445–473.

Литература:

6. Katsov Y., Nam T. G., Tuyen N. X. More on subtractive semirings: simpleness, perfectness, and related problems // Comm. Algebra (2011) **39**:11 4342–4356.
7. Ильин С. Н. О рангах идемпотентных матриц над полутелами // Матем. заметки. – 2012. – Т.91, вып.6. – С.832–839.
8. Ильин С.Н. V-полукольца // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т.53, No 2. – С.277–290.
9. Ильин С.Н. О полукольцах, удовлетворяющих критерию Бэра // Изв. вузов. Матем. – 2013. – №3. – С.33–39.
10. Abuhlail J. Y. Some remarks on tensor products and flatness of semimodules // Semigroup Forum (2014) **88**:3 732–738.

Литература:

11. Abuhlail J. Y. Exact sequences of commutative monoids and semimodules // Homology, Homotopy and Applications (2014) **16**:1 199–214.
12. Il'in S.N., Katsov Y. On Serre's problem on projective semimodules over polynomial semirings // Comm. Algebra (2014) **42**:9 4021–4032.
13. Il'in S.N. On projective covers of semimodules and perfect semirings // J. Algebra Appl. (2014) **13**:6 Article ID: 1450014 (9 pages).
14. Katsov Y., Nam T. G. On radicals of semirings and related problems // Comm. Algebra (2014) **42**:12 5065–5099.
15. Abuhlail J.Y., Il'in S.N., Katsov Y., Nam T.G. On V-semirings and semirings all of whose cyclic semimodules are injective // Comm. Algebra (2015) **43**:11 4632-4654.

Литература:

16. Il'in S.N. On injective envelopes of semimodules over semirings // J. Algebra Appl. (2016) **15**:7 Article ID: 1650122 (13 pages).
17. Ильин С.Н. О полукольцах, над которыми все простые полумодули проективны // Сиб. мат. журн. – 2017. – Т.58, № 2. – С.281–297.
18. Il'in S.N., Katsov Y., Nam T.G. Toward homological structure theory of semimodules: On semirings all of whose cyclic semimodules are projective // J. Algebra (2017) **476** 238–266.
19. Johnson M., Nam T. G. *FP*-injective semirings, semigroup rings and Leavitt path algebras // Comm. Algebra (2017) **45**:5 1893–1906.
20. Ильин С.Н. О гомологической классификации полуколец // Труды семинара кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 158, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 3—22.

Литература:

21. Abuhlail J.Y., Il'in S.N., Katsov Y., Nam T.G. Toward homological characterization of semirings by *e*-injective semimodules // J. Algebra Appl. (2018) **17**: 4 Article ID: 1850059 (24 pages).
22. Di Nola A., Lenz, G., Nam T. G., Vannucci S. On injectivity of semimodules over additively idempotent division semirings and chain *MV*-semirings // J. Algebra (2019) **538** 81–109.
23. Abuhlail J. Y., Noegraha R. G. On semisimple semirings // Comm. Algebra (2020) **49**:3 1295–1313.
24. Abuhlail J. Y., Noegraha R. G. Pushouts and *e*-projective semimodules // Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society **44**:1 527–562.
25. Il'in S.N. On semirings all of whose semimodules have injective envelopes // J. Algebra Appl. (2021) **20**:7 Article ID: 2150130 (13 pages).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!