ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАЗАНСКИЙ(ПРИВОЛЖСКИЙ)ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Дифференциальные уравнения

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

"Задача Римана в случае вещественного коэффициента"

Работа завершена:

«____»______________2015 г. ______________ Недоводина А. А.

Работа допущена к защите:

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент

«____»______________2015 г. ______________ Салехова И. Г.

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук, профессор

«____»______________2015 г. ______________ Елизаров А. М.

Казань — 2015

Содержание

Введение

1. Задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг

1. Постановка задачи

Пусть имеется счетное множество L_k гладких разомкнутых дуг L_1, $L_2, ...$, не имеющих общих точек(в том числе и концов), таких, что если R_k есть кратчайшее расстояние от начала координат до L_k, то $0 < R_1 \leq R_2 \leq ..., \lim_{k \to \infty} R_k = \infty$, при этом предполагаем, что в конечной части плоскости находится конечное число линий. На каждом контуре L_k заданы функции $G_k(t)$ и $g_k(t)$, удовлетворяющее условию Гёльдера на каждой из закрытых дуг L_k, причем $G_k(t) \neq$ всюду на L_k, включая концы.

Назовем функцию $\Phi(z)$ кусочно-голоморфной с линиями скачков L_1, $L_2, ...$, если вне этих линий она является аналитической всюду , кроме, быть может, точки $z = \infty$, а на каждой из дуг L_k имеет граничные значения слева и справа $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, непрерывные всюду, за исключением концов, в которых допускается обращение в ∞ интегрируемого порядка.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линиями скачков $L_1, L_2, ...$, если на этих линиях заданы условия

$$\Phi^+(t) = G_k(t)\Phi{-}(t) + g_k(t), t \in L_k$$

2. Задача о скачке

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$,если на линиях L_k заданы условия

$$\Phi^+ - \Phi^-(t) = g_k(t), t \in L_k \tag{1}$$

Особую линию L_k, в окресности которой $\Phi(z)$ отличается от интеграла типа Коши лишь аналитической в окресности и на линии L_k функцией, следуя В.В. Голубеву [1], будем называть полярной особой линией первого порядка. В окресности такой линии $\Phi(z)$ имеет представление

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z}, \tag{2}$$

где $\frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z}$- главная часть в окресности линии $L_k, \Omega(z)$ -функция, голоморфная в окресности линии L_k

При наличии бесконечного множества L_k полярных линий первого порядка имеет место теорема, являющаяся аналогом теоремы Миттаг-Леффлера.

Теорема (Аналог теоремы Меттаг-Леффлера).

Существует однозначная функция, голоморфная в любой конечной точки плоскости, не лежащей на линиях L_k, главная часть которой в окресности линии L_k есть интеграл типа Коши

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau - z} \tag{3}$$

Функция, существование которой утверждается в теореме, имеет вид:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [F_k(z) - h_k(z)], \tag{4}$$

где $h_k(z) = \sum_{j=0}^{n_k-1} c_{kj} z^j$-отрезок ряда Тейлора разложения $F_k(z)$ внутри круга $|z| < qR_k(q < 1)$, подобранный таким образом, что ряд (4) сходится абсолютно и равномерно в любой конечной области, если отбросить в нем конечное число членов.

Общее решение задачи (1)имеет вид:

$$\Phi(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [F_k(z) - h_k(z)] = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k} (\tau - z)},$$

где $P(z)$-целая функция. [4]

2. Структура решений однородной задачи

В однородной задаче Римана речь идет о построении кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$, непрерывные граничные значения которой $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ на каждой из разомкнутых дуг последовательности L_k удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G_k(t) \Phi^-(t), t \in L_k \tag{5}$$

Условие (5) выполняется всюду на L_k, кроме концов, где у искомой функции допускаются интегрируемые особенности.

Для нахождения общего решения задачи (5) сначала построим так называемую каноническую функцию $\chi(z)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \chi^+(t) = G_k(t) \chi^-(t), t \in L_k$$

$$2) \chi^+(t), \chi^-(t) \neq 0$$

Рассмотрим кусочно-голоморфную функцию

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{ln G_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k} (\tau - z)}, \tag{6}$$

где под $ln G_k(t)$ подразумеваем любую ветвь многозначной функции $Ln G_k(t)$ при условии, чтобы она непрерывно изменялась при движении t по L_k.

На основании вышеизложенного следует, что функция $\gamma(z)$ удовлетворяет условию задачи о скачке (1):

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = lnG_k(t), t \in L_k \tag{7}$$

Тогда функция

$$\chi(z) = e^\gamma(z) \prod(z) = e^\gamma(z) \prod\nolimits_{k=1}^\infty E^{-\chi_k}(\frac{z}{c_k}, n_k - 1), \tag{8}$$

где κ_k-целые числа, подобранные так, что выполняется неравенство
$-1 < \alpha_k - \chi_k < 1$

$$E(u, q) = (1 - u) \exp(\sum_{l=1}^{q} \frac{u^l}{l}) -$$

первичный множитель Вейерштрасса, будет одной из канонических функций.
Действительно, $\chi(z)$ имеет непрерывные граничные значения $\chi^+(t)$ и $\chi^-(t)$, удовлетвояющие условию однородной задачи (5)

$$\chi^+(t) = G_k(t)\chi^-(t), t \in L_k \tag{9}$$

Из представления (8) видно, что вне линий L_k на конечном расстоянии у $\chi(z)$ нет ни особых точек, ни нулей, а на концах c_k она может иметь только интегрируемые особенности. Поэтому функция $\chi(z)$ будет представлять одну из канонических функций однородной задачи. в представлении (8) за число n_k мы выбрали наибольшее из чисел n_k^* и n_k^{**}, обеспечивающих сходимость $\gamma(z)$ и $\prod(z)$

Каноническая функция однородной задачи (5) в классе $H^\infty(D_{k_n})$ будет иметь вид:

$$\chi(z) = e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E^{-\chi_k}(\frac{z}{c_k}, n_k),$$

где целые числа χ_k подобраны следующим образом:

1)$0 < \alpha_k - \chi_k < 1$ для всех членов последовательности $D_{k_n} = \{d_{k_n}\}$;

2)$-1 < \alpha_k - \chi_k < 0$ для всех членов последовательности $D'_{k_n} = \{d'_{k_n}\}$;

3) $\alpha_k - \chi_k = 0$ для всех членов последовательности $\{c'_k\}$

Аналогичным же образом можно построить каноническую функцию однородной задачи и в более узких классах

С помощью канонической функции решение задачи запишется в виде:

$$\Phi(z) = \chi(z)P(z),$$

где $P(z)$- произвольная целая функция.

3. Некоторые сведения из теории периодических функций

Определение.

Мероморфная функция называется однопериодической функцией, если все ее периоды являются целыми кратными одного периода ω_1

Будем рассматривать однопериодическую группу P_1 с основным периодом 2π.

$$P_1 : \omega_k(z) = z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, ...$$

Через R_0 обозначим вертикальную полосу $0 < Rez \leq 2\pi$, называемую полосой периода.

В области R_0 находится две части: верхний конец полосы периода $Imz = y > 0$, и нижний конец полосы периода, где $y < 0$. При изучении однопериодических функций с периодом 2π на верхнем конце полосы периода будем вводить параметр $t = e^{iz} = e^{ix}e^{-y}$ и исследовать ее первообразную функцию вблизи $t = 0$; на нижнем конце с той же целью будем полагать $t = e^{-iz} = e^{-ix}e^{y}$.

Интеграл

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{4\pi\iota}\int\limits_{L_0} g(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau - z}{2}d\tau$$

является однопериодическим аналогом интеграла типа коши.

В силу того, что

$$\lim_{z\to\pm\infty}\operatorname{ctg}\frac{\tau - z}{2} = \pm i,$$

$$\lim_{z\to\pm\infty}\Phi_1(z) = \pm\frac{1}{4\pi}\int\limits_{L_0} g(\tau),$$

то есть $\Phi_1(z)$ ограничена на верхнем и нижнем концах полосы периода.

Теорема :

Любая однопериодическая функция $\psi(z)$ с периодом 2π, имеющая в полосе периода конечный порядок есть рациональная функция от $exp(iz)$.

Если однопериодическая функция $\psi(z)$ будет аналитической всюду в полосе периода, кроме концов, где у нее будут полосы порядка не выше m, то

$$\psi(z) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikz}.$$

(один из коэффициентов c_m или c_{-m} может равняться нулю).

Глава I

1 Задача Римана в случае конечного числа гладких разомкнутых дуг.

1.1 Задача о скачке

Пусть $L = \bigcup_{k=1}^{p} L_k$, где $L_k = \widehat{(a_k, b_k)}$ -гладкая разомкнутая дуга. Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, исчезающую на бесконечности , по граничному условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), t \in L. \tag{1.1}$$

Известно,что частным решением этой задачи является функция

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Phi(z)} = \Phi(z) - \Phi_1(z),$$

где $\Phi(z)$- общее решение задачи.
На основании формул Сохоцкого имеем:

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \varphi(t),$$

поэтому, учитывая (1.1), имеем

$$\widetilde{\Phi^+(t)} - \widetilde{\Phi^-(t)} = 0, t \in L,$$

то есть

$$\widetilde{\Phi^+(t)} = \widetilde{\Phi^-(t)}, t \in L$$

Таким образом, функция $\widetilde{\Phi(z)}$ непрерывно продолжима через L , а значит аналитически продолжима. На основании теоремы Лиувилля имеем:

$$\widetilde{\Phi(z)} \equiv C, C - const$$

В силу того, что $\Phi(\infty) = 0, \Phi_1(\infty) = 0$ имеем $\widetilde{\Phi(\infty)} = 0$, то есть $C = 0$
Таким образом,

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

1.2 Задача Римана

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию, исчезающую на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), t \in L,$$

$$G(t) \equiv -G_0, G_0 > 0$$

Решение задачи получено в различных классах, определяющих поведение искомой функции на концах дуг.

1) Решение задачи в классе $h(b_k)$

Класс $h(b_k)$ - класс функций, ограниченных в точках b_k
В качестве канонической функции возьмем функцию, удовлетворяющую условиям:
1) $\chi_b(z) \in h(b_k)$
2) $\chi_b^+(t) = -G_0\chi_b^-(t), t \in L$
3) $\chi_b^+(t), \chi_b^-(t) \neq 0, t \in L$
Для построения $\chi_b(z)$ рассмотрим функцию:

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_L \frac{\ln G(t) d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_L \frac{(\ln G_0 + \iota\pi)d\tau}{\tau - z} =$$

$$= \frac{\ln G_0 + \iota\pi}{2\pi\iota}\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{\ln G_0 + \iota\pi}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{L_k} \frac{d\tau}{\tau - z} =$$

$$= \frac{\ln G_0 + \iota\pi}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{L_k} d\ln(\tau - z) = \frac{\ln G_0 + \iota\pi}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{p}\ln(\tau - z)\Big|_{a_k}^{b_k} =$$

$$= \frac{\ln G_0 + \iota\pi}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{p}\ln(\frac{(b_k - z)}{a_k - z})$$

Под $\ln(\frac{b_k - z}{a_k - z})$ понимаем однозначную функцию, голоморфную в плоскости с разрезом вдоль L_k, и приминающую на ∞ значение 0.

$$\frac{\ln G_0 + \iota\pi}{2\pi\iota} = \frac{1}{2} + \frac{\ln G_0}{2\pi\iota} = \frac{1}{2} - \frac{\ln G_0 i}{2\pi} = \alpha + \iota\beta,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{\ln G_0}{2\pi}$$

$$\chi_b(z) = e^{\gamma(z)} = e^{\alpha+\iota\beta\sum_{k=1}^{p} ln\frac{(b_k-z)}{(a_k-z)}} = e^{\alpha+\iota\beta\prod_{k=1}^{p}\ln\frac{(b_k-z)}{(a_k-z)}} =$$

$$= \prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{b_k-z}{a_k-z})^{\alpha+\iota\beta} = \prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{b_k-z}{a_k-z})^{\frac{1}{2}+\beta\iota}$$

Рассмотрим сначала решение соответствующей однородной задачи
$g(t) \equiv 0$
Выясним поведение $\chi_b(z)$при $z \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty}(\frac{b_k-z}{a_k-z})^{\frac{1}{2}+\beta\iota} = \lim_{z\to\infty}[\frac{(b_k/z-1)}{(a_k/z-1)}]^{\frac{1}{2}+\beta\iota} = 1,$$

то есть функция $\chi_b(z)$ ограничена на бесконечности
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)}, t \in L$$

Функция

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)},$$

является аналитической во всей комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$, кроме того, $f(z)$ на бесконечности обращается в ноль, поэтому $f(z) \equiv 0$, таким образом, соответствующая однородная задача не имеет решений.
Перейдем к решению неоднородной задачи.
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}, t \in L$$

На основании результатов по решению задачи о скачке имеем:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)} = \frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)(\tau-z)},$$

откуда

$$\Phi(z) = \chi_b(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)(\tau-z)}.$$

2) Решение задачи в классе $h(a_k)$

$$\chi_a(z) = \chi_b(z)(\frac{a_k-z}{b_k-z}) = \prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{b_k-z}{a_k-z})^{\frac{1}{2}+\beta\iota}\prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{a_k-z}{b_k-z}) =$$

$$= \prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{a_k-z}{b_k-z})^{\frac{1}{2}-\iota\beta}$$

Решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \chi_a(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k} \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau-z)}.$$

3) Решение задачи в классе h_0

$$\chi_0(z)=\prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{b_k-z}{a_k-z})^{\frac{1}{2}+\beta\iota}\prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{1}{b_k-z})=\chi_b(z)\prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{1}{b_k-z})$$

В данном случае функция $f(z)=\frac{\Phi_0(z)}{\chi_0(z)}$ является функцией, аналитической в C и имеющей на бесконечности полюс порядка $p-1$, так как

$$\frac{1}{\chi_0(z)}\sim z^p, z\to\infty$$

Тогда по обобщенной теореме Лиувилля имеем:

$$f(z)=\mathsf{P}_{p-1}(z)=a_0+a_1z+...+a_{p-1}z^{p-1}$$

Таким образом, решение однородной задачи запишется в виде

$$\Phi_0(z)=\chi_0(z)\,\mathsf{P}_{p-1}(z)$$

Общее решение задачи Римана запишется по формуле:

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\chi_0(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)(\tau-z)}$$

4) Решение задачи в классе $h(a_k,b_k)$

$$\chi_{a,b}(z)=\chi_b(z)\prod\nolimits_{k=1}^{p}(a_k-z)$$

Функция $f(z)=\frac{\Phi_0(z)}{\chi_{ab}(z)}$ аналитическая в $\mathbb{C}$ и исчезает на бесконечности, поэтому $f(z)\equiv 0$,то $\Phi_0(z)\equiv 0$
Решение задачи запишется в виде

$$\Phi_{a,b}(z)=\frac{\chi_{a,b}(z)}{2\pi\iota}\int\limits_{L}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_{a,b}^+(\tau)(\tau-z)}$$

Так как ищем решение, исчезающее на бесконечности,то для разрешения задачи интеграл $\int\limits_L\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_{a,b}^+(\tau)(\tau-z)}$ должен на бесконечности иметь 0 порядка $p+1$

Чтобы условие было выполнено, нужно первые р коэффициентов разложения в ряд Лорана в окресности бесконечности обратить в 0.

Разложим в ряд Лорана функцию

$$\frac{1}{\tau-z}=-\frac{1}{z-\tau}=-\frac{1}{z(1-\frac{\tau}{z})}=$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{\tau}{z})^j = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^j}{z^{j+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2}...$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_{a,b}^+(\tau)(\tau - z)} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_{a,b}^+(\tau)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^j}{z^{j+1}}d\tau = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_L \frac{g(\tau)\tau^j d\tau}{\chi_{a,b}^+(\tau)}\frac{1}{z^{j+1}}$$

Таким образом, задача будет иметь единственное решение при выполнении следующих условий разрешимости:

$$\int\limits_{L_k} \tau^j \frac{g(\tau)}{\chi_{a,b}^+(\tau)}d\tau = 0, j = 0, 1, ..., p-1$$

5) Решение задачи в классе $h(c_1, ...c_q) = h_q$

Обозначим через $\{c_k\}_1^{2p}$ последовательность всех концов $a_k, b_k, (k = 1, 2, ..., p)$, взятых в каком-нибудь порядке.

Под классом h_q будем понимать класс функций, ограниченных в окрестности концов $c_1, c_2, ..., c_q$.

Для решения однородной задачи построим каноническую функцию, удовлетворяющую условиям:
1) $\chi_q(z) \in h(c_1, ..., c_q)$
2) $\chi_q^+(t) = -G_0\chi_q^-(t), t \in L$
3) $\chi_q^+(t), \chi_q^-(t) \neq 0, t \in L$
Каноническая функция $\chi_q(z)$ будет иметь вид:

$$\chi_q(z) = e^{\gamma(z)}\frac{\prod_{k:a_k\in h_q}(z - a_k)}{\prod_{k:b_k\notin h_q}(z - b_k)} = [\frac{\prod_{k=1}^q(z - c_k)}{\prod_{k=q+1}^{2p}(z - c_k)}]^{\alpha+\iota\beta}$$

Выясним поведение $\chi_q(z)$ на бесконечности. Представим $\chi_q(z)$ в виде:

$$\chi_q(z) = [\frac{\prod_{k=1}^q(1 - \frac{c_k}{z})}{z^{2p-2q}\prod_{k=q+1}^{2p}(1 - \frac{c_k}{z})}]^{\frac{1}{2}+i\beta}$$

Рассмотрим 3 случая:
1)Пусть q=p:

Функция $\chi_q(z)$ ограничена на бесконечности.
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_q^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_q^-(t)}, t \in L$$

В данном случае

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)} \equiv 0,$$

поэтому соответствующая однородная задача не имеет решений.

Перейдем к решению неоднородной задачи.
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_q^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_q^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_q^+(t)}, t \in L$$

На основании результатов по решению задачи о скачке имеем:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)} = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_q^+(\tau)(\tau - z)},$$

откуда

$$\Phi_q(z) = \frac{\chi_q(z)}{2\pi\iota} \int\limits_L \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_q^+(\tau)(\tau - z)}.$$

2) Пусть q<p :
В данном случае функция $f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)}$ является функцией, аналитической в C и имеющей на бесконечности порядок $p - q - 1$, так как

$$\frac{1}{\chi_q(z)} \sim z^{p-q}, z \to \infty$$

На основании обобщенной теоремы Лиувиля имеем:

$$f(z) \equiv \mathsf{P}_{p-q-1}(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{p-1} z^{p-q-1},$$

то есть является полиномом степени $p - q - 1$

Таким образом, решение однородной задачи запишется в виде

$$\Phi_0(z) = \chi_q(z)\,\mathsf{P}_{p-q-1}(z)$$

Общее решение задачи Римана запишется по формуле:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \chi_q(z)\frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_q^+(\tau - z)}$$

3)Пусть q>p :
Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)},$$

которая аналитична во всей плоскости $\bar{\mathbf{C}}$, кроме того, $f(z)$ на бесконечности обращается в ноль, поэтому $f(z) \equiv 0$, откуда следует, что соответствующая однородная задача не имеет решений.
Перейдем к решению неоднородной задачи.
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_q^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_q^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_q^+(t)}, t \in L$$

На основании результатов по решению задачи о скачке имеем:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)} = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g(\tau) d\tau}{\chi_q^+(\tau)(\tau - z)},$$

откуда

$$\Phi(z) = \chi_q(z) \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g(\tau) d\tau}{\chi_q^+(\tau)(\tau - z)}$$

Рассуждая как и выше получим, что единственное решение задачи существует при выполнении условий разрешимости:

$$\int\limits_{L_k} \tau^j \frac{g(\tau)}{\chi_{a,b}^+(\tau)} d\tau = 0, j = 0, 1, ..., q - p - 1$$

Замечание

Класс, соответствующий $q = p$ будет классом $h(a_k)$ или $h(b_k)$. Если $q = 0$, имеем класс h_0. Если $q = 2p$, то получаем класс $h_(a_k, b_k)$.

Глава II

2 Задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линиями скачков $L_1, L_2, ...$, расположенных так, как указано в п.1 введения , если на этих линиях заданы условия

$$\Phi^+(t) = G_k(t)\Phi^-(t) + g_k(t), t \in L_k$$

$$G_k(t) \equiv -G_0, G_0 > 0$$

2.1 Решение в классе $h(b_k)$

Для решения задачи построим каноническую функцию $\chi_b(z)$. Для этого возьмем кусочно-голоморфную функцию $\gamma(z)$,которая является решением задачи о скачке:

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = \ln(-G_0)$$

На основании сведений, приведенных во введении, следует, что функция $\gamma(z)$ имеет вид:

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{lnG_k(\tau)d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{ln(-G_0)d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln(-G_0)}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{z^{n_k}d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln(-G_0)}{2\pi i} \int\limits_{L_k} [\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} - \frac{z^2}{\tau^3} - ... - \frac{z^{n_k - 1}}{\tau^{n_k}}]d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln(-G_0)}{2\pi i} (\int\limits_{L_k} \frac{d\tau}{\tau - z} - \sum_{j=0}^{n_k - 1} \int\limits_{L_k} \frac{z^j d\tau}{\tau^{j+1}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln(-G_0)}{2\pi i} (\ln \frac{b_k - z}{a_k - z} -$$

$$- \int\limits_{L_k} \frac{d\tau}{\tau} - \sum_{j=0}^{n_k - 1} z^j \int\limits_{L_k} \frac{d\tau}{\tau^{j+1}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln(-G_0)}{2\pi i} (ln \frac{1 - \frac{z}{b_k}}{1 - \frac{z}{a_k}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^j}{b_k^j j} - \sum_{j=0}^{n_k - 1} \frac{z^j}{a_k^j j}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ln(-G_0)}{2\pi i} [- \ln E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1) + \ln E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \ln(\frac{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)}{E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)})^{\frac{\ln(-G_0)}{2\pi i}},$$

где$E(u,q)$- первичный множитель Вейерштрасса:

$$E(u,q)=(1-u)exp(\sum_{l=1}^{q}\frac{u^l}{l},)$$

а под $ln\frac{1-\frac{z}{b_k}}{1-\frac{z}{a_k}}$ понимается однозначная ветвь в плоскости с разрезом вдоль L_k

Тогда функция

$$\chi_b(z)=e^{\gamma(z)}=\prod_{k=1}^{\infty}[\frac{E(\frac{z}{b_k},n_k-1)}{E(\frac{z}{a_k},n_k-1)}]^{\alpha+i\beta},$$

где

$$\alpha=\frac{1}{2},\beta=-\frac{\ln G_0\iota}{2\pi},$$

будет каноничской функцией в классе $h(b_k)$

Для решения однородной задачи представим граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi_0^+(t)}{\chi_b^+(t)}=\frac{\Phi_0^-(t)}{\chi_b^-(t)},t\in L$$

Тогда функция $f(z)=\frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}$ непрерывно продолжима , а значит аналитически продолжима, то есть $f(z)\in H(C)$ и, следовательно,

$$f(z)=P(z),$$

где$P(z)$-целая функция.

Итак,

$$\Phi_0(z)=\chi_b(z)P(z)=\prod_{k=1}^{\infty}[\frac{E(\frac{z}{b_k},n_k-1)}{E(\frac{z}{a_k},n_k-1)}]^{\alpha+i\beta}P(z)$$

Для решения неоднородной задачи представим граничные условия в виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)}=\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)},t\in L$$

Отсюда следует, что функция

$$f_1(z)=\frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}-\texttt{решение задачи о скачке со скачком }\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)},$$

поэтому

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau^{n_k}(\tau-z)}$$

2.2 Решение в классе $h(a_k)$

$$\chi_a(z) = \chi_b(z) \prod_{k=1}^{\infty} [\frac{E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)}{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)}]$$

Решение однородной задачи запишется в виде

$$\Phi_0(z) = \chi_a(z)P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [\frac{E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)}{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)}]^{\frac{1}{2} - i\beta} P(z),$$

а общее решение неоднородной задачи дает формула:

$$\Phi(z) = \chi_a(z)P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau^{n_k}(\tau - z)}$$

2.3 Решение в классе $h(a_k, b_k)$

$$\chi_{a,b}(z) = \chi_b(z) \prod_{k=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)$$

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [\frac{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)}{E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)}]^{\alpha + i\beta} \prod_{k=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)P(z)$$

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\chi_{a,b}^+(\tau)\tau^{n_k}(\tau - z)}$$

2.4 Решение в классе h_0

$$\chi_0(z) = \chi_b(z) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)}$$

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [\frac{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)}{E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)}]^{\alpha + i\beta} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)} P(z)$$

Общее решение имеет вид:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)\tau^{n_k}(\tau - z)}.$$

Глава III

3 Решение задачи в случае однопериодического расположения дуг.

3.1 Задача о скачке.

Пусть дана дуга $L_0 = \widehat{(a_0, b_0)}$ в полосе $0 < Rez \leq 2\pi$. Обозначим $L = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k$, где L_k получены из L_0 преобразованием однопериодической группы $z + 2\pi k, k \in Z$.

Задача о скачке

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = g(t), t \in L, g(t) = g_k(t), t \in L_k \tag{3.1}$$

имеет частное решение

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)}. \tag{3.2}$$

Справедлива

Теорема1.

Если $n > 0$ есть целое число, при котором ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (R_k)^{-(n+1)}, A_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau|, R_k = min|\tau|, \tau \in L_k \tag{3.3}$$

сходится, то ряд (3.1) при всех $n_k = n$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек контуров L_k (после отбрасывания соответствующего числа членов). [4]

При выполнении условия (3.3) задача (3.1) имеет частное решение

$$\tilde{\gamma}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^n(\tau - z)}. \tag{3.4}$$

Предположим, что выполняется условие

$$g_0(t) = g_k(t + 2\pi k), t \in \bar{L}_0, \tag{3.5}$$

тогда $A_k = A_0$, и сходимость ряда (3.3) обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} R_k^{-(n+1)} + R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)},$$

где $R_0 = |\tau_0|, \tau_0 \in \bar{L}_0, R_k = |\tau_0 + 2\pi k|, k > 0, R_k = |\tau_1 + 2\pi k|, k < 0, \tau_1 \in \bar{L}_{-1}$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)}$ можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{-(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\tau_0 + 2\pi k|^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}|\frac{\tau_0}{k} + 2\pi|^{n+1}} \tag{3.6}$$

Учитывая, что $|\frac{\tau_0}{k} + 2\pi| \to 2\pi$ при $k \to \infty$ имеем, что сходимость ряда (3.6) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \tag{3.7}$$

Наименьшее n, при котором сходится ряд (3.7), будет равно 1.

Таким образом, с учетом (3.5) и разложением $ctgz$ на простейшие дроби, задача (3.1) имеет частное решение

$$\tilde{\gamma}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} = \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{g_0(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} + \right.$$

$$\left. + \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_{-k}} \frac{g_{-k}(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau) \left[\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} \right] d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau) \left[\frac{1}{\tau - z + 2\pi k} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{\tau + 2\pi k} \right] d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau) \left[\frac{1}{\tau - z - 2\pi k} - \frac{1}{\tau - 2\pi k} \right] d\tau \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau) \left\{ \left[\frac{1}{\tau - z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau - z + 2\pi k} + \frac{1}{\tau - z - 2\pi k} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau + 2\pi k} + \frac{1}{\tau - 2\pi k} \right) \right] \right\} d\tau = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau) \left[\operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} \right] d\tau,$$

3.2 Задача Римана.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, ограниченную на бесконености и удовлетворяющую условию

$$\Phi^+(t) = -G_0 \Phi^-(t) + g(t), G_0 > 0, t \in L,$$

причем функция $g(t)$ удовлетворяет условию (3.5)

Поставленная задача равносильна задаче нахождения периодической с периодом 2π функции $\Phi(z)$ с линией скачков L_0 по условию

$$\Phi^+(t) = -G_0\Phi^-(t) + g(t), G_0 > 0, t \in L_0,$$

где $g(t)$ -заданная функция класса Гельдера $H_\lambda(\bar{L}_0)$

Решение задачи отыскивается в классе функций, ограниченных на верхнем и нижнем концах полосы периода.

1) Решение в классе $h(b_0)$

Под классом $h(b_0)$ понимается класс функций, ограниченных в точке b_0

Для решения задачи построим каноническую функцию $\chi_b(z)$. Для этого возьмем кусочно-голоморфную функцию $\gamma(z)$,которая является решением задачи о скачке:

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = \ln(-G_0)$$

На основании вышеизложенного имеем:

$$\gamma(z) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} \ln(-G_0)\left[\operatorname{ctg}\frac{\tau - z}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau = \frac{\ln(-G_0)}{4\pi i}\left[\int\limits_{L_0} \operatorname{ctg}\frac{\tau - z}{2}d\tau -\right.$$

$$\left.-\int\limits_{L_0} \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}d\tau\right] = \frac{\ln(-G_0)}{4\pi i}\left[\int\limits_{L_0} \frac{\cos\frac{\tau-z}{2}}{\sin\frac{\tau-z}{2}}d\tau - \int\limits_{L_0} \frac{\cos\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau\right] = \frac{\ln(-G_0)}{4\pi i}\left[\int\limits_{L_0} \frac{2d\sin\frac{\tau-z}{2}}{\sin\frac{\tau-z}{2}}d\tau -\right.$$

$$\left.-\int\limits_{L_0} \frac{2d\sin\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau\right] = \frac{\ln(-G_0)}{2\pi i}\left[\ln(\sin\frac{\tau - z}{2})\Big|_{a_0}^{b_0} - \ln(\sin\frac{\tau}{2})\Big|_{a_0}^{b_0}\right]$$

$$\gamma(z) = \ln\left[\frac{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}}{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}\right]^{\frac{\ln(-G_0)}{2\pi i}} = \ln\left[\frac{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}}{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}\right]^{\alpha+i\beta},$$

где $\alpha + i\beta = \frac{1}{2} - \frac{\ln G_0 i}{2\pi}$

Таким образом,

$$\chi_b(z) = e^{\gamma(z)} = \left[\frac{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}}{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}\right]^{\alpha+i\beta}.$$

Кроме того,

$$\chi_b(z + 2\pi) = \chi_b(z)$$

Однородная задача.

$$\Phi^+(t) = -G_0\Phi^-(t), t \in L_0$$

Для решения однородной задачи представим граничное условие в виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)}, t \in L_0 \tag{3.8}$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}$, которая удовлетворяет условию

$$f^+(t) = f^-(t), t \in L_0$$

Выясним поведение функции $f(z)$ на концах полосы периода.
Для этого исследуем поведение $\chi_b(z)$

1) Для исследования функции на верхнем конце полосы периода сделаем замену $t = e^{iz}$, тогда при

$$z \to x + i\infty, t = e^{ix-\infty} \to 0$$

Поведение $\chi_b(z)$ будет определяться функцией $f_1(z) = \frac{\sin\frac{b_0-z}{2}}{\sin\frac{a_0-z}{2}}$

$$f_1 = \frac{\sin\frac{b_0-z}{2}}{\sin\frac{a_0-z}{2}} = \frac{\frac{e^{i(\frac{b_0-z}{2})} - e^{-i(\frac{b_0-z}{2})}}{2i}}{\frac{e^{i(\frac{a_0-z}{2})} - e^{-i(\frac{a_0-z}{2})}}{2i}} = \frac{e^{i(\frac{b_0-z}{2})} - e^{-i(\frac{b_0-z}{2})}}{e^{i(\frac{a_0-z}{2})} - e^{-i(\frac{a_0-z}{2})}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{ib_0}{2}}e^{\frac{-iz}{2}} - e^{\frac{-ib_0}{2}}e^{\frac{iz}{2}}}{e^{\frac{ia_0}{2}}e^{\frac{-iz}{2}} - e^{\frac{-ia_0}{2}}e^{\frac{iz}{2}}} = \frac{e^{\frac{iz}{2}}(e^{\frac{ib_0}{2}}e^{\frac{-iz}{2}} - e^{\frac{-ib_0}{2}}e^{\frac{iz}{2}})}{e^{\frac{iz}{2}}(e^{\frac{ia_0}{2}}e^{\frac{-iz}{2}} - e^{\frac{-ia_0}{2}}e^{\frac{iz}{2}})} =$$

$$= \frac{e^{\frac{ib_0}{2}} - e^{\frac{-ib_0}{2}}e^{iz}}{e^{\frac{ia_0}{2}} - e^{\frac{-ia_0}{2}}e^{iz}} = \frac{e^{\frac{ib_0}{2}} - e^{\frac{-ib_0}{2}}t}{e^{\frac{ia_0}{2}} - e^{\frac{-ia_0}{2}}t}$$

$$\lim_{z \to x+i\infty} f_1 = \frac{e^{\frac{ib_0}{2}}}{e^{\frac{ia_0}{2}}}$$

Таким образом функция $f_1(z)$ стремится к конечному пределу, а значит ограничена на верхнем конце полосы периода.

2) Если же положить $e^{-iz} = t$, то

$$f_1(z) = \frac{e^{\frac{ib_0}{2}}e^{-iz} - e^{\frac{-ib_0}{2}}}{e^{\frac{ia_0}{2}}e^{-iz} - e^{\frac{-ia_0}{2}}} = \frac{e^{\frac{ib_0}{2}}t - e^{\frac{-ib_0}{2}}}{e^{\frac{ia_0}{2}}t - e^{\frac{-ia_0}{2}}}$$

Если $z \to x - i\infty, t \to 0$, то $\lim_{z \to x-i\infty} f_1(z) = \frac{e^{\frac{-ib_0}{2}}}{e^{\frac{-ia_0}{2}}}$, и поэтому функция $f_1(z)$ ограничена и на нижнем конце полосы периода.

На основании известных свойств приодических функций [3] имеем $f(z) \equiv C$, где $C - const$

Итак, решение однородной задачи запишется в виде:

$$\Phi_0 = C\chi_b(z)$$

Неоднородная задача.

$$\Phi^+(t) = -G_0\Phi^-(t) + g(t), t \in L_0$$

С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде:

$$\Phi^+(t) = \frac{\chi_b^+(t)}{\chi_b^-(t)}\Phi^-(t) + g(t), t \in L_0,$$

откуда

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} - \frac{\Phi_b^-}{\chi_b^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}, t \in L_0$$

Таким образом, функция $f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}$ является решением задачи о скачке со скачком $\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}$
На основании вышеизложенного наша задача имеет частное решение

$$\Phi_1(z) = \frac{\chi_b(z)}{4\pi i}\int \frac{g(\tau)}{\chi_b^+(\tau)}[\operatorname{ctg}(\frac{\tau - z}{2}) - \operatorname{ctg}\frac{\tau}{z}]d\tau$$

В силу [3] функция $\Phi_1(z)$ ограничена на верхнем и нижнем конце полосы периода.

Общее решение задачи запишется в виде:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z)$$

2) Решени в классе $h(a_0)$

Каноническая функция задачи запишется в виде

$$\chi_a(z) = \chi_b(z)\frac{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}} = \left[\frac{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}}{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}\right]^{\frac{1}{2}+i\beta}\frac{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}} =$$

$$= \left[\frac{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}}\right]^{\frac{1}{2}-i\beta}$$

Рассуждая как и выше, получим

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z),$$

где

$$\Phi_0(z) = C\chi_a(z), a$$

$$\Phi_1(z) = \frac{\chi_a(z)}{4\pi i}\int \frac{g(\tau)}{\chi_a^+(\tau)}[\operatorname{ctg}(\frac{\tau - z}{2}) - \operatorname{ctg}\frac{\tau}{z}]d\tau$$

3) Решение в классе h_0

Каноническая функция будет иметь вид:

$$\chi_0(z) = \chi_b(z)\frac{1}{e^{iz} - e^{ib_0}}$$

Поведение $\chi_b(z)$ было исследовано, поэтому остановимся на исследовании функции

$$F(z) = \frac{1}{e^{iz} - e^{ib_0}}$$

1) Для исследования функции на верхнем конце полосы периода сделаем замену $e^{iz} = t$,тогда

$$F(z) = \frac{1}{t - e^{ib_0}}$$

При $z \to x + i\infty$ функция $F_(z)$ограничена на верхнем конце полосы периода, значит ограничена функция $\chi_0(z)$.

2)Для исследования функции на нижнем конце полосы периода сделаем замену $e^{-iz} = t$,тогда

$$F(z) = \frac{t}{1 - te^{ib_0}}$$

При $z \to x - i\infty$ функция $F_(z)$ на нижнем конце полосы периода имеет нуль первого порядка, а тогда $\frac{1}{\chi_0(z)}$ на нижнем конце имеет полюс первого порядка.

Тогда на основании [3] имеем

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_0(z)} = \sum_{k=-1}^{0} c_k e^{ikz},$$

где $c_k = const, k = -1, 0$

Общее решение задачи в классе h_0 можно записать в виде:

$$\Phi(z) = \frac{\chi_0(z)}{4\pi i}\int \frac{g(\tau)}{\chi_0^+(\tau)}[\mathrm{ctg}(\frac{\tau - z}{2}) - \mathrm{ctg}\,\frac{\tau}{z}]d\tau + \chi_0(z)\sum_{k=-1}^{0} c_k e^{ikz}$$

4) Решение в классе $h(a_0, b_0)$

Построим каноническую функцию $\chi_{ab}(z)$:

$$\chi_{ab}(z) = \chi_b(z)(e^{iz} - e^{ia_0})$$

Поведение $\chi_b(z)$ было исследовано, поэтому остановимся на исследовании функции

$$F_1(z) = (e^{iz} - e^{ia_0})$$

1) Для исследования функции на верхнем конце полосы периода сделаем замену $e^{iz} = t$,тогда

$$F_1(z) = t - e^{ia_0},$$

$\chi_{a,b}(z)$ ограничена на верхнем конце полосы периода.

2)Делая замену $e^{-iz} = t$, видим, что функция$F_1(z)$ имеет полюс первого порядка на нижнем конце полосы периода, значит $\frac{1}{\chi_{a,b}}$ на нижнем конце имеет ноль первого порядка, следовательно, на основании [3] $f(z) \equiv 0, \Phi_0(z) \equiv 0$

Итак, однородная задача не имеет отличных от нуля решений.

Следовательно, решение задачи запишется в виде:

$$\Phi(z) = \frac{\chi_{a,b}(z)}{4\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{\chi^+_{a,b}(\tau)} [\mathrm{ctg}(\frac{\tau - z}{2}) - \mathrm{ctg}\,\frac{\tau}{2}] d\tau \tag{3.9}$$

Однако функция $\chi_{ab}(z)$ на нижнем конце полосы периода имеет полюс первого порядка. Для разрешения задачи необходимо, чтобы интеграл на нижнем конце полосы периода имел ноль первого порядка.

Исследуем сначала поведение интеграла на нижнем конце полосы периода. Поведение интеграла будет определяться поведением функции $\mathrm{ctg}\,\frac{\tau - z}{2}$. Сделаем замену $t = e^{-iz}$ и разложим полученную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$.

$$\mathrm{ctg}\,\frac{\tau - z}{2} = \frac{\cos\frac{\tau - z}{2}}{\sin\frac{\tau - z}{2}} = \frac{\frac{e^{i(\frac{\tau - z}{2})} + e^{-i(\frac{\tau - z}{2})}}{2}}{\frac{e^{i(\frac{\tau - z}{2})} - e^{-i(\frac{\tau - z}{2})}}{2i}} = \frac{i(e^{\frac{i\tau}{2}} e^{\frac{-iz}{2}} + e^{\frac{-i\tau}{2}} e^{\frac{iz}{2}})}{e^{\frac{i\tau}{2}} e^{\frac{-iz}{2}} - e^{\frac{-i\tau}{2}} e^{\frac{iz}{2}}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{-iz}{2}} e^{\frac{i\tau}{2}} i(e^{\frac{i\tau}{2}} e^{\frac{-iz}{2}} + e^{\frac{-i\tau}{2}} e^{\frac{iz}{2}})}{e^{\frac{-iz}{2}} e^{\frac{i\tau}{2}} (e^{\frac{i\tau}{2}} e^{\frac{-iz}{2}} - e^{\frac{-i\tau}{2}} e^{\frac{iz}{2}})} = \frac{i(e^{i\tau} e^{-iz} + 1)}{e^{-iz} e^{i\tau} - 1} = \frac{i(e^{i\tau} t + 1)}{e^{i\tau} t - 1} =$$

$$= i - \frac{2i}{1 - te^{i\tau}} = i - 2i \frac{1}{1 - te^{i\tau}}$$

Учитывая, что $|t| < 1$, получим, что дробь $\frac{1}{1 - te^{i\tau}}$ представляет из себя сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Тогда

$$i - 2i \frac{1}{1 - te^{i\tau}} = i - 2i \sum_{k=0}^{\infty} (te^{i\tau})^k \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим, что задача будет иметь единственное решение (3.9) при выполнении условия разрешимости

$$\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_{ab}^{+}(\tau)} = 0$$

Глава IV

4 Задача Римана в случае непериодического свободного члена.

4.1 Постановка задачи.

Пусть $L = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k$, где $L_0 = (\widehat{a_0, b_0})$- гладкая разомкнутая дуга, лежащая в вертикальной полосе $0 < Rez \leq 2\pi$, а остальные получены из L_0 преобразованиями однопериодической группы $z + 2\pi k, k \in Z$.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую условию:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), t \in L \tag{4.1}$$

где

$$G(t) = -G_0, G_0 - const, G_0 > 0,$$

$$g(t) = g_k(t), t \in \bar{L_k},$$

$$g_k(t) \in H(A_k, \lambda_k), t \in \bar{L_k}$$

4.2 Задача о скачке.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), t \in L \tag{4.2}$$

На основании известных результатов о решении задач в случае счетного множества гладких разомкнутых дуг $L = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} L_k$, с точкой сгущения на бесконечности [2] частным решением задачи (4.2) является функция

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)}, \tag{4.3}$$

где последовательность целых чисел $\{n_k\}$ подобрана так, что ряд (4.3) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов, соответствующих тем L_k, которые ледат внутри этого компакта.

Имея $F(z)$, можно записать общее решение задачи в виде

$$\Phi(z) = F(z) + P(z),$$

где $P(z)$- произвольная целая функция.

Для того, чтобы сформулиовать дополнительные требования, которые нужно наложить на функцию $g(t) = g_k(t), t \in \bar{L_k}$, чтобы задача имела конечное число линейно-независимых решений, введем

Определение :

Последовательность $\Gamma = \{\Gamma_m\}_1^\infty$ замкнутых контуров назовем правильной системой контуров, если она обладает свойствами:
1)Γ_1 содержит внутри точку $z = 0$,
2)Γ_m лежит в области ограниченной контуром Γ_{m+1},
3) если $d_m = min_{z \in \Gamma m} |z|$, то $\lim_{m \to \infty} d_m = \infty$,
4)$\frac{l_m}{d_m} \leq \alpha$, где l_m- длина Γ_m, а $\alpha > 0$ -постоянная, не зависящая от m.

Используя приведенные выше результаты, построим решение нашей задачи (4.2) с заданным поведением при $z \to \infty$. В нашем случае в качестве системы Γ можно взять последовательность контуров $\Gamma = \{\Gamma_m\}_1^\infty$, представляющую собой непересекающиеся прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям: за длину основания берем $4\pi m$, а высоту не меньше $4\pi m$. Система Γ удовлетворяет всем необходимым свойствам правильной системы и

$$\frac{l_m}{d_m} \leq 8, => \alpha = 8.$$

Заметим, что в нашем случае оним из достаточных условий существования частного решения вида

$$\widetilde{F(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)}, \tag{4.4}$$

является условие

$$\sup_{t \in \bar{L}} |g(t)| \leq N, 0 < N < \infty \tag{4.5}$$

Действительно, в силу условия (4.5) имеем

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau| \leq \frac{N}{2\pi} S_0,$$

где S_0 - длина L_0.

Следовательно, сходимость ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(R_k)^{-(n+1)}$ обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (R_k)^{-(n+1)} \tag{4.6}$$

Ряд (4.6) можно представить в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (R_k)^{-(n+1)} = \frac{1}{R_0^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_{-k}^{n+1}} = \frac{1}{R_0^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\tau_0 + 2\pi k|^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\tau_1 - 2\pi k|^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{R_0^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}|\frac{\tau_0}{k} + 2\pi|^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}|\frac{\tau_1}{k} - 2\pi|^{n+1}}, \tau_0 \in \bar{L}_0, \tau_1 \in \bar{L}_{-1}$$

Учитывая, что $|\frac{\tau_0}{k} + 2\pi|$ и $|\frac{\tau_1}{k} - 2\pi| \to 2\pi$, имеем, что сходимость ряда (4.6) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}. \tag{4.7}$$

Наименьшее n, при котором сходится ряд(4.7) $n = 1$. Таким образом, при условии (4.5) задача имеет частное решение вида (4.4).

Рассмотрим теперь решение задачи (4.1) при условии, что функция $g(t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k = N_1 < \infty, B_k = \int_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau| \tag{4.8}$$

При условии (4.8) ряд (4.4) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов. Действительно, пусть $|z| \leq r, 0 < r < \infty, \tau \in L_k, \tau \neq z$, тогда

$$|\widetilde{F(z)}| \leq \frac{|z|}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int_{L_k} \frac{|g_k(\tau)|}{|1 - \frac{z}{\tau}|} |d\tau|$$

При всех достаточно больших величинах $\frac{z}{\tau}$ будет сколь угодно малой, так как $|z| \leq r$. Поэтому можно подобрать такой номер K, чтобы при $k \geq K$ выполнялось неравенство

$$|1 - \frac{z}{\tau}| \geq \frac{1}{2} \tag{4.9}$$

Тогда с учетом (4.9) имеем

$$|\widetilde{F(z)}| \leq \frac{r}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau| \leq \frac{r}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{B_k}{R_k^2} < N_2 < \infty$$

Покажем ограниченность$\widetilde{F(z)}$ на Γ. В силу свойств Γ и L существует такая постоянная δ, что $|\tau - z| \geq \delta$ при всех $\tau \in L$ и $z \in \Gamma$ и

$$|\widetilde{F(z)}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{L_k} g_k(\tau)(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau}) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \delta^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k R_k^{-1} = \delta^{-1} N_1 + N_3$$

Таким образом, доказана

Теорема 3:

Все решения задачи (4.2) при условии (4.8), удовлетворяющие условию

$$|\Phi(z)| \leq M, z \in \Gamma, \tag{4.10}$$

определяется формулой

$$\Phi(z) = \widetilde{F(z)} + C,$$

где $\widetilde{F(z)}$ *имеет вид (4.4),а C-постоянная.*

4.3 Решение задачи в классе $h(b_k)$.

Однородная задача:

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию, удовлетворяющую условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), t \in L, \tag{4.11}$$
$$G(t) \equiv -G_0, G_0 > 0$$

и условию (4.10)

Решение задачи ищем в классе $h(b_k)$, это класс функций, ограниченных в точках b_k

Для решения задачи (4.11) строим каноническую функцию $\chi_b(z)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\chi_b(z) \in h(b_k)$
2) $\chi_b^+(t) = -G_0 \chi_b^-(t), t \in L$
3) $\chi_b^+(t), \chi_b^-(t) \neq 0, t \in L$

На основании предыдущего, каноническая функция в этом классе имеет вид

$$\chi_b(z) = e^{\gamma(z)} = \left[\frac{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}}{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}\right]^{\alpha+i\beta},$$

где $\alpha + i\beta = \frac{1}{2} - \frac{\ln G_0 i}{2\pi}$

Функция $\chi_b(z)$- периодическая с периодом 2π , ограниченная на верхнем и нижнем концах полосы периода, а значит она удовлетворяет условию (4.10). Этому же условию удовлетворяет и функция $\frac{1}{\chi_b(z)}$. В силу периодичности функции $\chi_b(z)$, из ограниченности ее на концах полосы периода следует ее ограниченность на Γ, а также ограниченность функции $\frac{1}{\chi_b(z)}$.

Имея $\chi_b(z)$, перепишем краевое условие (4.11) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)}, t \in L,$$

откуда следует, что функция $F(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}$ является целой, причем удовлетворяет условию

$$|\frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}| \leq M_1, M_1 > 0, z \in \Gamma \tag{4.12}$$

В этом случае целая функция $F(z)$, удовлетворяющая условию (4.12), может быть только постоянной, то есть

$$\Phi_0(z) = C\chi_b(z), \tag{4.13}$$

так как целая функция, ограниченная на правильной системе Γ , то в силу прицепа максимума модуля она ограничена всюду, включая бесконечность, а такая функция по теореме Лиувилля есть константа.

Неоднородная задача:

Построим частное решение задачи (4.1). С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}, t \in L,$$

мы пришли к задаче о скачке.

Итак, частное решение задачи (4.1) запишется как

$$\Phi_1(z) = \chi_b(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau(\tau - z)} \tag{4.14}$$

Покажем, что ряд

$$\widetilde{\Phi(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau(\tau - z)} \tag{4.15}$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов.

Заметим, что функция $\chi_b^+(t)$ равномерно ограничена при $t \in L$, при этом учитывается периодичность $\chi_b^+(t)$. Таким же свойством обладает и функция $\frac{1}{\chi_b^+(t)}$.

Итак, пусть $|z| \leq r, 0 < r < \infty, \tau \in L_k, \tau \neq z$, тогда

$$\widetilde{\Phi(z)} \leq \frac{|z|}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int\limits_{L_k} \frac{|g_k(\tau)||d\tau|}{|\chi_b^+(\tau)||1 - \frac{z}{\tau}|} \leq$$

$$\frac{|z|M_2}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int\limits_{L_k} \frac{|g_k(\tau)||d\tau|}{|1 - \frac{z}{\tau}|} \tag{4.16}$$

$$R_k = |\tau_0 + 2\pi k|,$$

$$R_{-k} = |\tau_1 - 2\pi k|.$$

При всех достаточно больших k величина $\frac{z}{\tau}$ будет сколь угодно малой, так как $|z| \leq r$. Поэтому можно подобрать такой номер K, чтобы при $k \geq K$ выполнялось неравенство

$$|1 - \frac{z}{\tau}| \geq \frac{1}{2}. \tag{4.17}$$

Тогда с учетом (4.17) из (4.16) имеем

$$|\widetilde{\Phi(z)}| \leq \frac{rM_2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau| \leq \frac{rM_2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{B_k}{R_k^2} < N < \infty.$$

Покажем ограниченность $\widetilde{\Phi(z)}$ на Γ. В силу свойств Γ и L существует такая постоянная $\delta > 0$, что $|\tau - z| \geq \delta$ при всех $\tau \in L, z \in \Gamma$ и

$$|\widetilde{\Phi(z)}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{L_0} \frac{g_k(\tau)}{\chi_b^+(\tau)} \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{M_2}{2\pi} \left[\delta^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k R_k^{-1} \right] = \delta^{-1} N_2 + N_3.$$

Учитывая свойства $\chi_b(z)$, получаем

$$|\Phi_1(z)| \leq M_3, z \in \Gamma.$$

Таким образом, общее решение задачи (4.1) запишется в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_0(z),$$

где $\Phi_0(z)$- общее решение однородной задачи, которая определяется формулой (4.13), а $\Phi_1(z)$- частное решение неоднородной задачи, определенное формулой (4.14).

$$\Phi(z) = \chi_b(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau(\tau - z)} + C\chi_b(z).$$

4.4 Решение задачи в классе $h(a_k)$.

$$\chi_a(z) = \chi_b(z) \frac{\sin \frac{a_0 - z}{2} \sin \frac{b_0}{2}}{\sin \frac{b_0 - z}{2} \sin \frac{a_0}{2}} = \left[\frac{\sin \frac{b_0 - z}{2} \sin \frac{a_0}{2}}{\sin \frac{a_0 - z}{2} \sin \frac{b_0}{2}} \right]^{\frac{1}{2} + i\beta} \frac{\sin \frac{a_0 - z}{2} \sin \frac{b_0}{2}}{\sin \frac{b_0 - z}{2} \sin \frac{a_0}{2}} =$$

$$= \left[\frac{\sin \frac{a_0 - z}{2} \sin \frac{b_0}{2}}{\sin \frac{b_0 - z}{2} \sin \frac{a_0}{2}} \right]^{\frac{1}{2} - i\beta}$$

Рассуждая как и выше, получим

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z),$$

где

$$\Phi_0(z) = C\chi_a(z), a$$

$$\Phi_1(z) = \chi_a(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau(\tau - z)}$$

Список литературы

[1] Голубев В.В.. *Одозначные аналитические функции. Автоморфные функции*,(изд-во Физмат, 1961).

[2] Салехова И.Г. . *Однородная задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг*, Изв. вузов. Математика,№6,124-135 (1975).

[3] Чибрикова Л.И. . *Основные граничные задачи для аналитических функций*,(изд-во Казанского университета,Казань, 198-205, 1977).

[4] Салехова И.Г., Яхина М.М. . *Смешанная задача для плоскости с прямолинейными разрезами*, Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки 155(2),(2013).

[5] Вафина Л.И . *Задача Шварца в случае периодического расположения контуров*,(Магистерская диссертация,Казанский университет, 2014).