УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 155, кн. 2 Физико-математические науки *2013*

УДК 519.21

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ф.Г. Габбасов, В.Т. Дубровин

Аннотация

Пусть W – невырожденная целочисленная квадратная матрица d-го порядка такая, что $|\det W| > 1$; $f_i(x)$ – заданные на единичном гиперкубе в R^d вещественнозначные периодические по каждому аргументу липшиц-непрерывные функции. Рассматриваются m-мерные векторы $(f_1(xW^k), \ldots, f_m(xW^k))$, $k = 1, 2, \ldots$ Получена оценка порядка $O(n^{\varepsilon - 1/2})$, ε – сколь угодно малое число, для расстояния между распределением нормированной суммы этих векторов и нормальным распределением на всех измеримых выпуклых множествах из R^m.

Ключевые слова: эндоморфизмы, предельная теорема, скорость сходимости.

Рассмотрим преобразование $T\overline{x} = \{\overline{x}\, W\}$ (здесь $\overline{x}$ принадлежит Ω_d – d-мерному тору, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа), задаваемое с помощью невырожденной целочисленной матрицы W. Пусть $\mathrm{mes}(\cdot)$ – инвариантная мера на Ω_d, которую можно отождествить с мерой Лебега, определенной на единичном замкнутом гиперкубе d-мерного евклидова пространства:

$$K_d = \{\overline{x} : \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d),\ 0 \le x_1 \le 1, \ldots,\ 0 \le x_d \le 1\}.$$

Указанное преобразование является эндоморфизмом, сохраняющим меру. Оно эргодично тогда и только тогда, когда среди корней характеристического многочлена матрицы W нет корней из единицы. При этом условии для $T^k\overline{x}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ справедлива центральная предельная теорема (см. [1, 2]). Исследования скорости сходимости в этой теореме были проведены в работах [3–5].

Рассмотрим m-мерные вектора

$$\overline{f}(\overline{x}\, W^k) = \{f_1(\overline{x}\, W^k), \ldots, f_m(\overline{x}\, W^k)\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $f_i(\overline{x}), i = 1, 2, \ldots, m$ – вещественнозначные периодические с периодом 1 по каждому аргументу функции, заданные на K_d. Предполагаем выполнение следующих условий.

1. Для некоторой постоянной A

$$|f_i(\overline{x}) - f_i(\overline{x}')| \le A\, \|\overline{x} - \overline{x}'\|, \quad \forall\, \overline{x}, \overline{x}' \in K_d, \quad \|\overline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}.$$

2. Матрица W такова, что

$$\sup_{\|\overline{x}\| \le 1} \|\overline{x}\, W^{-1}\| = \theta < 1, \quad |\det W| = \rho > 1.$$

3. Функции $f_i(\overline{x})$ интегрируемы по Лебегу на K_d и $\int\limits_{K_d} f_i(\overline{x})\, d\overline{x} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

4. $\det R \neq 0$, где R – матрица с элементами

$$\rho_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{K_d} \left(\sum_{k=1}^{n} f_i(\overline{x}\, W^k) \right) \left(\sum_{k=1}^{n} f_j(\overline{x}\, W^k) \right) d\,\overline{x}.$$

Пусть

$$G_n(M) = \operatorname{mes} \left(\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \overline{f}(\overline{x}\, W^k) \in M \right),$$

где M – измеримые множества из R^m.

Целью настоящей работы является исследование выражения

$$\rho(G_n, \Phi_R) = \sup_{M \in R^m} |G_n(M) - \Phi_R(M)| \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь M – выпуклые измеримые множества, Φ_R – нормальное распределение с матрицей ковариаций R и нулевым вектором математических ожиданий.

В работе [4] было доказано, что $\rho(G_n, \Phi_R) = O(n^{-1/4})$.

В перечисленных выше условиях будет иметь место следующая теорема.

Теорема. *Для каждого, сколь угодно малого ε справедлива оценка*

$$\rho(G_n, \Phi_R) = O\left(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}} \right).$$

Доказательство. При доказательстве теоремы используется метод «последовательных приближений», разработанный в [6, 7]. Прежде всего приведем оценки, которые нам понадобятся в ходе доказательства теоремы.

Обозначим

$$\left(\overline{f}(\overline{x}\, W^j), \overline{t} \right) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\overline{x}\, W^j) t_i, \quad \overline{t} = (t_1, \ldots, t_m).$$

Введем величину

$$\tau_j = \left(\overline{f}(\overline{x}\,, W^j), \overline{t}/\|\,\overline{t}\,\| \right).$$

Обозначим через $x_\nu(n)$ семиинвариант ν-го порядка суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} \underset{j}{\tau}$, то есть

$$x_\nu(n) = \frac{d^\nu}{dz^\nu}\ \ln E\, \exp\left(z \sum_{j=1}^{n} \underset{j}{\tau} \right) \bigg|_{z=0}.$$

Лемма 1. *При фиксированном $\nu \in [2, \omega]$ (здесь и далее ω – достаточно большое вещественное число) справедлива оценка*

$$x_\nu(n) = O(n).$$

Лемма 1 доказывается так же, как и в работе [5].

Пусть

$$f(\bar{t}) = \int\limits_{K_d} \exp\Big(i\Big(\bar{t}, \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{j=1}^{Q} \bar{f}(\bar{x}\, W^j)\Big)\Big), \quad \beta(M) = \inf_{\bar{x} \in \sigma(M)} \|\bar{x}\,\|,$$

где $\sigma(M)$ – граница выпуклого множества M. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если при некотором* $\alpha \in (0, 1/2]$ *и некотором* $\gamma > 1$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$|G_Q(M) - \Phi(M)| = O\bigg(\frac{1}{1+\beta^\gamma(M)} \frac{1}{Q^\alpha}\bigg),$$

то для всяких C_0 *и* $\varepsilon_1 < \alpha/2$ *найдутся такие постоянные* C_1 *и* C_2, *что для достаточно больших* Q

$$\max_{C_0 Q^{-\varepsilon_1} \le \|\bar{t}\| \le C_1 Q^{\alpha - 2\varepsilon_1}} \Big| f(\bar{t}) \Big| \le 1 - C_2/Q^{2\varepsilon_1}. \tag{1}$$

Лемма 2 доказывается так же, как и в работе [7].

Лемма 3. *При фиксированном* $\nu \in [1, \omega]$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, m$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{K_d} \Big(\sum_{k=1}^{n} f_i(\bar{x}\, W^k)\Big)^{2\nu} dt = O\Big(n^{\nu + \nu^2/\omega}\Big). \tag{2}$$

Лемма 3 доказана в работе [5].

Приступим к доказательству теоремы. Так как расстояние $\rho(G_n, \Phi_R)$ между распределениями инвариантно по отношению к невырожденным линейным преобразованиям векторов, не ограничивая общности, мы будет считать матрицу R единичной. Сумма, распределение которой мы собираемся изучать, есть $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}\, W^k)$. Эту сумму мы разобьем следующим образом.

Пусть Q и N – растущие вместе с n натуральные числа, $p = \Big[\dfrac{n}{Q+N}\Big]$, где $[\,\cdot\,]$ – целая часть числа.

Обозначим

$$\bar{\eta}_j = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^{Q} f(\bar{x}\, W^{(j-1)(Q+N)+r}), \quad 1 \le j \le p,$$

$$\bar{\eta}_j^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^{N} f(\bar{x}\, W^{jQ+(j-1)N+r}), \quad 1 \le j \le p,$$

$$\bar{\eta}_{p+1}^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=p(Q+N)+1}^{n} f(\bar{x}\, W^r).$$

Считаем, что $\bar{\eta}_{p+1}^{\,0} = 0$, если $n = p(Q+N)$.

Получим

$$S_n = \sqrt{Q} \sum_{r=1}^{p} \bar{\eta}_r + \sqrt{Q} \sum_{r=1}^{p+1} \bar{\eta}_r^{\,0} = \sqrt{Q}\,\Big(\bar{\zeta}_p + \bar{\zeta}_p^{\,0}\Big).$$

Вклад суммы $\overline{\zeta}_p^{\,0}$ в сумму S_n будет достаточно мал, если Q и N выбрать подходящим образом.

Теперь перейдем к изучению распределения значений суммы $\overline{\zeta}_p$. Обозначим $\widehat{\overline{\zeta}}_p = \sum\limits_{r=1}^{p} \widehat{\overline{\eta}}_r$, где $\widehat{\overline{\eta}}_1, \ldots, \widehat{\overline{\eta}}_p$ – вектора со следующими свойствами:

1) $\operatorname{mes}(\overline{x} : \overline{x} \in K_d, \widehat{\overline{\eta}}_r \in M) = \operatorname{mes}(\overline{x} : \overline{x} \in K_d, \overline{\eta}_r \in M)$, M – измеримые множества из R^m;

2) $\displaystyle\int\limits_{K_d} \exp\left(i\left(\overline{t}, \frac{\widehat{\overline{\zeta}}_p}{\sqrt{p}}\right)\right) d\overline{x} = \prod_{r=1}^{p} \int\limits_{K_d} \exp\left(i\left(\overline{t}, \frac{\widehat{\overline{\eta}}_r}{\sqrt{p}}\right)\right) d\overline{x}.$

Обозначим через Λ матрицу ковариаций вектора $\overline{\eta}_1$. Учитывая, что матрица R является единичной, покажем, что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1+O(1/Q) & O(1/Q) & \cdots & O(1/Q) \\ O(1/Q) & 1+O(1/Q) & \cdots & O(1/Q) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O(1/Q) & O(1/Q) & \cdots & 1+O(1/Q) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Из леммы 1 работы [3] следует, что

$$\int\limits_{K_d} f_i(\overline{x}) f_j(\overline{x}\,W^r)\, d\overline{x} = \int\limits_{K_d} f_i(\overline{x})\, d\overline{x} \int\limits_{K_d} f_j(\overline{x})\, d\overline{x} + O(\theta_1^r),$$

где $0 < \theta_1 < 1$.

Элементы матрицы Λ можно записать в виде

$$a_{ij} = \int\limits_{K_d} f_i(\overline{x}\,W) f_j(\overline{x}\,W)\, dx + \\ + \sum_{n=1}^{Q}\left(1 - \frac{r}{Q}\right)\left[\int\limits_{K_d} f_i(\overline{x}\,W) f_j(\overline{x}\,W^{r+1})\, d\overline{x} + \int\limits_{K_d} f_j(\overline{x}\,W) f_i(\overline{x}\,W^{r+1})\, d\overline{x}\right],$$

а элементы матрицы R – в виде

$$\rho_{ij} = \int\limits_{K_d} f_i(\overline{x}\,W) f_j(\overline{x}\,W)\, dx + \\ + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\int\limits_{K_d} f_i(\overline{x}\,W) f_j(\overline{x}\,W^{r+1})\, d\overline{x} + \int\limits_{K_d} f_j(\overline{x}\,W) f_i(\overline{x}\,W^{r+1})\, d\overline{x}\right].$$

Поэтому

$$|a_{ij} - \rho_{ij}| = \sum_{r=Q+1}^{\infty} \int\limits_{K_d} f_i(\overline{x}\,W) f_j(\overline{x}\,W^{r+1})\, d\overline{x} + \\ + \sum_{r=Q+1}^{\infty} \int\limits_{K_d} f_j(\overline{x}\,W) f_i(\overline{x}\,W^{r+1})\, d\overline{x} - \\ - \frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q} r \int\limits_{K_d} f_i(\overline{x}\,W) f_j(\overline{x}\,W^{r+1})\, d\overline{x} = O\left(\theta_1^Q + \frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q} r\theta_1^r\right) = O\left(\frac{1}{Q}\right).$$

Далее, пусть матрица A такова, что $A'A = \Lambda^{-1}$, где A' – транспонированная матрица к A. Очевидно, что вектор $\dfrac{1}{\sqrt{p}}\, A\,\widehat{\overline{\zeta}}_p$ имеет единичную матрицу ковариаций.

Пусть теперь

$$P_p^{(1)}(M) = \operatorname{mes}\left(\overline{x} : \overline{x} \in K_d, \frac{\overline{\zeta}_p}{\sqrt{p}} \in M\right),$$

$$P_p^{(2)}(M) = \operatorname{mes}\left(\overline{x} : \overline{x} \in K_d, \frac{A\overline{\zeta}_p}{\sqrt{p}} \in M\right),$$

$$f_p(\bar{t}) = \int\limits_{K_d} \exp\left(i\left(\bar{t}, \frac{A\overline{\zeta}_p}{\sqrt{p}}\right)\right) d\,\overline{x}, \quad \widehat{f}_p(\bar{t}) = \int\limits_{K_d} \exp\left(i\left(\bar{t}, \frac{A\widehat{\overline{\zeta}}_p}{\sqrt{p}}\right)\right) d\,\overline{x},$$

$$f(\bar{t}) = \int\limits_{K_d} \exp\big(i(\bar{t}, \overline{\eta}_1)\big)\, d\,\overline{x}.$$

Ниже будем считать, что $f(\bar{t})$ удовлетворяет условию (1) леммы 2 при $\varepsilon_1 = (\nu+3)/\omega$.

Из леммы 3 работы [3] следует, что

$$\Big|f_p(\bar{t}) - \widehat{f}_p(\bar{t})\Big| \le C_3 \sqrt{\frac{p}{Q}}\exp(-C_4 N). \tag{4}$$

Далее, положим

$$g_{\nu p}(\bar{t}) = \exp\left(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\nu} P_r(i\bar{t})\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^r\right),$$

где

$$\begin{aligned} P_r(i\bar{t}) = {} & \frac{\chi_{r+2}(i\bar{t})}{(r+2)!} + \\ & + \sum_{l=1}^{r-1}\sum_{j_l=l}^{r-1}\sum_{j_{l-1}=l-1}^{j_l-1}\cdots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{(r-j_l)(j_l-j_{l-1})\cdots(j_2-j_1)}{r j_l j_{l-1}\cdots j_2 j_1} \times \\ & \times \frac{\chi_{r-j_l+2}(i\bar{t})\chi_{j_l-j_{l-1}+2}(i\bar{t})\cdots\chi_{j_2-j_1+2}(i\bar{t})\chi_{j_1}(i\bar{t})}{(r-j_l+2)!(j_l-j_{l-1}+2)!\cdots(j_2-j_1+2)!(j_1+2)!} \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\chi_j(i\bar{t})$ – семиинвариант j-го порядка величины $(i\bar{t}, A\overline{\eta}_1)$.

По теореме 1 из [8] при

$$|\bar{t}| \le \frac{\sqrt{p}}{8\,(h_{\nu+1}(Q))^{1/(\nu+1)}} = T_{\nu p},$$

где $h_{\nu+1}(Q) = \int\limits_{K_d} \|A\eta_1\|^{\nu+1}\, d\,\overline{x}$, имеет место неравенство

$$|\hat{f}_p(\bar{t}) - g_{\nu p}(\bar{t})| \le 3^{\nu+2}\frac{\|\bar{t}\|^{\nu+2}\exp\left(-\|\bar{t}\|^2/4\right)}{T_{\nu p}^{\nu+1}}. \tag{6}$$

Теперь воспользуемся следующим неравенством, полученным С.М. Садиковой [9, 10]:

$$\rho(P_p^{(2)}, \Phi) \le C_5 \left[(\ln T)^{(m-1)/4} (J_1 + 2\sqrt{2} J_2) + \frac{\ln T}{T} \right],$$

где

$$J_1^2 = \int\limits_{\|\bar t\| \le 1} \|\bar t\|^{-2} \Big| f_p(\bar t) - \exp\Big(-\frac{\|\bar t\|^2}{2}\Big)\Big|^2 d\,\bar t,$$

$$J_2^2 = \int\limits_{1<\|\bar t\| \le T} \Big| f_p(\bar t) - \exp\Big(-\frac{\|\bar t\|^2}{2}\Big)\Big|^2 d\bar t.$$

Выберем

$$T = C_6 Q^{\alpha - 2(\nu+3)/\omega} T_{\nu p} \tag{7}$$

и перейдем к нахождению необходимых нам оценок.

По неравенству Минковского имеем

$$J_1 \le \Bigg(\int\limits_{\|\bar t\|<1} \|\bar t\|^{-2} \Big| f_p(\bar t) - \widehat{f}_p(\bar t)\Big|^2 d\bar t \Bigg)^{1/2} + \Bigg(\int\limits_{\|\bar t\|\le 1} \|\bar t\|^{-2} \Big| \widehat{f}_p(\bar t) - g_{\nu p}(\bar t)\Big|^2 d\bar t \Bigg)^{1/2} +$$

$$+ \Bigg(\int\limits_{\|\bar t\|\le 1} \|\bar t\|^{-2} \Bigg| g_{\nu p}(\bar t) - \exp\Big(-\frac{\|\bar t\|^2}{2}\Big)\Bigg|^2 d\bar t \Bigg)^{1/2} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + J_2^{(3)}.$$

Для оценки интеграла $J_1^{(1)}$ при $\|\bar t\| \le n^{-\omega^{3/4}}$ используем очевидную оценку

$$\big| f_p(\bar t) - \widehat{f}_p(\bar t)\big| \le \frac{1}{\sqrt p} \int\limits_{K_d} \Big| (\bar t, A\bar\zeta_p - A\widehat{\bar\zeta}_p)\Big|\, d\,\bar x \le C_7 \|\bar t\|,$$

а при $n^{-\omega^{3/4}} < \|\bar t\| \le 1$ – оценку (4), преобразованную следующим образом. Положим в (4) $N = 2\big[n^{\omega^{-1/4}}\big]$, после чего оценка (4) примет вид

$$|f_p(\bar t) - \widehat{f}_p(\bar t)| \le C_8 \sqrt{\frac{p}{Q}} \frac{1}{n^{\omega^{3/4}}}.$$

Таким образом,

$$J_1^{(1)} \le \Bigg(\int\limits_{\|\bar t\| \le n^{-\omega^{3/4}}} C_7^2\, d\bar t \Bigg)^{1/2} + \Bigg(\int\limits_{n^{-\omega^{3/4}} \le \|\bar t\| \le 1} C_8^2 \frac{p}{Q} \frac{1}{n^{2\,\omega^{3/4}}} \|\bar t\|^{-2}\, d\bar t \Bigg)^{1/2} = O\Big(n^{-\omega^{3/4}} \sqrt{\frac{p}{Q}} \Big).$$

Согласно неравенству (6)

$$J_1^2 = O(T_{\nu p}^{-\nu+1}).$$

С помощью леммы 1 (используя тот факт, что семиинварианты r-го порядка χ_r и χ_r' соответственно величин ξ и $a\xi$ связаны между собой соотношением $\chi_r' = a^r \chi_r$) найдем оценки семиинвариантов в (5):

$$|\chi_r(i\bar t)| = O\Bigg(\frac{\|\bar t\|^r}{Q^{(r-2)/2}} \Bigg), \quad r = 3, 4, \ldots$$

Теперь мы легко получим, что

$$\bigl|P_r(i\bar t)\bigr| = O\biggl(\sum_{l=1}^{r-1} \|\bar t\|^{r+2l} Q^{-(l+r)/2}\biggr). \tag{8}$$

Поэтому

$$J_1^{(3)} = \biggl(\int\limits_{\|\bar t\|\le 1} \|\bar t\|^{-2} \biggl| \exp\Bigl(-\frac{\|\bar t\|^2}{2}\Bigr) \sum_{r=1}^{\nu} P_r(i\bar t)\Bigl(\frac{1}{\sqrt p}\Bigr)^r \biggr|^2 d\bar t\biggr)^{1/2} = O\biggl(\frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\biggr).$$

Из полученных оценок заключаем, что

$$J_1 = O\biggl(n^{-\omega^{3/4}} \sqrt{\frac{p}{Q}} + T_{\nu p}^{-(\nu+1)} + \frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\biggr). \tag{9}$$

Применяя неравенство Минковского, оценим J_2:

$$J_2 = \biggl(\int\limits_{1<\|\bar t\|\le T} \Bigl| f_p(\bar t) - \exp\Bigl(-\frac{\|\bar t\|^2}{2}\Bigr)\Bigr| d\bar t\biggr)^{1/2} \le J_2^{(1)} + J_2^{(2)} + J_2^{(3)}.$$

Подынтегральные выражения в $J_2^{(i)}$, исключая $\|\bar t\|^{-2}$, такие же, как в $J_1^{(i)}$. Оценки для $J_2^{(1)}$ и $J_2^{(3)}$ получаются аналогично оценкам для $J_1^{(1)}$ и $J_1^{(3)}$:

$$J_2^{(1)} = O\biggl(\sqrt{\frac{p}{Q}}\, n^{-\omega^{3/4}}\, T^m\biggr), \quad J_2^{(3)} = O\biggl(\frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\biggr).$$

Далее,

$$J_2^{(2)} = \biggl(\int\limits_{1<\|\bar t\|\le T} |\widehat{f}_p(\bar t) - g_{\nu p}(\bar t)|^2 d\bar t\biggr)^{1/2} \le \biggl(\int\limits_{1<\|\bar t\|\le T_{\nu p}}\biggr)^{1/2} + \biggl(\int\limits_{T_{\nu p}<\|\bar t\|\le T}\biggr)^{1/2} = J'_1 + J'_2.$$

Согласно неравенству (6)

$$J'_1 = O(T_{\nu p}^{-(\nu+1)}),$$

$$J'_2 \le \biggl(\int\limits_{T_{\nu p}<\|\bar t\|\le T} \Bigl| f^p\Bigl(\frac{A'\bar t}{\sqrt p}\Bigr)\Bigr|^2 d\bar t\biggr)^{1/2} + \biggl(\int\limits_{T_{\nu p}<\|\bar t\|\le T} |g_{\nu p}(\bar t)|^2 d\bar t\biggr)^{1/2} = J''_1 + J''_2.$$

В интеграле J''_1 сделаем замену переменных $\overline{u} = A'\,\bar t/\sqrt{P}$ и применим к получающемуся выражению оценку (1) леммы 2 и неравенство

$$m^{(\nu+3)/2} = \biggl(\int\limits_{K_d} |A\overline{\eta}_1|^2 d\,\overline{x}\biggr)^{(\nu+3)/2} \le \int\limits_{K_d} |A\overline{\eta}_1|^{\nu+3} d\,\overline{x} \le C_9 Q^{(\nu+3)^2/\omega},$$

легко выводимое из (3) и леммы 3.

Имеем

$$J_1'' \le \Bigg(C_{10} \int\limits_{\substack{(1-O(1/Q))\,T_{\nu p}/\sqrt{p}\le \\ \le \|\overline{u}\| \le (1+O(1/Q))\,T/\sqrt{p}}} p^m |f(\overline{u})|^{2p} d\,\overline{u} \Bigg)^{1/2} =$$

$$= O\Bigg(p^{m/2} Q^{\alpha m} (1 - \frac{C_2}{Q^{2(\nu+3)/\omega}})^2 \Bigg) = O\Bigg(\frac{Q^{m\alpha + (\nu+3)^2/\omega}}{p^{(\nu+3-m)/2}} \Bigg).$$

Здесь C_6 в выражении (7) для T выбрана таким образом, чтобы

$$\Big(1 + O\Big(\frac{1}{Q}\Big) \Big)\, 8 m^{-(\nu+3)/(2(\nu+1))}\, C_6 \le C_1,$$

где C_1 – постоянная из леммы 2.

В силу оценки (8)

$$J_2'' = \Bigg(\int\limits_{T_{\nu p} \le \|\bar{t}\| \le T} \Bigg| \exp\Bigg(-\frac{\|\bar{t}\|^2}{2} \Bigg) \Bigg(1 + O\Big(\sum_{r=1}^{\nu} \frac{\|\bar{t}\|^{3r}}{(p\,Q)^{r/2}} \Big) \Bigg) \Bigg|^2 d\bar{t} \Bigg)^{1/2} = O(T_{\nu p}^{-(\nu+1)}).$$

Таким образом,

$$J_2 = O\Bigg(\sqrt{\frac{p}{Q}}\, n^{-\omega^{3/4}}\, T^m + \frac{1}{\sqrt{p\,Q}} + T_{\nu p}^{-(\nu+1)} + \frac{Q^{m\alpha + (\nu+3)^2/\omega}}{p^{(\nu+3-m)/2}} \Bigg). \tag{10}$$

Окончательно получим из (9) и (10), что

$$\rho(P_p^{(2)}, \Phi) = O\Bigg(\ln^m T \Bigg(\sqrt{\frac{p}{Q}}\, n^{-\omega^{3/4}} T^m + \frac{1}{\sqrt{p\,Q}} + T_{\nu p}^{-(\nu+1)} + \frac{Q^{m\alpha + (\nu+3)^2/\omega}}{p^{(\nu+3-m)/2}} + \frac{\ln T}{T} \Bigg) \Bigg).$$

Эта оценка справедлива и для $\rho(P_p^{(1)}, \Phi_\Lambda)$. Так как $\Phi_\Lambda(M) = \Phi(M) + O(1/Q)$, то

$$\rho(P_p^{(1)}, \Phi) = O\Big(\rho(P_p^{(2)}, \Phi) + \frac{1}{Q} \Big). \tag{11}$$

Далее займемся оценкой вклада $\overline{\zeta}_p^{\,0}$ в распределение S_n. Величины P и Q выберем так, что

$$|\, n - p(Q+N)\,| \le p. \tag{12}$$

Поэтому количество слагаемых в $\overline{\eta}_{p+1}^{\,0}$ не превзойдет p и согласно неравенству Маркова и лемме 3 будем иметь

$$\operatorname{mes}\Bigg(\overline{x} : \frac{|\overline{\zeta}_p^{\,0}|}{\sqrt{p}} > \frac{N+1}{\sqrt{Q}} \Bigg) \le \sum_{j=1}^{m} \operatorname{mes}\Bigg(\overline{x} : \frac{|\overline{\zeta}_{pj}^{\,0}|}{\sqrt{p}} > \frac{N+1}{\sqrt{Q}} \Bigg) = O\Bigg(\frac{(p(N+1))^{\nu^2/\omega}}{(N+1)^{\nu}} \Bigg),$$

где ζ_{pj}^0 – компоненты вектора $\overline{\zeta}_p^{\,0}$.

Полученная оценка необходима для того, чтобы оценить погрешность, возникающую при замене в (11) распределения $P_p^{(1)}$ вектора $\overline{\zeta}_p\, p^{-1/2}$ на распределение вектора $(\overline{\zeta}_p + \overline{\zeta}_p^{\,0})\, p^{-1/2}$.

Так же, как в работе [7], получим

$$\operatorname{mes}\left(\overline{x}:\frac{\overline{\zeta}_p+\overline{\zeta}_p^{\,0}}{\sqrt{p}}\in M\right)=\Phi(M)+O\left(\frac{N+1}{\sqrt{Q}}+\frac{(p(N+1))^{\nu^2/\omega}}{(N+1)^{\nu}}+\rho(P_p^{(1)},\Phi)\right).$$

Из условия (12) следует, что

$$\sqrt{\frac{n}{p\,Q}}=1+O\left(\frac{N}{Q}\right).$$

Поэтому мы можем записать

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^i)=\frac{1}{\sqrt{p\,Q}}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^i)+C_{11}\,\frac{N}{Q^{3/2}p^{1/2}}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^i).$$

Неравенство Маркова и лемма 3 дают оценку

$$\operatorname{mes}\left(\overline{x}:\left|\frac{C_{11}\,N}{Q^{3/2}p^{1/2}}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^i)\right|>\frac{N+1}{\sqrt{Q}}\right)\leq C_{12}\,\frac{n^{\nu+\nu^2/\omega}}{Q^{2\nu}p^{\nu}}\,.$$

Это позволяет (см. [7]) оценить погрешность при замене распределения вектора $\dfrac{\overline{\zeta}_p+\overline{\zeta}_p^{\,0}}{\sqrt{P}}$ на распределение $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^i)$.

Окончательно получим

$$\rho(G_n,\Phi)=O\left(\ln^m T\left(\sqrt{\frac{p}{Q}}n^{-\sqrt[4]{\omega^3}}T^m+\frac{1}{\sqrt{p\,Q}}+T_{\nu p}^{-(\nu+1)}+\frac{\ln T}{T}+\frac{Q^{m\alpha+(\nu+1)^2/\omega}}{p^{(\nu+3-m)/2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(p(N+1))^{\nu^2/\omega}}{(N+1)^{\nu}}+\frac{N+1}{\sqrt{Q}}+\frac{n^{\nu+\nu^2/\omega}}{Q^{2\nu}p^{\nu}}\right).\quad(13)$$

Далее, выберем $\nu=\sqrt[3]{\omega}$, $p=\left[n^{(1-2\alpha)/(2(1-\alpha))}\right]$, а Q – из условия (12), учитывая, что $N=2\left[n^{1/\omega^{3/4}}\right]$. Так как

$$T=C_6Q^{\alpha-2(\nu+3)/\omega}T_{\nu p}\geq\frac{C_6Q^{\alpha}\sqrt{p}}{Q^{3(\nu+3)/\omega}},$$

мы перепишем (13) следующим образом:

$$\rho(G_n,\Phi)=O(n^{-1/(4(1-\alpha))+1/\sqrt[4]{\omega}}).\quad(14)$$

Отсюда вытекает оценка

$$\rho(G_n,\Phi)=O\left(\frac{1}{1+\beta^{\sqrt[12]{\omega}}}\,n^{-1/(4(1-\alpha))+2/\sqrt[4]{\omega}}\right).\quad(15)$$

Доказательство этого перехода аналогично доказательству леммы 5 из [7].

Мы получили (14) при выполнении условия (1) из леммы 2. При $\alpha=0$ необходимость этого условия отпадает. T будет меньше $T_{\nu p}$ и исчезнет интеграл J_2', для оценки которого необходимо условие (1). Подставив $\alpha=0$ в (14), имеем

$$\rho(G_n,\Phi)=O(n^{-1/4+1/\sqrt[4]{\omega}}).$$

Получив соотношение (15), мы тем самым доказали, что оценка (1) леммы 2 верна при $\alpha = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{\omega}}$ и $\gamma = \sqrt[12]{\omega}$. Из леммы 2 следует справедливость оценки (1), а из условия (1) следует равенство (14) при $\alpha = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{\omega}}$. Подставив $\alpha = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{\omega}}$ в (14), имеем

$$\rho(G_n, \Phi) = O\left(\frac{1}{n^{1/3 - 3/\sqrt[4]{\omega}}}\right).$$

Этот процесс последовательных приближений можно продолжить (см. [7]).

Окончательно получим

$$\rho(G_n, \Phi) = O\left(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon = 3/\sqrt[8]{\omega}$, $\omega > (2m)^5$. Теорема доказана.

□

Summary

F.G. Gabbasov, V.T. Dubrovin. Estimation of the Rate of Convergence in the Multidimensional Central Limit Theorem for Endomorphisms of Euclidean Space.

Let W be such a nonsingular integer square matrix of order d that $|\det W| > 1$; $f_i(x)$ are real-valued periodic in each argument Lipschitz-continuous functions defined on the unit hypercube in R^d. We consider m-dimensional vectors $(f_1(xW^k), \ldots, f_m(xW^k))$, $k = 1, 2, \ldots$ and obtain the estimate of order $O(n^{\varepsilon - 1/2})$ (where ε is an arbitrarily small number) for the distance between the distribution of the normalized sum of these vectors and the normal distribution at all measurable convex sets from R^m.

Keywords: endomorphisms, limit theorem, rate of convergence.

Литература

1. *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов. – М.: Наука, 1964. – 69 с.
2. *Постников А.Г.* Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1966. – Т. 82. – С. 3–112.
3. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* О распределении дробных долей одного класса преобразований евклидовых пространств // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1971. – Вып. 9. – С. 45–56.
4. *Дубровин В.Т.* Многомерная центральная предельная теорема для теоретико-числовых эндоморфизмов // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1972. – Вып. 10. – С. 17–29.
5. *Дубровин В.Т.* Центральная предельная теорема для эндоморфизмов евклидовых пространств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 54–64.
6. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от слабозависимых случайных величин // Теория вероятности и её применение. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1979. – Т. XXIV, Вып. 3. – С. 553–563.

7. *Габбасов Ф.Г.* Многомерная центральная предельная теорема для сумм функций от последовательностей с перемешиванием // Литов. матем. сб. – 1977. – Т. XVII, № 4. – С. 83–98.

8. *Бикялис А.* О многомерных характеристических функциях // Литов. матем. сб. – 1968. – Т. VIII, № 1. – С. 21–40.

9. *Садикова С.М.* Расстояния между распределениями, связанные с их значениями на выпуклых множествах // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 787–789.

10. *Садикова С.М.* О многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятности и её применения. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1968. – Т. XIII, № 1. – С. 164–170.

Поступила в редакцию
24.03.13

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

Габбасов Фарит Гаязович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *gabbasov@kgasu.ru*