УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 155, кн. 2 Физико-математические науки *2013*

УДК 517.957

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

И.Б. Бадриев, В.В. Бандеров

Аннотация

В работе проведено исследование сходимости итерационных методов решения в банаховых пространствах вариационных неравенств с операторами монотонного типа, возникающих при описании процессов деформирования мягких сетчатых оболочек вращения. Установлены свойства этих операторов – коэрцитивность, потенциальность, ограниченная липшиц-непрерывность, псевдомонотонность или обратная сильная монотонность. Для решения вариационных неравенств рассмотрен итерационный метод и исследована его сходимость – доказана ограниченность итерационной последовательности и установлено, что любая ее слабо сходящаяся подпоследовательность имеет пределом решение исходного вариационного неравенства.

Ключевые слова: вариационное неравенство, псевдомонотонный оператор, потенциальный оператор, итерационный метод, мягкая сетчатая оболочка.

Введение

Рассматривается задача решения вариационного неравенства с оператором монотонного типа в банаховом пространстве. К таким вариационным неравенствам сводится, например, осесимметричная задача об определении положения равновесия мягкой сетчатой оболочки вращения, закрепленной по краям, находящейся под воздействием массовых сил и постоянной следящей поверхностной нагрузки, представляющей из себя в недеформированном состоянии цилиндр заданного радиуса и длины. Ранее в [1] исследована разрешимость вариационного неравенства.

Считается, что сетчатая оболочка образована двумя семействами взаимно пересекающихся армирующих нитей в продольном и циркулярном направлениях. Предполагается, что функция, определяющая в продольных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, непрерывна, не убывает и имеет степенной рост. Ограничений на рост функции, определяющей в циркулярных нитях зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, не накладывается. Установлены свойства операторов, входящих в вариационное неравенство, – псевдомонотонность и коэрцитивность. Это дало возможность для исследования его разрешимости использовать известные результаты теории монотонных операторов.

В настоящей работе при дополнительных предположениях относительно функций, характеризующих физические соотношения в нитях, установлено, что оператор в вариационном неравенстве является потенциальным и ограниченно липшиц-непрерывным, а в случае гильбертова пространства, когда функции, задающие физические соотношения в нитях, имеют линейный рост, а поверхностная нагрузка отсутствует, установлено, что оператор является обратно сильно монотонным. Поэтому для решения рассматриваемого вариационного неравенства можно использовать предложенный ранее в [2] итерационный метод.

Каждый шаг итерационного процесса сводится к решению вариационного неравенства с оператором двойственности, обладающим лучшими свойствами по сравнению с исходным псевдомонотонным оператором. Данное вариационное неравенство имеет единственное решение.

Установлены пределы изменения итерационного параметра, обеспечивающие сходимость метода. Доказано, что в случае банахова пространства итерационная последовательность ограничена и все ее слабо предельные точки являются решениями исходного вариационного неравенства. В случае гильбертова пространства установлена слабая сходимость всей итерационной последовательности.

1. Постановка задачи

Пусть $l > 0$, $r_0 > 0$, $p > 1$ – заданные числа, $V = \left[\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(0,l)\right]^2$ – пространство Соболева с нормой $\|u\| = \left[\int\limits_0^l |u'|^p\,ds\right]^{1/p}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между V и $V^* = \left[\overset{\circ}{W}{}_{p^*}^{(-1)}(0,l)\right]^2$, $p^* = p/(p-1)$, $K = \{u \in V : r_0 + u_2 \geq 0\}$. Очевидно, что множество K выпукло и замкнуто.

Рассмотрим задачу нахождения функции $u \in K$, являющейся решением вариационного неравенства

$$\langle (A+D)u,\, v-u\rangle \geq \langle f - q_0(B+H)u,\, v-u\rangle \quad \forall\, v \in K, \tag{1}$$

где q_0 – заданное число, операторы $A,\ B,\ D,\ H : V \to V^*$ и элемент $f \in V^*$ порождаются формами

$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,(\widetilde{u}', v')\,ds, \quad \langle Bu, v\rangle = \int\limits_0^l [\widetilde{u}_1' v_2 + u_2 v_1']\,ds,$$

$$\langle Du, v\rangle = \frac{1}{r_0}\int\limits_0^l T_2(\lambda_2(u))v_2\,ds, \quad \langle Hu, v\rangle = \frac{1}{r_0}\int\limits_0^l \left[\frac{1}{2}\,u_2^2 v_1' + \widetilde{u}_1' u_2 v_2\right] ds,$$

$$\langle f, v\rangle = \int\limits_0^l (\overline{f},\, v)\,ds, \tag{2}$$

где $\overline{f}$ – заданная функция такая, что для любого $v \in V$ существует интеграл в (2).

К вариационному неравенству (1) сводится, например, осесимметричная задача об определении положения равновесия мягкой сетчатой оболочки вращения, закрепленной по краям, находящейся под воздействием массовых сил, задаваемых функцией $\overline{f}$, постоянной следящей поверхностной нагрузки интенсивности q_0 и представляющей из себя в недеформированном состоянии цилиндр заданного радиуса r_0 длины l [1].

Относительно функций T_1 и T_2 считаем, что

$$T_i(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \leq 1, \quad i = 1,2, \tag{3}$$

$$T_i, \quad i = 1,2, \ \text{– непрерывные, неубывающие,} \tag{4}$$

$$k_0(\xi-1)^{p-1} \leq T_1(\xi) \leq k_1\xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi \geq 1, \quad k_0 > 0, \quad k_1 > 0. \tag{5}$$

В [1] исследована разрешимость вариационного неравенства (1). Доказана

Теорема 1. *Пусть* $f \in V^*$, *выполнены условия* (3)–(5). *Тогда*

1) *если* $p > 3$, *то неравенство* (1) *имеет решение при любом* q_0;

2) *если* $p = 3$, *то неравенство* (1) *имеет решение при всех* q_0, *удовлетворяющих условию* $|q_0| < q_1 = k_0/c_2$, *где* $c_2 = c_1\sqrt{2}\, l^{1/p^*}/r_0$, $c_1 = 2l^{2/p^*}$.

3) *если* $1 < p < 3$, *то для любого* $\delta > 0$ *найдется* $q_\delta > 0$, *такое, что задача* (1) *имеет решение при условиях* $\|f\|_{V^*} \le \delta, \quad |q_0| < q_\delta$.

Доказательство теоремы 1 проводилось в [1] на основе общих результатов теории монотонных операторов (см., например, [3]). Предварительно были установлены некоторые свойства операторов A, B, D, H, входящих в вариационное неравенство (1).

Лемма 1. *Оператор* B – *липшиц-непрерывный с постоянной* c_1. *Если* $u^{(n)} \rightharpoonup u$, $v^{(n)} \rightharpoonup v$ *в* V *при* $n \to +\infty$, *то* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\langle Bu^{(n)}, v^{(n)} \right\rangle = \langle Bu, v\rangle$; *кроме того, оператор* B *является псевдомонотонным.*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (3)–(5). *Тогда оператор* A *является непрерывным, монотонным и ограниченным и, следовательно, псевдомонотонным и коэрцитивным, причем*

$$\langle Au, u\rangle \ge k_0\|u\|^p - c_3\,\|u\|^{p-1} - c_4, \quad \forall\, u \in V. \tag{6}$$

где $c_3 = \left[k_0 p + ((p-1)k_0 + k_1)2^{p-1}\right] l^{1/p}$, $c_4 = \left[((p-1)k_0 + k_1)2^{p-1}\right] l + k_0 l$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *Тогда оператор* D *является монотонным и ограниченным и, следовательно, псевдомонотонным; кроме того,* $\langle Du, u\rangle \ge 0$ *для всех* $u \in V$; *если* $u^{(n)} \rightharpoonup u$ *в* V *при* $n \to \infty$, *то* $Du^{(n)} \to Du$ *в* V^* *при* $n \to \infty$.

Лемма 4. *Пусть* $u^{(n)} \rightharpoonup u, v^{(n)} \rightharpoonup v$ *в* V *при* $n \to +\infty$, *тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\langle Hu^{(n)}, v^{(n)} \right\rangle = \langle Hu, v\rangle$; *кроме того, оператор* H *является псевдомонотонным.*

2. Свойства операторов

В настоящем параграфе устанавливается дополнительно ряд свойств операторов, входящих в вариационное неравенство (1): потенциальность, липшиц-непрерывность, ограниченная липшиц-непрерывность, обратная сильная монотонность. Эти свойства используются для исследования сходимости предложенного в [2] двухслойного итерационного процесса решения вариационного неравенства с операторами монотонного типа в банаховых и гильбертовых пространствах.

По аналогии с [4, с. 79] оператор A назовем ограниченно липшиц-непрерывным с функциями Φ_A и μ_A, если

$$\|Au - Av\|_{V^*} \le \mu_A(R)\,\Phi_A\left(\|u - v\|_V\right) \quad \forall\, u, v \in V, \tag{7}$$

где $R = \max\{\|u\|_V, \|v\|_V\}$, μ_A – неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, Φ_A – строго возрастающая на $[0, +\infty)$ функция, такая, что $\Phi_A(0) = 0$, $\Phi_A(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$.

Оператор A называется обратно сильно монотонным[1] (см. [7, с. 243]) с постоянной d, если

$$\|Au - Av\|_{V^*}^2 \le d\,\langle Au - Av, u - v\rangle \quad \forall\, u, v \in V.$$

[1]В англоязычной литературе такой оператор называется также ко-коэрцитивным (см., например, [5, 6]).

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (3)–(5)*. Тогда оператор* A *потенциален, его потенциалом является функционал* F_A

$$F_A(v) = \int_0^1 \langle A(t\,v), v\rangle\; dt = \int_0^l \int_0^{\lambda_1(v)} T_1(\xi)\, d\xi\, ds \quad v \in V,$$

и справедлива формула[2]

$$F_A(u+v) - F_A(u) = \int_0^1 \langle A(u+tv), v\rangle\; dt \quad \forall\, u, v \in V. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем

$$F_A(v) = \int_0^1 \langle A(tv),\, v\rangle\; dt = \int_0^1 \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(tv))}{\lambda_1(tv)}\, \left[t\,|v'|^2 + v_1'\right]\, ds\, dt \;=$$

$$= \int_0^l \int_0^1 \frac{T_1(\lambda_1(tv))}{\lambda_1(tv)}\, \left[t\,|v'|^2 + v_1'\right]\, dt\, ds.$$

Сделаем замену переменного $\xi = \lambda_1(tv)$. При этом $\xi^2 = t^2\,|v'|^2 + 2tv_1' + 1$, следовательно, $\xi\, d\xi = \left[t\,|v'|^2 + v_1'\right]\, dt$, и

$$F_A(v) = \int_0^l \int_1^{\lambda_1(v)} T_1(\xi)\, d\xi\, ds = \int_0^l \int_0^{\lambda_1(v)} T_1(\xi)\, d\xi\, ds, \tag{9}$$

так как $T_1(\xi) = 0$ при $\xi \le 1$.

Далее,

$$\int_0^1 \langle A(u+tv),\, v\rangle\; dt = \int_0^l \int_0^1 \frac{T_1(\lambda_1(u+tv))}{\lambda_1(u+tv)}\, \left[(u', v') + t\,|v'|^2 + v_{1,}'\right]\, dt\, ds.$$

Пусть $\xi = \lambda_1(u+tv)$. При этом $\xi^2 = 2t(u', v') + t^2\,|v'|^2 + 2tv_1' + |u'|^2 + u' + 1$, следовательно, $\xi\, d\xi = \left[(u', v') + t\,|v'|^2 + v_1'\right]\, dt$, и

$$\int_0^1 \langle A(u+tv),\, v\rangle\; dt = \int_0^l \int_{\lambda_1(u)}^{\lambda_1(u+v)} T_1(\xi)\, d\xi\, ds. \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает соотношение (8).

Поскольку в силу леммы 2 оператор A непрерывен, то согласно замечанию 4.1 и лемме 4.1 [4, с. 111, 112] он является потенциальным, причем его потенциалом является функционал F_A. Лемма доказана.

□

Лемма 6. *Пусть* $p \ge 2$*, выполнены условия* (3)–(5) *и, кроме того,*

$$\frac{T_1(\beta) - T_1(\gamma)}{\beta - \gamma} \le k_2 (1 + \beta + \gamma)^{p-2}, \quad k_2 > 0 \quad \forall\, \beta,\, \gamma \in R^1, \quad \beta,\, \gamma > 0. \tag{11}$$

[2]Так называемое условие квазипотенциальности [8].

Тогда оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\Phi(\xi)=\xi$, $\mu(\xi)=c_5\left(3l^{1/p}+2\xi\right)^{p-2}$, *где* $c_5=\max\{k_1,k_2\}$.

Доказательство. Следуя [9, 10], нетрудно проверить, что при выполнении условия (11) для любых векторов $\xi,\eta\in R^2$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{T_1(|\xi|)}{|\xi|}\,\xi-\frac{T_1(|\eta|)}{|\eta|}\,\eta\right|^2\le c_5\left(\frac{T_1(|\xi|)}{|\xi|}\,\xi-\frac{T_1(|\eta|)}{|\eta|}\,\eta,\,\xi-\eta\right)(1+|\xi|+|\eta|)^{p-2}. \tag{12}$$

Тогда для любых u, v, w из V имеем

$$|\langle Au-Av,\,w\rangle|=\left|\int\limits_0^l\left(\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,\widetilde{u}\,'-\frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)}\,\widetilde{v}',\,w'\right)ds\right|\le$$

$$\le\left[\int\limits_0^l\left|\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,\widetilde{u}'-\frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)}\,\widetilde{v}'\right|^{p^*}ds\right]^{1/p^*}\|w\|\le$$

$$\le c_5^{1/2}\left[\int\limits_0^l\left(\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,\widetilde{u}'-\frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)}\,\widetilde{v}',\,\widetilde{u}'-\widetilde{v}'\right)^{p^*/2}\times\right.$$

$$\left.\times\;[1+\lambda_1(u)+\lambda_1(v)]^{(p-2)p^*/2}\,ds\right]^{1/p^*}\|w\|.$$

Пусть $p>2$, тогда $p^*<2$, а $2/p^*>1$. Применяя к правой части последнего неравенства неравенство Гельдера с показателями $2/p^*$ и сопряженным к нему $2p/(p^*(p-2))$, учитывая то, что $\widetilde{u}'-\widetilde{v}'=u'-v'$, получим

$$|\langle Au-Av,w\rangle|\le c_5^{1/2}\left[\int\limits_0^l\left(\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,\tilde{u}\,'-\frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)}\,\tilde{v}\,',\,\tilde{u}\,'-\tilde{v}\,'\right)ds\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^l\Big[1+\lambda_1(u)+\lambda_1(v)\Big]^p ds\right]^{(p-2)/(2p)}\|w\|\le c_5^{1/2}\,\langle Au-Av,u-v\rangle^{1/2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^l\Big[3+|u\,'|+|\,v\,'\,|\Big]^p ds\right]^{(p-2)/(2p)}\|w\|\le$$

$$\le c_5^{1/2}\,\langle Au-Av,u-v\rangle^{1/2}\Big[3\,l^{1/p}+\|u\|+\|v\|\Big]^{(p-2)/2}\|w\|.$$

Поэтому

$$\|Au-Av\|_{V^*}=\sup_{w\neq0}\frac{|\langle Au-Av,\,w\rangle|}{\|w\|}\le$$

$$\le c_5^{1/2}\,\langle Au-Av,\,u-v\rangle^{1/2}\Big[3l^{1/p}+\|u\|+\|v\|\Big]^{(p-2)/2}\le$$

$$\le c_5^{1/2}\|Au-Av\|_{V^*}^{1/2}\,\|u-v\|^{1/2}\Big[3l^{1/p}+\|u\|+\|v\|\Big]^{(p-2)/2},$$

откуда

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leq c_5 \|u - v\| \left[3l^{1/p} + \|u\| + \|v\|\right]^{p-2} \leq$$
$$\leq \mu(R)\Phi\left(\|u - v\|\right), \quad R = \max\left\{\|u\|, \|v\|\right\} \quad \forall\, u, \eta \in V.$$

При $p = 2$ имеем, что

$$|\langle Au - Av,\, w\rangle| \leq c_5^{1/2} \left[\int_0^l \left(\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\, \widetilde{u}' - \frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)}\, \widetilde{v}',\, \widetilde{u}' - \widetilde{v}'\right) ds\right]^{1/2} \|w\| =$$
$$= c_5^{1/2} \left\langle Au - Av,\, u - v\right\rangle^{1/2} \|w\|,$$

следовательно,

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leq c_5 \|u - v\|.$$

При этом оператор A является липшиц-непрерывным с постоянной c_5. Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть* $1 < p < 2$, *функция* T_1 *удовлетворяет условиям* (3)–(5) *и, кроме того,*

$$\frac{T_1(\beta) - T_1(\gamma)}{\beta - \gamma} \leq k_3(\beta + \gamma)^{p-2} \quad \forall\, \beta, \gamma \in (0, +\infty), \quad k_3 > 0. \tag{13}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left|\frac{T_1(|\xi|)}{|\xi|}\, \xi - \frac{T_1(|\eta|)}{|\eta|}\, \eta\right|^2 \leq c_6(|\xi| + |\eta|)^{p-2}\, |\xi - \eta| \quad \forall\, \xi, \eta \in R^2, \tag{14}$$

где $c_6 = \max\{2k_1, k_3\}$.

Доказательство. При $\xi = \eta$ неравенство (14) выполняется тривиальным образом. Предположим поэтому, что $\xi \neq \eta$. По аналогии с [11] рассмотрим выражение

$$I = \frac{\left|\dfrac{T_1(|\xi|)}{|\xi|}\, \xi - \dfrac{T_1(|\eta|)}{|\eta|}\, \eta\right|^2}{|\xi - \eta|^2} = \frac{T_1^2(|\xi|) + T_1^2(|\eta|) - 2T_1(|\xi|)T_1(|\eta|)t}{|\xi|^2 + |\eta|^2 - 2t|\xi|\,|\eta|},$$

где

$$t = \frac{(\xi, \eta)}{|\xi|\,|\eta|} \in [-1, 1].$$

Функция $t \to I(t)$ является дробно-рациональной, а значит, достигает наибольшего значения либо при $t = 1$, либо при $t = -1$. В первом случае (при $t = 1$) в силу (13)

$$I = \frac{\left(T_1(|\xi|) - T_1(|\eta|)\right)^2}{\left(|\xi| - |\eta|\right)^2} \leq k_2^2(|\xi| + |\eta|)^{2(p-2)}.$$

Во втором случае (при $t = -1$) в силу (5)

$$I = \frac{\left(T_1(|\xi|) + T_1(|\eta|)\right)^2}{\left(|\xi| + |\eta|\right)^2} \leq k_1^2\, \frac{\left(|\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1}\right)^2}{\left(|\xi| + |\eta|\right)^2} \leq$$
$$\leq 4k_1^2\, \frac{\left(|\xi| + |\eta|\right)^{2(p-1)}}{\left(|\xi| + |\eta|\right)^2} = 4k_1^2(|\xi| + |\eta|)^{2(p-2)}.$$

Таким образом,

$$I^{1/2} \le c_6(|\xi| + |\eta|)^{p-2}, \quad c_6 = \max\{2k_1, k_3\}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 8. *Пусть* $1 < p < 2$, *функция* T_1 *удовлетворяет условиям* (3)–(5), (13). *Тогда оператор* A *является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями* $\Phi_A(\xi) = \xi^{p-1}$, $\mu_A(\xi) = c_6$.

Доказательство. В силу леммы 7 для любых векторов $\xi, \eta \in R^2$ имеем

$$\frac{\left|\dfrac{T_1(|\xi|)}{|\xi|}\,\xi - \dfrac{T_1(|\eta|)}{|\eta|}\,\eta\right|}{|\xi-\eta|^{p-1}} \le c_6\,\frac{(|\xi|+|\eta|)^{p-2}\,|\xi-\eta|}{|\xi-\eta|^{p-1}} = c_6\,\frac{(|\xi-\eta|)^{2-p}}{(|\xi|+|\eta|)^{2-p}} \le c_6.$$

Из этого неравенства следует, что для любых u, η, w из V

$$|\langle Au - Av,\, w\rangle| = \left|\int_0^l \left(\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,\widetilde{u}' - \frac{T_1(\lambda_1(v))}{\lambda_1(v)}\,\widetilde{v}',\, w'\right) ds\right| \le$$

$$\le\; c_7 \int_0^l |\widetilde{u}' - \widetilde{v}'||w'|\,ds = c_7 \int_0^l |u'-v'|^{p-1}\,|w'|\,ds \le c_7\,|u-v|^{p-1}\,\|w\|,$$

Поэтому

$$\|Au - Av\|_{V^*} = \sup_{w\neq 0} \frac{|\langle Au - Av,\, w\rangle|}{\|w\|} \le c_7\,\|u-v\|^{p-1},$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 9. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *Тогда оператор* D *потенциален, его потенциалом является функционал* F_D

$$F_D(v) = \int_0^1 \langle D(tv),\, v\rangle\, dt = \int_0^l \int_1^{\lambda_1(v)} T_2(\xi)\,d\xi\,ds, \quad v\in V,$$

и справедлива формула

$$F_D(u+v) - F_D(u) = \int_0^1 \langle D(u+tv),\, v\rangle\, dt \qquad \forall\, u,\, v \in V. \tag{15}$$

Доказательство. Имеем

$$F_D(v) = \frac{1}{r_0}\int_0^1 \langle D(tv),\, v\rangle\, dt = \int_0^1\int_0^l T_2(\lambda_2(tv))v_2\,ds\,dt = \int_0^l\int_0^1 T_2\,\left(\frac{tv_2+r_0}{r_0}\right)\frac{v_2}{r_0}\,dt\,ds.$$

Сделаем замену переменного $\xi = \lambda_2(tv) = (tv_2 + r_0)/r_0$. При этом $d\xi = v_2\,dt/r_0$, следовательно,

$$F_D(v) = \int_0^l \int_1^{\lambda_2(v)} T_2(\xi)\,d\xi\,ds = \int_0^l\int_0^{\lambda_1(v)} T_2(\xi)\,d\xi\,ds, \tag{16}$$

так как $T_2(\xi) = 0$ при $\xi \le 1$.

Далее,

$$\int_0^1 \langle D(u+t\,v), v\rangle\, dt = \int_0^l \int_0^1 T_2(\lambda_2(u+t\,v))\,\frac{v_2}{r_0}\,dt\,ds.$$

Сделаем замену переменного $\xi = \lambda_2(u+tv) = (u_2+tv_2+r_0)/r_0$. При этом $d\xi = v_2 dt/r_0$, следовательно,

$$\int_0^1 \langle D(u+tv),\, v\rangle\, dt = \int_0^l \int_{\lambda_2(u)}^{\lambda_2(u+v)} T_2(\xi)\, d\xi\, ds. \tag{17}$$

Из (16) и (17) вытекает соотношение (15).

Поскольку в силу леммы 3 оператор D непрерывен, то согласно согласно замечанию 4.1 и лемме 4.1 [4, с. 111, 112] он является потенциальным, причем его потенциалом является функционал F_D. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Пусть $p>2$, выполнено условие* (3), *а также*

$$\frac{T_2(\beta)-T_2(\gamma)}{\beta-\gamma} \le k_4(1+\beta+\gamma)^{\sigma-1} \quad \forall\,\beta,\,\gamma\in(0,+\infty), \quad k_4>0, \quad \sigma>1. \tag{18}$$

Тогда оператор D является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\Phi_D(\xi)=\xi$, $\mu_D(\xi) = c_7\left(3+2l^{1/p^*}\xi/r_0\right)^{\sigma-1}$, где $c_7 = k_3 l^{2/p^*+1}/r_0$.

Доказательство. Для любых u, v, w из V в силу (18) имеем

$$|\,\langle Du-Dv,\,w\rangle\,| \le \frac{1}{r_0}\int_0^l |T_2(\lambda_2(u)) - T_2(\lambda_2(v))|\,|w_2|\,ds \ \le$$

$$\le\ \frac{1}{r_0}\max_{0\le s\le l}|w_2(s)|\int_0^l \frac{T_2(\lambda_2(u))-T_2(\lambda_2(v))}{\lambda_2(u)-\lambda_2(v)}\,|\lambda_2(u))-\lambda_2(v)|\,ds\ \le$$

$$\le \frac{k_4}{r_0^2}\,l^{1/p^*}\,\|w\|\max_{0\le s\le l}|u_2(s)-v_2(s)|\int_0^l [1+\lambda_2(u)+\lambda_2(v)]^{\sigma-1}\,ds\ \le$$

$$\le\ \frac{k_4}{r_0^2}\,l^{2/p^*}\|w\|\,\|u-v\|\int_0^l\left[3+\frac{u_2}{r_0}+\frac{v_2}{r_0}\right]^{\sigma-1} ds\ \le$$

$$\le\ \frac{k_4}{r_0^2}\,l^{2/p^*+1}\|w\|\,\|u-v\|\left[3+\frac{l^{1/p^*}}{r_0}\,(\|u\|+\|v\|)\right]^{\sigma-1} \le \mu_D(R)\Phi_D(\|u-v\|),$$

где $R = \max\{\|u\|,\|v\|\}$. Поэтому

$$\|Du-Dv\|_{V^*} = \sup_{w\ne 0}\frac{|\langle Du-Dv,w\rangle|}{\|w\|} \le \mu_D(R)\,\Phi_D(\|u-v\|),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Пусть $1<p<2$, выполнено условие* (18). *Тогда оператор D является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\Phi_{1,D}(\xi) = \xi^{p-1}$ и $\mu_{1,D}(\xi) = c_8\left(3+2l^{1/p^*}\xi/r_0\right)^{\sigma-1}\xi^{2-p}$, где $c_8 = c_7 2^{2-p}$.*

Доказательство. Имеем

$$\|Du-Dv\|_{V^*} \le c_7 \left[3+\frac{2l^{1/p^*}}{r_0}\,R\right]^{\sigma-1} \|u-v\| \ \le$$
$$\le\ c_7 \left[3+\frac{2l^{1/p^*}}{r_0}\,R\right]^{\sigma-1} (\|u\|+\|v\|)^{2-p}\,\|u-v\|^{p-1}\ \le$$
$$\le\ c_7 2^{2-p}\,R^{2-p}\left[3+\frac{2l^{1/p^*}}{r_0}\,R\right]^{\sigma-1} \Phi_D(\|u-v\|)=\mu_{1,D}(R)\Phi_{1,D}(\|u-v\|),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 11. *Пусть* $p=2$, *выполнено условие* (3), *а также*

$$\frac{T_2(\beta)-T_2(\gamma)}{\beta-\gamma} \le k_5 \quad \forall\,\beta,\gamma\in(0,+\infty), \quad k_5>0. \tag{19}$$

Тогда D *– обратно сильно монотонный оператор с постоянной* $c_9=k_5\,l/2r_0^2$.

Доказательство. Для любых $\beta,\gamma\in(0,+\infty)$ в силу (19) имеем

$$|T_2(\beta)-T_2(\gamma)|^2=\left|\frac{T_2(\beta)-T_2(\gamma)}{\beta-\gamma}\right|\,[T_2(\beta)-T_2(\gamma)]\,(\beta-\gamma)\ \le$$
$$\le\ k_5\,[T_2(\beta)-T_2(\gamma)]\,(\beta-\gamma),$$

следовательно, для любых u, v, w из V

$$|\,\langle Du-Dv,\,w\rangle\,| \le \frac{1}{r_0}\int\limits_0^l |T_2(\lambda_2(u))-T_2(\lambda_2(v))|\,|w_2|\,ds\ \le$$
$$\le\ \frac{k_5^{1/2}}{r_0}\int\limits_0^l \left[(T_2(\lambda_2(u))-T_2(\lambda_2(v))\,(\lambda_2(u)-\lambda_2(v))\right]^{1/2}|w_2|\,ds \le$$
$$\le \frac{k_5^{1/2}}{r_0}\,\frac{l^{1/2}}{\sqrt{2}}\,\|w\|\,\langle Du-Dv,\,u-v\rangle^{1/2},$$

тогда

$$\|Du-Dv\|_{V^*}=\sup_{w\ne 0}\frac{|\langle Du-Dv,\,w\rangle|}{\|w\|} \le \frac{k_5^{1/2}}{r_0}\,\frac{l^{1/2}}{\sqrt{2}}\,\langle Du-Dv,\,u-v\rangle^{1/2},$$

откуда и вытекает требуемое утверждение. □

Лемма 12. *Оператор* B *потенциален, его потенциалом является функционал* F_B

$$F_B(v)=\int\limits_0^1 \langle B(tv),\,v\rangle\,dt=\int\limits_0^l (v_1'+1)v_2\,ds, \quad v\in V,$$

и справедлива формула

$$F_B(u+v)-F_B(u)=\int\limits_0^1 \langle B(u+tv),\,v\rangle\,dt \quad \forall\,u,\,v\in V. \tag{20}$$

Доказательство. Имеем

$$F_B(v) = \int_0^1 \rangle B(tv),\, v\rangle\, dt = \int_0^1 \int_0^l (2tv_1' + 1)v_2\, ds\, dt = \int_0^l (v_1' + 1)v_2\, ds.$$

При этом

$$F_B(u+v) - F_B(u) = \int_0^l \left[(v_1' + u_1' + 1)\,(v_2 + u_2) - (u_1' + 1)u_2 \right] ds \ =$$

$$= \int_0^l \int_0^1 \left[(tv_1' + u_1' + 1)\, v_2 + (u_2 + tv_2)\, v_1' \right] dt\, ds = \int_0^1 \langle B(u+tv),\, v\rangle\, dt,$$

то есть равенство (20) справедливо. То, что F_B является потенциалом B, вытекает непосредственно из определения производной Гато функционала. Лемма доказана. □

Лемма 13. *Оператор H является ограниченно липшиц-непрерывным с функциями $\Phi(\xi) = \xi$, $\mu_H(\xi) = c_{10}\, \xi$, где $c_{10} = 2\sqrt{2}\, l^{3/p^*}/r_0$.*

Доказательство. Для произвольных u, v и w из V имеем

$$|\langle Hu - Hv,\, w\rangle| = \frac{1}{r_0} \left| \int_0^l \left[\frac{1}{2}\, (u_2 - v_2)^2 w_1' + (u_1' - v_1')\ (u_2 - v_2) w_2 \right] ds \right| \ \le$$

$$\le\ \frac{1}{2r_0} \max_{0 \le s \le l} |u_2(s) - v_2(s)|^2 \int_0^l |w_1'|\, ds \ +$$

$$+\ \frac{1}{r_0} \max_{0 \le s \le l} |w_2(s)| \max_{0 \le s \le l} |u_2(s) - v_2(s)| \int_0^l |u_1' - v_1'|\, ds \ \le$$

$$\le\ \frac{1}{r_0} \int_0^l |u_2' - v_2'|\, ds \left[\int_0^l |u_2' - v_2'|\, ds \int_0^l |w_1'|\, ds + \int_0^l |u_1' - v_1'|\, ds \int_0^l |w_2'|\, ds \right] \le$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}\, l^{3/p^*}}{r_0} \max\{\|u\|,\, \|v\|\}\, \|u - v\| \|w\| = c_{10} R \|u - v\|\, \|w\|, \quad R = \max\{\|u\|,\, \|v\|\},$$

следовательно,

$$\|Hu - Hv\|_{V^*} = \sup_{w \ne 0} \frac{|\langle Hu - Hv,\, w\rangle|}{\|w\|} \le c_{10} R \|u - v\|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 14. *Оператор H потенциален, его потенциалом является функционал F_H*

$$F_H(v) = \int_0^1 \langle H(tv),\, v\rangle\, dt = \frac{1}{2r_0} \int_0^l (v_1' + 1)v_2^2\, ds, \quad v \in V,$$

и справедлива формула

$$F_H(u+v) - F_H(u) = \int\limits_0^1 \langle H(u+tv),\, v\rangle \; dt \quad \forall\, u,\, v \in V. \tag{21}$$

Доказательство. Имеем

$$F_H(v) = \int\limits_0^1 \langle H(tv), v\rangle \; dt = \frac{1}{r_0} \int\limits_0^1 \int\limits_0^l \left[\frac{3}{2}\, t^2 v_2^2 v_1' + t v_2^2\right] ds\, dt = \frac{1}{2\, r_0} \int\limits_0^l (v_1'+1) v_2^2\, ds.$$

При этом

$$F_H(u+v) - F_H(u) = \frac{1}{2r_0} \int\limits_0^l \left[(v_1'+u_1'+1)\,(v_2+2u_2)v_2 + v_1' u_2^2\right] ds =$$

$$= \frac{1}{r_0} \int\limits_0^l \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}\,(u_2+tv_2) v_2^2 v_1' + (u_1'+tv_1'+1)\,(u_2+t\,v_2)v_2\right] dt\, ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle H(u+tv),\, v\rangle \, dt,$$

то есть равенство (21) справедливо. То, что F_H является потенциалом H, вытекает непосредственно из определения производной Гато функционала. Лемма доказана. □

3. Итерационный метод

В работе [2] для решения вариационного неравенства

$$\langle Pu, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\, v \in K \tag{22}$$

был рассмотрен следующий итерационный процесс, позволяющий свести (22) к вариационному неравенству с оператором двойственности вместо исходного псевдомонотонного оператора, решение которого можно проводить известными методами (см., например, [12–16]).

Пусть $u^{(0)}$ – произвольный элемент из K. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, зная $u^{(n)}$, определим $u^{(n+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\left\langle J(u^{(n+1)} - u^{(n)}),\, v - u^{(n+1)}\right\rangle \geq \tau\, \left\langle f - Pu^{(n)},\, v - u^{(n+1)}\right\rangle \quad \forall\, v \in K, \tag{23}$$

где $\tau > 0$ – итерационный параметр, $J : V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Φ (см. [3, с. 185]:

$$\langle Jv,\, v\rangle = \|Jv\|_{V^*}\, \|v\|, \quad \|Jv\|_{V^*} = \Phi(\|v\|) \quad \forall\, v \in V.$$

При этом справедливы

Теорема 2. *Пусть K – непустое, замкнутое, выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства V, оператор $P : V \to V^*$ является псевдомонотонным, коэрцитивным, ограниченно липшиц-непрерывным с функциями μ*

и Φ *и потенциальным, причем*

$$F(u+v) - F(u) = \int\limits_0^1 \langle P(u+tv),\, v\rangle\; dt \quad \forall\, u,\, v \in V, \tag{24}$$

где

$$F(u) = \int\limits_0^1 \langle P(tu),\, u\rangle\; dt.$$

Пусть, далее, выполнено условие

$$0 < \tau < \min\{1, 1/\mu_0\}, \quad \mu_0 = \mu(R_0 + \Phi^{-1}(R_1)), \tag{25}$$

где

$$R_0 = \sup_{u\in S_0} \|u\|, \quad R_1 = \sup_{u\in S_0} \|Pu - f\|_{V^*}, \quad S_0 = \{u \in K : F(u) \le F(u^{(0)})\}.$$

Тогда итерационная последовательность $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (23), *ограничена в* V, *и все ее слабо предельные точки являются решениями вариационного неравенства* (22).

Теорема 3. *Пусть* K – *непустое, замкнутое, выпуклое подмножество гильбертова пространства* V, *оператор* $P : V \to V^*$ *является обратно сильно монотонным с постоянной* d, *коэрцитивным и потенциальным, причем справедливо соотношение* (24). *Пусть, далее, выполнено условие*

$$0 < \tau < 2/d. \tag{26}$$

Тогда вся итерационная последовательность $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (23), *сходится слабо к некоторому решению задачи* (22).

Элемент $u^{(n+1)}$ из (23) однозначно определяется по $u^{(n)}$. Действительно, оператор двойственности является деминепрерывным, строго монотонным и коэрцитивным [3], множество K – выпуклым и замкнутым, а значит, вариационное неравенство (23) имеет единственное решение (см. [17, с. 44]).

Для задачи об определении положения равновесия мягкой сетчатой оболочки вращения (1) итерационный процесс (23) приобретает следующий вид.

Пусть $u^{(0)}$ – произвольный элемент из K. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, зная $u^{(n)}$, определим $u^{(n+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\begin{aligned} &\left\langle J(u^{(n+1)} - u^{(n)}),\, v - u^{(n+1)} \right\rangle \ \ge \\ &\qquad \ge\ \tau \left\langle f - (A + D + q_0(B+H))u^{(n)},\, v - u^{(n+1)} \right\rangle \quad \forall\, v \in K. \end{aligned} \tag{27}$$

Установим теперь, что для задачи об определении положения равновесия мягкой сетчатой оболочки вращения (1) выполняются достаточные условия сходимости метода (23).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (3)–(5), (11), *а также условие* (25) *с функциями* $\Phi(\xi) = \xi$, $\mu(\xi) = \mu_A(\xi) + \mu_D(\xi) + \mu_H(\xi) + c_{11}$ *и константой*

$$R_1 = \sup_{u\in S_0} \|(A + D + q_0(B+H))u - f\|_{V^*}.$$

Тогда при $p > 3$ *итерационная последовательность* $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (27), *ограничена в* V *и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи* (1). *Если же* $p = 3$, *то утверждение теоремы справедливо при дополнительном условии* $|q_0| < q_1 = k_0/c_2$.

Доказательство. Обозначим

$$P = A + D + q_0(B + H), \quad P : V \to V^*. \tag{28}$$

Из лемм 1–4 вытекает, что оператор P является псевдомонотонным. Из лемм 5, 6, 9, 12–14 следует, что P – потенциальный и ограниченно липшиц-непрерывный оператор. Из определения операторов B и H имеем

$$|\langle Bu, u\rangle| \le c_1\,[\|u\| + 1]\,\|u\|, \quad |\langle Hu, u\rangle| \le c_2\,\|u\|^2\,[\|u\| + 1] \quad \forall\, u \in V.$$

Тогда в силу леммы 3 из неравенства (6) имеем, что для всех $u \in V$

$$\begin{aligned}\langle Pu, u\rangle &\ge k_0\|u\|^p - c_3\|u\|^{p-1} - c_4 - c_1|q_0|\,[\|u\| + 1]\,\|u\| - c_2|q_0|\,\|u\|^2\,[\|u\| + 1] = \\ &= \left[k_0\|u\|^{p-3} - c_2|q_0|\right]\|u\|^3 - c_3\|u\|^{p-1} - c_2|q_0|\,\|u\|^2 - c_1|q_0|\,\|u\| - (c_4 + c_1|q_0|),\end{aligned}$$

откуда следует, что оператор P является коэрцитивным.

Таким образом, выполнены все условия все теоремы 2. □

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (3)–(5), (11), (18). *Пусть, далее, выполнены условия* $q_0 \equiv 0$ *и* (25) *с функциями* $\Phi(\xi) = \xi$, $\mu(\xi) = c_6 + \mu_D(\xi)$ *и константой* $R_1 = \sup\limits_{u \in S_0} \|(A + D)u - f\|_{V^*}$. *Тогда при* $1 < p < 2$ *итерационная последовательность* $\left\{u^{(n)}\right\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (27), *ограничена в* V *и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи* (1).

Доказательство. Справедливость данного утверждения непосредственно следует из теоремы 4, леммы 8 и леммы 10.

Отдельно рассмотрим задачу (1), когда $q_0 = 0$, $p = 2$. В этом случае пространство V является гильбертовым и справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (3)–(5), (11), (19), *а также*

$$0 < \tau < 2/(c_5 + c_{11}).$$

Тогда вся итерационная последовательность $\left\{u^{(n)}\right\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (27), *сходится слабо к некоторому решению задачи* (1).

Доказательство. Справедливость данного утверждения вытекает из теоремы 3, леммы 6 с $p = 2$ и леммы 11.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31515, 13-01-00908).

Summary

I.B. Badriev, V.V. Banderov. Iterative Methods for Solving Variational Inequalities of the Theory of Soft Shells.

In this paper we study the convergence of iterative methods for solving variational inequalities with monotone-type operators in Banach spaces. Such inequalities arise in the description of the deformation processes of soft network rotational shells. We establish the properties of these operators, i.e. coercivity, potentiality, bounded Lipschitz continuity, and pseudomonotonicity or inverse strong monotonicity. For solving these variational inequalities, we consider an iterative method, investigate its convergence, prove the boundedness of the iterative sequence, and establish that each its weakly convergent subsequence has as a limit the solution of the original variational inequality.

Keywords: variational inequality, pseudo-monotone operator, potential operator, iterative method, soft network shell.

Литература

1. *Абдюшева Г.Р., Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А., Тагиров Р.Р.* Математическое моделирование задачи о равновесии мягкой биологической оболочки. I. Обобщенная постановка // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 4. – С. 57–73.
2. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Саддек А.М.* Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 7. – С. 891–898.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
5. *Tseng P.* Further applications of a splitting algorithm to decomposition in variational inequalities and convex programming // Math. Program. – 1990. – V. 48, No 1–3. – P. 249–263.
6. *Zhu D., Marcotte P.* New classes of generalized monotonicity // J. Optimaz. Theory App. – 1995. – V. 87, No 2. – P. 457–471.
7. *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.* Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
8. *Вайнберг М.М., Лаврентьев И.М.* Нелинейные квазипотенциальные операторы // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 205, № 5. – С. 1022–1024.
9. *Глушенков В.Д.* Об одном уравнении нелинейной теории фильтрации // Прикладная математика в научно-технических задачах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – С. 12–21.
10. *Ляшко А.Д., Карчевский М.М.* О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С. 73–81.
11. *Бадриев И.Б., Карчевский М.М.* О сходимости итерационного процесса в банаховом пространстве // Исслед. по прикл. матем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – Вып. 17. – С. 3–15.
12. *Гловински Р.Г., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.
13. *Fortin M., Glowinski R.* Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems. – Amsterdam: North-Holland, 1983. – 340 p.
14. *Gabay D., Mercier B.* A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation // Comput. Math. Appl. – 1976. – V. 2, No 1. – P. 17–40.
15. *Lions P.L., Mercier B.* Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16, No 6. – P. 964–979.

16. *Fortin M., Glowinski R.* Méthodes de lagrangien augmenté: applications à la résolution numérique de problèmes aux limites. – Paris: Dunod, 1982. – 336 p.

17. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.

Поступила в редакцию
15.04.13

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Ildar.Badriev@kpfu.ru*

Бандеров Виктор Викторович – кандидат физико-математических наук, заместитель директора Института вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Victor.Banderov@kpfu.ru*