УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2018, Т. 160, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 7–16 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 535.14

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ, СВЯЗАННЫХ ДРУГ С ДРУГОМ НА ЗЕРКАЛЕ

А.М. Башаров

НИЦ «Курчатовский институт», г. Москва, 123182, Россия

Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный , 141701, Россия

Аннотация

Сформулированы стохастические дифференциальные уравнения и на их основе выведены кинетические уравнения для фотонов микрорезонатора в случае накачки классическим или квантованным сжатыми полями. Показано, что оператор связи полей на зеркале микрорезонатора выводится из оператора нерезонансного взаимодействия полей с квантовой частицей методами алгебраической теории возмущений, при этом возможен учет различных интерференционных процессов.

Ключевые слова: марковское приближение, квантовое стохастическое дифференциальное уравнение, кинетическое уравнение, нерезонансное взаимодействие

Введение

Многие задачи оптической спектроскопии и квантовой оптики описывают процессы со случайными воздействиями окружающей среды на исследуемую систему. В качестве исследуемой системы обычно рассматривают атомы или молекулы, тогда описание их динамики в марковском приближении дается на основе кинетического уравнения в форме Линдблада [1–3]. Эти уравнения легко получаются, если оператор эволюции всей системы и ее окружения представлять стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ). Заметим, что если марковское приближение формулировать сразу непосредственно в уравнении эволюции, то иного и быть не может, поскольку тогда уравнения эволюции представляют собой уравнения типа Ланжевена и их математический статус строго определяется переходом к СДУ. Другой путь состоит в переходе от уравнения с оператором эволюции к кинетическому уравнению для матрицы плотности, методов, реализующих такой переход, много (см., например, [4, 5]). Существуют также методы, позволяющие анализировать формальное интегральное представление оператора эволюции, использующее полугрупповое свойство оператора эволюции, и представления его в виде произведения большого числа сомножителей-операторов эволюции на малых подинтервалах разбиения исходного временного промежутка эволюции [6]. Здесь к марковскому приближению, как и в других методах, прибегают на различных этапах вычислений. Однако если при этом ввести квантовые случайные процессы, то их алгебра позволяет легко просуммировать формальный ряд интегрального представления и получить СДУ как обычного винеровского типа, так и обобщенного невинеровского типа [3].

Если в качестве исследуемой системы рассматривать электромагнитное поле в одномодовом резонаторе, то одним из механизмов воздействия окружающей среды на микрорезонатор является связь внешних полей с полем резонатора на зеркале резонатора, при этом говорят о накачке резонатора. Но можно говорить и о взаимодействии электромагнитных полей на границе раздела различных пространств. В настоящей работе показано, как в случае одномодового резонатора, такое взаимодействие описывается СДУ, причем вывод СДУ представлен в одной и той же форме и для классического, и для квантового случайных полей с учетом сжатия полей. Показаны отличия классической и квантовой накачек и области, в которых квантовую накачку можно моделировать классической. Рассмотрено нерезонансное взаимодействие одномодового и широкополосного полей с квантовой частицей и показано, что последовательное применение алгебраической теории возмущений позволяет рассматривать связь полей на зеркале микрорезонатора как интерференцию нерезонансного взаимодействия полей с квантовой частицей. Это, в свою очередь, указывает на необходимость перенормировки параметров резонатора и дает технику написания слагаемых эффективного гамильтониана, описывающих в подобных задачах различные возможные интерференционные процессы, в том числе и определяющие новые каналы релаксации.

1. СДУ для накачки микрорезонатора

Пусть имеется одномодовый микрорезонатор, на зеркало которого подается классическое электромагнитное поле напряженности $E = \mathcal{E}(t)\exp(-i\nu t) + C.c.$, ν – несущая частота, $\mathcal{E}(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда. Традиционно вся система описывается гамильтонианом в картине Дирака (представление взаимодействия):

$$H^{\text{Mirror}}(t) = \kappa\mathcal{E}(t)\exp(-i\nu t)c^{+}\exp(i\omega_c t) + H.c.$$

где c^+ и c – операторы рождения и уничтожения фотона микрорезонатора частоты ω_c, $[c, c^+] = 1$, κ – константа связи полей. Буквами $H.c.$ и $C.c.$ обозначены слагаемые, эрмитово и комплексно сопряженные к предыдущему слагаемому.

Гамильтониан $H^{\text{Mirror}}(t)$ имеет стандартную простую интерпретацию: фотон из классического поля уничтожается, рождая фотон микрорезонатора, и обратно. Таким образом, идет накачка микрорезонатора.

Уравнением, подлежащим анализу, является уравнение Шредингера для оператора эволюции $U(t)$ или для волнового вектора $|\Psi(t)\rangle$ в картине Дирака (считаем все величины безразмерными)

$$\frac{dU(t)}{dt} = -iH^{\text{Mirror}}(t)U(t), \quad U(0) = 1, \quad |\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle. \tag{1}$$

Пусть теперь классическое поле – случайное. Для различных случаев естественным требованием, накладываемым на $\mathcal{E}(t)$, является стационарность этой величины, то есть зависимость коррелятора $\langle\mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t')\rangle$ только от разности времен $t - t'$.

Если разложить $\mathcal{E}(t)$ в интеграл Фурье, то стационарность воздействия влечет за собой некоррелированность (независимость) спектральных компонент, то есть

$$\langle b(\omega)b^*(\omega')\rangle = \delta(\omega - \omega')S(\omega), \quad b(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \exp(i\omega t)\mathcal{E}(t)\,dt,$$

где $S(t)$ – спектр мощности случайного воздействия, $b(\omega)$ – фурье-компоненты.

Если принять естественное приближение $S(\omega) = \text{const}$ для определенного спектрального диапазона и распространить его на всю область спектра (приближение Найквиста), то нетрудно заметить, что в соответствующей нормировке

$\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t')\rangle = n\delta(t-t')$. Тогда величина $\int\limits_0^t \mathcal{E}(t')\,dt' = W_1(t) + e^{i\varphi_0}W_2(t)$, представленная через действительную и мнимую части, непрерывна, но нигде не дифференцируема (φ_0 – постоянная фаза). Разными способами можно показать, что плотность функции распределения вероятности $\rho(w_j,t)$ величин W_j удовлетворяет кинетическому уравнению (уравнению Фоккера–Планка)

$$\frac{\partial\rho(w_j,t)}{\partial t} = \frac{D_j}{2}\,\frac{\partial^2\rho(w_j,t)}{\partial w_j^2},$$

решение которого есть

$$\rho(w_j,t|w_{0j},t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)D_j}}\exp\left(-\frac{(w_j-w_{0j})^2}{2D_j(t-t_0)}\right)$$

с начальным условием $\rho(w_j,t_0|w_{0j},t_0) = \delta(w_j-w_{0j})$. Величину $W(t)$ называют (нестандартным) комплексным винеровским процессом.

Таким образом, уравнение (1) оказывается математически неопределенным в приближении Найквиста. Но можно строго определить его интегральный вариант

$$U(t) - U(t_0) = \overleftarrow{T}\exp\left[-i\kappa(c^+(W(t)-W(t_0)) + H.c.)\right] \tag{2}$$

при разумном определении интеграла общего вида по винеровскому процессу $\int G(t')dW(t')$.

Если обычным образом определить интеграл $\int G(t')\,dW(t')$ как предел частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} G(\tau_k)(W(t_k) - W(t_{k-1}))$, то результат будет зависеть от конкретного выбора промежуточных точек $t_{k-1}\le\tau_k\le t_k$ на интервалах разбиения. В этом нетрудно убедиться на примере интеграла $\int W_j(t')\,dW_j(t')$, если использовать свойства винеровского процесса $W(t)$ – статистическую независимость его приращений $W(t_k) - W(t_{k-1})$ друг от друга и от $W(t_{k-1})$. Для так называемых неупреждающих функций $G(t)$, статистически независимых в момент времени t от будущего поведения винеровского процесса, удобен и самосогласован выбор Ито $\tau_k = t_{k-1}$, при этом предел интегральных сумм понимается как среднеквадратичный предел. Тогда можно ввести согласованные дифференциалы Ито

$$\begin{aligned}
&dW(t)dW^*(t) = (D_1+D_2)dt \equiv ndt,\\
&dW(t)dW^*(t) = (D_1+\exp 2i\varphi_0 D_2)dt \equiv mdt,\\
&dW(t)dt = dtdt = 0, \quad |m|\le n, \quad \langle dW(t)\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь дифференциальные соотношения следует понимать как выполнение интегральных равенств типа (для любых неупреждающих функций $G(t')$):

$$\int\limits_{t_0}^{t} G(t')\,dW(t')\,dW(t') = n\int\limits_{t_0}^{t} G(t')\,dt'.$$

Через интегральное уравнение (2) определяется СДУ и его решение. Для современной математики характерно сначала определить интеграл по мере, потом производные.

Вывод СДУ для оператора эволюции состоит в определении дифференциала Ито

$$dU(t) = U(t+dt) - U(t) = (\exp(-i\kappa(c^+ dW(t) + c dW^*(t))) - 1)U(t) =$$
$$= (-i\kappa c^+ dW(t) - i\kappa c dW^*(t))U(t) - \frac{\kappa^2 dt}{2}((cc^+ + c^+ c)n + c^2 m^* + c^{+2} m)U(t). \quad (4)$$

При выводе использована алгебра (3). В уравнении (4) отсутствует какая-либо отстройка, поскольку в предположении широкополосности спектра внешнего электрического поля его центральная частота будет всегда в резонансе.

Уравнение (4) представляет собой классическое СДУ винеровского типа.

Кинетическое уравнение для матрицы плотности получается обычным образом:

$$d\rho(t) \equiv \rho(t+dt) - \rho(t), \quad \rho(t+dt) = |\Psi(t+dt)\rangle\langle\Psi(t+dt)|,$$
$$d\rho(t) = dU(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|U^+(t) + U(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^+(t) + \quad (5)$$
$$dU(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|dU^+(t).$$

В результате простых вычислений, после усреднения $dW(t)$ получаем кинетическое уравнение для матрицы плотности $\rho(t)$, описывающей фотоны в микрорезонаторе. Форма этого уравнения имеет обобщенную форму Линдблада:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{\kappa^2}{2}(n(2c\rho(t)c^+ - c^+ c\rho(t) - \rho(t)c^+ c) + m(2c^+\rho(t)c^+ - c^{+2}\rho(t) - \rho(t)c^{+2})) +$$
$$+ \frac{\kappa^2}{2}(n(2c^+\rho(t)c - cc^+\rho(t) - \rho(t)cc^+) + m^*(2c\rho(t)c - c^2\rho(t) - \rho(t)c^2)). \quad (6)$$

По аналогии с классическим винеровским процессом $W(t)$ введем квантовый «винеровский» процесс $B(t)$.

Пусть на зеркало подается квантованное электромагнитное поле напряженности $E(t) = \int \Gamma(\omega) b_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega + H.c.$ Состоянием поляризации пренебрегаем и стандартным образом осуществляем переход в суммировании от волнового вектора к частоте [2]. Коммутационные соотношения имеют вид $[b_\omega, b^+_{\omega'}] = \delta(\omega - \omega')$, $[b_\omega, b_c] = [b_\omega, b^+_c] = 0$.

Обычно взаимодействие на зеркале рассматривается сразу в резонансном и марковском приближениях

$$H^{\mathrm{QMirror}}(t) = \kappa \int b_\omega c^+ \exp(-i(\omega - \omega_c)t)\, d\omega + H.c. \quad (7)$$

Введем квантовые рождающий $B^+(t)$ и уничтожающий $B(t)$ процессы

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int b_\omega \exp(-i(\omega - \omega_c)t)\, d\omega,$$
$$B(t) = \int_0^t b(t')\, dt', \quad dB(t) = B(t+dt) - B(t), \quad (8)$$

аналогичные тем, которые предшествовали введению классического винеровского процесса:

$$\mathcal{E}(t) = \int b(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega, \quad W(t) = \int_0^t \mathcal{E}(t')\, dt', \quad dW(t) = W(t+dt) - W(t).$$

Интеграл в смысле Ито аналогичен классическому, то есть

$$\int f(t)\,dB(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(t_{k-1})(B(t_k)-B(t_{k-1})).$$

Алгебра Ито операторов $dB(t)$ и $dB^+(t)$ дается соотношениями

$$\begin{aligned} &dB(t)dB^+(t) = (n+1)dt, \quad dB^+(t)dB(t) = ndt, \quad B(t)dB(t) = mdt,\\ &dB^+(t)dt = dB(t)dt = dtdt = 0, \quad \langle dB(t)\rangle = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Важным отличием от классического случая является условие $|m| \leq \sqrt{n(n+1)}$. Алгебру (9) принято также называть алгеброй Гардинера – Коллет [1].

Квантовое СДУ для дифференциала Ито $dU(t)$ следует из формального решения $U(t) = \overleftarrow{T}\exp\left(-i\int H^{\text{QMirror}}(t')\,dt'\right)$. Тогда

$$dU(t) = -i\kappa(c^+dB(t)+cdB^+(t)) - \frac{\kappa^2 dt}{2}(c^+c(n+1)+cc^+n+c^2m+c^{+2}m^*)U(t). \tag{10}$$

При этом нетрудно убедиться, что выполнено правило дифференцирования Ито (как и в классическом случае)

$$d(U(t)U^+(t)) = (dU(t))U^+(t) + U(t)dU^+(t) + (dU(t))(dU^+(t)).$$

Кинетическое уравнение для матрицы плотности получается в результате цепочки преобразований (5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = {} & \frac{\kappa^2}{2}((n+1)(2c\rho(t)c^+ - c^+c\rho(t) - \rho(t)c^+c) + m(2c^+\rho(t)c^+ - c^{+2}\rho(t) - \rho(t)c^{+2})) + \\ & + \frac{\kappa^2}{2}(n(2c^+\rho(t)c - cc^+\rho(t) - \rho(t)cc^+) + m^*(2c\rho(t)c - c^2\rho(t) - \rho(t)c^2)). \end{aligned} \tag{11}$$

Сравнение случаев накачки классическим шумовым (4), (6) и квантовым (10), (11) полями показывает, что различие возникает только в двух случаях:

1) в случае малого числа фотонов квантованного поля;

2) в случае большого числа фотонов и максимального сжатия $|m| = \sqrt{n(n+1)}$.

Для классического поля второй случай вообще невозможен – чисто формально он приводит к отрицательности диагональных элементов матрицы плотности, чего быть не должно. Однако с точки зрения моделирования процессов динамики фотонов вдали от областей значения параметров, отвечающих максимальному сжатию и большому числу фотонов, разницы практически нет, так что в этом случае удобно моделировать воздействие квантованного шума классическим винеровским процессом.

2. Модель взаимодействия полей при нерезонансном воздействии на атом

Пусть теперь квантованное широкополосное электромагнитное поле и фотоны одномодового поля нерезонансно взаимодействуют с атомами, локализованными в области пространства с размерами, много меньшими длины волны. Атомы заселяют только нижний энергетический уровень. Исходный оператор взаимодействия в картине Дирака есть оператор электродипольного взаимодействия, который складывается из оператора взаимодействия $H_{A-c}(t)$ атомов с локализованной модой и оператора $H_{A-F}(t)$ взаимодействия атомов с широкополосным полем:

$$H_{A-c}(t) = g_c(c^+ e^{i\omega_c t} + c e^{-i\omega_c t}) \sum_{i,jk} d_{kj} e^{i\Omega_{kj} t} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \quad \Omega_{kj} = E_k - E_j,$$

$$H_{A-F}(t) = \int d\omega \Gamma(\omega) \big(b_\omega e^{-i\omega t} + b_\omega^+ e^{i\omega t}\big) \sum_{i,jk} d_{kj} e^{i\Omega_{kj} t} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}.$$

Собственные вектора i-го атома удовлетворяют обычным условиям

$$\sum_k |E_k\rangle^{(i)} \langle E_k|^{(i)} = 1^{(i)}, \quad \langle E_k|^{(i)} E_j\rangle^{(i)} = \delta_{kj},$$

где квантовые невырожденные состояния $|E_k\rangle^{(i)}$ энергии E_k характеризуют i-й атом; через d_{kj} обозначены матричные элементы оператора дипольного момента атома. Верхний индекс у векторов состояний отмечает пространство состояний i-го атома, а суммирование по i выполняется по всем атомам обсуждаемого ансамбля.

Следуя унитарной симметрии квантовой теории, совершим унитарное преобразование исходной полной волновой функции [7]

$$|\widetilde{\Psi}(t)\rangle = \exp\left(-iQ(t)\right)|\Psi(t)\rangle, \quad Q^+(t) = Q(t).$$

Уравнение Шредингера для преобразованной волновой функции открытой системы и окружения

$$i\frac{d|\widetilde{\Psi}(t)\rangle}{dt} = \widetilde{H}(t)|\widetilde{\Psi}(t)\rangle$$

определяется преобразованным гамильтонианом

$$\widetilde{H}(t) = \exp(-iQ(t))(H_{A-c}(t) + H_{A-F}(t))\exp(iQ(t)) - i\exp(-iQ(t))\frac{d}{dt}\exp(iQ(t)).$$

Далее в соответствии с понятием открытой квантовой системы оператор $Q(t)$ и преобразованный гамильтониан $\widetilde{H}(t)$ разлагаются в ряды теории возмущений по константам взаимодействия подсистем открытой квантовой системы с внешними полями и между собой, порядок слагаемых которых отмечается верхними индексами [8]. Для определенности считаем, что первый (левый) индекс в группе верхних индексов слагаемых указывает на порядок по параметру связи атомов с широкополосным полем окружения, второй – на порядок по параметру связи атома с резонаторной модой:

$$\begin{aligned} &Q(t) = Q^{(0,1)} + Q^{(1,0)} + \cdots, \\ &\widetilde{H}(t) = \widetilde{H}^{(0,1)}(t) + \widetilde{H}^{(1,0)}(t) + \widetilde{H}^{(1,1)}(t) + \widetilde{H}^{(2,0)}(t) + \cdots. \end{aligned} \tag{12}$$

Критерий [7, 8] отличается от известных, но формально приводит к тому же виду слагаемых первого порядка по константе связи с окружением. Будем считать, что в слагаемых (12) отсутствуют быстропеременные временные множители, или, что то же самое, все слагаемые (12) медленно меняются во времени. В случае широкополосного квантованного (или классического) поля в широкополосном поле всегда найдутся частоты, которые будут резонансными некоторым атомным переходам с нижнего энергетического уровня на возбужденные. Если в квантованном широкополосном поле плотность числа фотонов нулевая, то это не приведет к реальным переходам в атоме. Но такие переходы разбивают широкополосное поле на совокупность независимых шумовых источников. Чтобы не включать в рассмотрение побочные процессы, будем рассматривать только один из шумовых источников и в дальнейшем о нем будем говорить как о широкополосном электромагнитном поле. Этот источник будет нерезонансен всем атомным переходам, но, чтобы он проявился в задаче нерезонансного взаимодействия, его центральная частота должна совпадать с частотой локализованной фотонной моды. Требование отсутствия быстропеременных временных множителей приводит к уравнениям

$$\widetilde{H}^{(1,0)}(t) = \widetilde{H}^{(0,1)} = 0,$$

$$Q^{(0,1)}(t) = i\sum_{i,kj} d_{kj}|E_k\rangle^{(i)}\langle E_j|^{(i)}\Big(c^+\frac{e^{i(\Omega_{kj}+\omega_c)t}}{\Omega_{kj}+\omega_c} + c\frac{e^{-i(\Omega_{kj}-\omega_c)t}}{\Omega_{kj}-\omega_c}\Big),$$

$$Q^{(1,0)}(t) = i\int d\omega\,\Gamma(\omega)\sum_{i,kj}{}' d_{kj}|E_k\rangle^{(i)}\langle E_j|^{(i)}\Big(b_\omega^+\frac{e^{i(\Omega_{kj}+\omega)t}}{\Omega_{kj}+\omega} + b_\omega\frac{e^{-i(\Omega_{kj}-\omega)t}}{\Omega_{kj}-\omega}\Big),$$

где знак штрих у суммы по атомным энергетическим уровням означает отсутствие слагаемых с резонансными знаменателями с $\Omega_{kj}\pm\omega\approx 0$.

По формулам

$$\widetilde{H}^{(2,0)}(t) = -\frac{i}{2}[Q^{(1,0)}(t), H_{A-F}(t)]' - \frac{i}{2}[Q^{(1,0)}(t), \widetilde{H}^{(1,0)}(t)]',$$

$$\widetilde{H}^{(0,2)}(t) = -\frac{i}{2}[Q^{(0,1)}(t), H_{A-c}(t)]' - \frac{i}{2}[Q^{(0,1)}(t), \widetilde{H}^{(0,1)}(t)]',$$

$$\widetilde{H}^{(1,1)}(t) = -\frac{i}{2}[Q^{(1,0)}(t), H_{A-c}(t)]' - \frac{i}{2}[Q^{(0,1)}(t), H_{A-F}(t)]' - \\ - \frac{i}{2}[Q^{(1,0)}(t), \widetilde{H}^{(0,1)}(t)]' - \frac{i}{2}[Q^{(0,1)}(t), \widetilde{H}^{(1,0)}(t)]',$$

где штрих отмечает отсутствие быстро меняющихся во времени слагаемых, нетрудно найти слагаемые эффективного гамильтониана второго порядка по константам взаимодействия с электромагнитными полями. Именно требование медленного изменения во времени слагаемых $\widetilde{H}^{(2,0)}(t)$ и $\widetilde{H}^{(1,1)}(t)$ выделяет из спектра широкополосного электромагнитного поля учтенный независимый шумовой источник с центральной частотой ω_c. В отсутствие каких-либо комбинационных резонансов полученные формулы содержат поправки лэмбовского типа к частотам атомных переходов и к частоте локализованной фотонной моды, а также следующий оператор ($\Pi_k(\omega)$ – параметр теории [3, 7])

$$\widetilde{H}^{(1,1)}(t) = \int d\omega\,\Gamma(\omega) g_c b_\omega c^+ e^{-i(\omega-\omega_c)t}\sum_k \Pi_k(\omega_c)\sum_i |E_k\rangle^{(i)}\langle E_k|^{(i)} + H.c..$$

Если в полученном выражении сделать марковское приближение, то есть потребовать выполнения нижеприведенных условий, то получим уравнения (10), (11), в которых коэффициент связи полей будет выражен через параметры нерезонансных атомов среды зеркала. Марковские условия для уравнения эволюции с оператором $\widetilde{H}^{(1,1)}(t)\equiv H^{\text{Nonresonant}}$ имеют вид

$$\Gamma(\omega) = \text{const}, \quad \langle b_\omega b^+_{\omega'}\rangle = (n+1)\delta(\omega-\omega'),$$

$$\langle b^+_{\omega'} b_\omega\rangle = n\delta(\omega-\omega'), \quad \langle b_\omega b_{\omega'}\rangle = m\delta(2\omega_c-\omega-\omega').$$

Заключение

Оператор связи полей на зеркале обычно записывается сразу в резонансном и марковском приближениях. Представленный нами подход позволяет рассмотреть оператор связи на зеркале без подобных приближений. Тогда при помощи алгебраической теории возмущений определяются различные интерференционные слагаемые, описанные в работах [7, 8], в том числе и поправки к сдвигам частот. В настоящей статье было показано, что именно таким интерференционным слагаемым в случае нерезонансного взаимодействия с атомным ансамблем и является общепринятая связь полей на зеркале.

Полученные результаты необходимы для формулировки теории для описания динамики пространственно распределенных систем, теория которых на основе СДУ невинеровского типа строго сформулирована ранее лишь в случае, когда открытая система локализована в области пространства с размерами, много меньшими длины волны [3, 7]. Если заменить операторы рождения и уничтожения фотонов одномодового поля на операторы рождения и уничтожения второго квантованного широкополосного поля или компоненты Фурье классического случайного поля (с учетом аналогий разд. 1), то получим взаимосвязь широкополосных полей. Модели, в которых одно из таких полей представляет собой классический белый шум, а другое поле – квантовый шум, нам неизвестны. Некоторые построения обобщенной алгебры для случая двух различных широкополосных квантованных полей с нулевой плотностью фотонов рассмотрены в [9].

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору В.В. Самарцеву за проявленный интерес и внимание к настоящей работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-02-00453а).

Литература

1. *Gardiner C.W., Collet M.J.* Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation // Phys. Rev. A. – 1985. – V. 31, No 6. – P. 3761–3774. – doi: 10.1103/PhysRevA.31.3761.
2. *Gardiner C.W., Zoller P.* Quantum noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 438 p.
3. *Basharov A.M.* Stark interaction of identical particles with the vacuum electromagnetic field as quantum Poisson process suppressing collective spontaneous emission // Phys. Rev. A. – 2011. – V. 84, No 1. – Art. 013801, P. 013801-1–013801-14. – doi: 10.1103/PhysRevA.84.013801.
4. *Bonitz M.* Quantum Kinetic Theory. – Stuttgart: B.G.Teubner, 1989.
5. *Кузнецов Д.В., Рерих Вл.К., Гладуш М.Г.* Локальное поле и скорость радиационной релаксации в диэлектрической среде // Журн. эксперим. и теор. физики. – 2011. – Т. 140, Вып. 4. – С. 742–754.
6. *Pichler H., Zoller P.* Photonic circuits with time delays and quantum feedback // Phys. Rev. Lett. – 2016. – V. 116, No 9. – Art. 093601, P. 093601-1–093601-6. – doi: 10.1103/PhysRevLett.116.093601.
7. *Maimistov A.I., Basharov A.M.* Nonlinear optical waves. – Netherlands: Springer, 1999.– XIV, 656 p. – doi: 10.1007/978-94-017-2448-7.

8. *Башаров А.М.* Квантовая теория открытых систем на основе стохастических дифференциальных уравнений обобщенного ланжевеновского (невинеровского) типа // Журн. эксперим. и теор. физики. – 2012. – Т. 142, Вып. 3 – С. 419–441.

9. *Башаров А.М.* Теория открытых систем на основе стохастических дифференциальных уравнений // Оптика и спектроскопия. – 2014. – Т. 116, № 4. – С. 532–540. – doi: 10.7868/S0030403414040059.

Поступила в редакцию
04.12.17

Башаров Асхат Масхудович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; доцент кафедры математики и математических методов физики

НИЦ «Курчатовский институт»
пл. Академика Курчатова, д. 1, г. Москва, 123182, Россия
Московский физико-технический институт
Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, 141701, Россия
E-mail: *basharov@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 1, pp. 7–16

A Stochastic Model for the Dynamics of Electromagnetic Waves Connected to Each Other on the Mirror

A.M. Basharov

[a] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*
[b] *Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125040 Russia*
E-mail: *basharov@gmail.com*

Received December 4, 2017

Abstract

The paper develops stochastic differential equations serving as the basis for derivation of master equations for microcavity photons pumped with either classic or quantized contracted fields. The interaction operator on the microcavity mirror is derived from the non-resonant field operator interacting with the quantum particle by means of the algebraic perturbation theory, with allowance for various interference processes.

Keywords: Markovian approximation, quantum stochastic differential equation, master equation, nonresonant interaction

Acknowledgments. We thank Professor V.V. Samartsev for his interest in and support for this research.

The study was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-02-00453a).

References

1. Gardiner C.W., Collet M.J.Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation. *Phys. Rev. A.*, 1985, vol. 31, no. 6, pp. 3761–3774. doi: 10.1103/PhysRevA.31.3761.

2. Gardiner C.W., Zoller P. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Berlin, Springer-Verlag, 2000. 438 p.

3. Basharov A.M. Stark interaction of identical particles with the vacuum electromagnetic field as quantum Poisson process suppressing collective spontaneous emission. *Phys. Rev. A.*, 2011, vol. 84, no. 1, art. 013801, pp. 013801-1–013801-14. doi: 10.1103/PhysRevA.84.013801.

4. Bonitz M. *Quantum Kinetic Theory*. Stuttgart, B.G.Teubner, 1989.

5. Kuznetsov D.V., Roerich Vl.K., Gladush M.G. Local field and radiative relaxation rate in a dielectric medium. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2011, vol. 113, no. 4, pp. 647-658. doi: 10.1134/S1063776111100050.

6. Pichler H., Zoller P. Photonic circuits with time delays and quantum feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, vol. 116, no. 9, art. 093601, pp. 093601-1–093601-6. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.093601.

7. Maimistov A.I., Basharov A.M. *Nonlinear Optical Waves*. Netherlands, Springer, 1999. XIV, 656 p. doi: 10.1007/978-94-017-2448-7.

8. Basharov A.M. Quantum theory of open systems based on stochastic differential equations of generalized Langevin (non-Wiener) type. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2012, vol. 115, no. 3, pp. 371–391. doi: 10.1134/S1063776112070035.

9. Basharov A.M. A theory of open systems based on stochastic differential equations. *Opt. Spectrosc.*, 2014, vol. 116, no. 4, pp. 495–503. doi: 10.1134/S0030400X14040055.

⟨ ***Для цитирования*:** *Башаров А.М.* Стохастическая модель динамики электромагнитных полей, связанных друг с другом на зеркале // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 1. – С. 7–16. ⟩

⟨ ***For citation*:** Basharov A.M. A stochastic model for the dynamics of electromagnetic waves connected to each other on the mirror. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 160, no. 1, pp. 7–16. (In Russian) ⟩