Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность : 010100.65 – Математика

Специализация: Алгебра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

Конечномерные полумодули над полуполем ($\mathbb{R}_+$, max, $\cdot$)

Работа завершена:
«___»____________2015 г. ___________М.А. Низамова

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
Кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедры алгебры и математической логики
«___»____________2015 г. _______________С.Н. Ильин

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук,
профессор
«___»____________2015 г. ___________М.М. Арсланов

Казань – 2015 г.

Оглавление

Введение

Как известно, многие алгебраические задачи, имеющие практические приложения, часто оказываются связаны с вопросами, традиционно изучаемыми в курсе линейной алгебры, и могут быть сформулированы на языке матриц, векторных пространств и т.п. При этом элементами матриц и координатами векторов обычно являются элементы известных числовых полей – рациональных, вещественных или комплексных чисел. Однако, в современной алгебре в связи с развитием компьютерных и информационных технологий все большее значение приобретают числовые множества, операции сложения и/или умножения на которых отличны от стандартных. Один из наиболее ярких примеров — так называемая "макс-плюс-алгебра" – алгебраическая система $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\}, \max, +)$, имеющая приложения в теории игр, дискретной математике (в том числе, теории графов), теории оптимального управления и других областях (см., напр., [4]). Так, например, недавняя статья [5] посвящена проблеме нахождения собственных векторов и собственных значений матриц над макс-плюс-алгеброй.

С алгебраической точки зрения макс-плюс-алгебра является полуполем, которое изоморфно полуполю $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$; последнее же более тесно, чем макс-плюс-алгебра, связано с привычным полем вещественных чисел, поэтому изучение свойств полуполя $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$ и свободных полумодулей над ним – аналогов вещественных векторных пространств – имеет важное теоретическое и практическое значение.

В данной дипломной работе исследуется справедливость ряда утверждений классической теории линейных векторных пространств над полями применительно к свободным полумодулям над полуполем $(\mathbb{R}_+,\ \max,\ \cdot)$.

Работа содержит четыре параграфа. В первом параграфе даются основные определения и понятия, используемые в работе. Во втором параграфе изучается связь линейно зависимых систем векторов над полуполем $(\mathbb{R}_+,\ \max\ ,\cdot)$ и их знаковых портретов — векторов над двухэлементной булевой алгеброй $\mathbb{B}_2$. В третьем параграфе исследуется скалярное произведение нормированных векторов над полуполем $(\mathbb{R}_+,$ $\max\ ,\cdot)$. Четвертый параграф посвящен описанию случаев, в которых формула Грассмана справедлива для подполумодулей свободных полумодулей конечной размерности, понимая под размерностью подполумодуля а) наименьшее количество порождающих его векторов;

б) наибольшее возможное количество его линейно независимых векторов.

В конце работы приведен список использованной литературы.

1. Основные понятия и определения.

Определение 1.1. Непустое множество S с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется *полукольцом*, если выполняются следующие аксиомы:

1. $(S,+)$ — коммутативная полугруппа с нейтральными элементом 0;

2. $(S,\cdot)$ — полугруппа с нейтральными элементом 1;

3. умножение дистрибутивно относительно сложения :

$$a(b+c) = ab + ac, (a+b)c = ac + bc$$

для любых $a, b, c \in S$;

4. $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ для любого $a \in S$.

Определение 1.2. Полукольцо, каждый ненулевой элемент которого обратим, называется *полутелом* ; коммутативное полутело называется *полуполем.*

Пример 1.1. Введем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Зададим на $\mathbb{R}_+$ операцию сложения следующим образом: $a + b$=max(a, b), умножение возьмем обычное. Непосредственно проверяется, что полученная система ($\mathbb{R}_+$, max , $\cdot$) образует коммутативное полукольцо. Поскольку для любого ненулевого $a \in \mathbb{R}_+$ существует a^{-1}, то это полукольцо является полуполем.

Определение 1.3. Коммутативная полугруппа (A,+, 0) называется *правым полумодулем над полукольцом* S (или S - *полумодулем*), если задано умножение справа элементов $a \in A$ на элементы $s \in S$, обозначаемое as, и при этом для любых $a, b \in A$, $s, t \in S$ выполняются условия :

1.$a(st) = (as)t$;

2.$(a + b)s = as + bs$;

3.$a(s + t) = as + at$;

4.$a \cdot 1 = a$;

5.$0 \cdot s = a \cdot 0 = 0$.

Двойственным образом вводится определение левого полумодуля. Все результаты, справедливые для правых полумодулей, будут верны и для левых, и наоборот. Через A_S обозначим правый полумодуль над полукольцом S.

Определение 1.4. Отображение $\varphi : A_S \to B_S$ называется *гомоморфизмом полумодулей*, если

1. φ — полугрупповой гомоморфизм, то есть $\varphi(a+a') = \varphi(a)+\varphi(a')$ при всех $a, a' \in A$;

2. $\varphi(as) = \varphi(a)s$ для любых $a \in A, s \in S$.

Определение 1.5. *Порождающее множество* полумодуля A — это подмножество $X \subseteq A$ такое, что каждый элемент $a \in A$ может быть записан как линейная комбинация конечного числа элементов из X, то есть $a = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i$, где $s_i \in S, x_i \in X$, при любом i.

Определение 1.6. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ полумодуля A называются *линейно независимыми*, тогда и только тогда, когда из равенства

$$\sum_i a_i s_i = \sum_i a_i s_i'$$

вытекает $s_i = s_i'$ для всех i.

Определение 1.7. Множество $\{e_i, i \in I\}$ элементов S-полумодуля A называется *базисом*, если оно является порождающим множеством для A и при этом оно линейно независимо.

Полумодуль, обладающий базисом, называется *свободным*.

Пример 1.2. Множество $A = \mathbb{R}_+^n = \{(s_1, \ldots, s_n) : s_i \in \mathbb{R}_+ \, \forall i\}$ с поточечными операциями сложения и умножения на элементы из $\mathbb{R}_+$, образуют свободный $\mathbb{R}_+$-полумодуль с базисом $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$.

2. Свойства линейно зависимых систем над $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{B}_2$.

В данном параграфе исследуются свойства линейно независимых/зависимых систем элементов свободных $\mathbb{R}_+$- полумодулей. В дальнейшем, для краткости элементы свободных $\mathbb{R}_+$- полумодулей будем называть векторами. Для исследования векторов над $\mathbb{R}_+$ оказывается полезным понятие знакового портрета, известное для вещественных матриц (см. [1]). А именно, напомним, что знаковым портретом вещественной матрицы $A = ||a_{ij}||$ называется матрица $Sg(A) = ||sg(a_{ij})||$ где

$$sg(a_{ij}) = \begin{cases} 0, a_{ij} = 0, \\ 1, a_{ij} > 0, \\ -1, a_{ij} < 0. \end{cases}$$

В частности, если все элементы матрицы A — неотрицательные числа, то ее знаковый портрет можно рассматривать как матрицу над двухэлементной булевой алгеброй $\mathbb{B}_2$.

Аналогично, для вектора $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ назовем его знаковым портретом набор $Sg(a) = (sg(a_1), \dots, sg(a_n)) \in \mathbb{B}_2^n$.

Утверждение 1. Линейная зависимость системы векторов $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ равносильна линейной зависимости их знаковых портретов $\{b_1, \dots, b_m\}$, где $b_i = sg(a_i)$ при любом i.

Доказательство. Пусть система векторов $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ линейно зависима, тогда найдутся такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m, {\lambda_1}', \dots, \lambda_m^{'} \in \mathbb{R}_+$, что

$$\sum_i a_i\lambda_i = \sum_i a_i\lambda_i^{'}, \qquad (1)$$

но $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \neq (\lambda_1^{'}, \lambda_2^{'}, \dots, {\lambda_m}')$. Возможны ровно два случая:

1. Существует i, такое что $Sg(\lambda_i) \neq Sg(\lambda_i')$. Тогда $\sum_i b_i Sg(\lambda_i) = \sum_i b_i Sg(\lambda_i')$, откуда следует, что система векторов $\{b_1, \dots, b_n\}$ линейно зависима.

2. Для любого i верно $Sg(\lambda_i) = Sg(\lambda_i^{'})$. Следовательно, существует такое i_0, что $\lambda_{i_0} \neq 0, \lambda_{i_0}^{'} \neq 0, \lambda_{i_0} \neq \lambda_{i_0}^{'}$. Тогда $\lambda_{i_0} < \lambda_{i_0}^{'}$, либо $\lambda_{i_0} > \lambda_{i_0}^{'}$. Ради определенности допустим, что $\lambda_{i_0} < \lambda_{i_0}^{'}$. Тогда достаточно доказать, что верно равенство $\sum_{i\neq i_0} a_i\lambda_i = \sum_i a_i\lambda_i^{'}$.

Переходя в (1) к покоординатной записи, для произвольного j име-

ем :
$$(\sum_i a_i\lambda_i)_j = (\sum_i a_i\lambda_i^{'})_j \tag{2}$$

а) Если $(a_{i_0})_j = 0$, равенство $(\sum_{i\neq i_0} a_i\lambda_i)_j = (\sum_i a_i\lambda_i^{'})_j$ верно.

б) Если $(a_{i_0})_j > 0$, тогда (2) можно записать в виде :

$$(a_{i_0}\lambda_{i_0})_j + (\sum_{i\neq i_0} a_i\lambda_i)_j = (a_{i_0}\lambda_{i_0}^{'})_j + (\sum_i a_i\lambda_i^{'})_j,$$

но так как по условию у нас $\lambda_{i_0} < \lambda_{i_0}^{'}$, то $(a_{i_0}\lambda_{i_0})_j$ можно отбросить, так как сложение берется по максимуму.

Таким образом, в каждом из случаев проверяемое равенство покоординатно верно, следовательно, доказана справедливость равенства $\sum_{i\neq i_0} a_i\lambda_i = \sum_i a_i\lambda_i^{'}$, что и требовалось.

Докажем обратное. Пусть имеется линейная зависимая система знаковых портретов векторов. Требуется доказать, что исходная система векторов также является линейно зависимой.

Итак, пусть существуют $\mu_1, \ldots, \mu_m, \mu_1', \ldots, \mu_m' \in \mathbb{B}_2$, такие что $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \neq (\mu_1', \ldots, \mu_m')$ и

$$\sum_i b_i\mu_i = \sum_i b_i\mu_i^{'}. \tag{3}$$

Перенумеровав при необходимости $b_1, \ldots, b_m$, можно считать, что $\mu_m = 0, \mu_m' = 1$. Прибавив к (3) $\sum_{i=1}^{m-1} b_i$, получим равенство

$$b_1 + \ldots + b_{m-1} = b_1 + \ldots + b_{m-1} + b_m.$$

Поэтому при любом j верно $(b_m)_j \leq (b_1)_j + \ldots + (b_{m-1})_j$.

Если $(b_m)_j = 0$, то и $(a_m)_j = 0$. В этом случае никаких дополнительных действий не требуется.

Если $(b_m)_j = 1$, то существует $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, такое что $(b_k)_j = 1$. Тогда $(a_k)_j \neq 0$, значит, существует такое λ_{jk}, что $(a_m)_j \leq (a_k\lambda_{jk})_j$.

Положим $\lambda_k = \max_{1\leq j\leq n} \lambda_{jk}$. Тогда при любом j верно

$$(a_m)_j \leq \sum_{k=1}^{m-1} (a_k\lambda_k)_j, \forall j.$$

Следовательно,
$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k\lambda_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k\lambda_k + a_m,$$

так что система $\{a_1, \dots, a_m\}$ линейно зависима.$\square$

Утверждение 2. Если система векторов $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq \mathbb{B}_2^n$ линейно независима, то $m \le n$. При $m = n$ система независима ровно тогда, когда $\{b_1, \dots, b_n\} = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$.

Доказательство. Поскольку система $\{b_1\}$ линейно независима, то по крайней мере одна из координат вектора b_1 равна 1. Если вектор b_2 покоординатно не больше, чем b_1, то $b_1 + b_2 = b_1$, что противоречит линейной независимости системы $\{b_1, b_2\}$. Поэтому вектор $b_1 + b_2$ должен содержать по крайней мере на одну координату, равную 1, больше, чем b_1. Аналогично, если вектор b_3 покоординатно не больше, чем $b_1 + b_2$, то $b_1 + b_2 + b_3 = b_1 + b_2$, что противоречит линейной независимости системы $\{b_1, b_2, b_3\}$. Поэтому вектор $b_1 + b_2 + b_3$ имеет хотя бы на одну координату, равную 1, больше, чем $b_1 + b_2$, и так далее. Ясно, что описанный процесс добавления векторов с сохранением их линейной независимости не может продолжаться более n шагов, следовательно, для любой независимой системы $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq \mathbb{B}_2^n$ верно $m \le n$.

Теперь рассмотрим случай, когда $m = n$. Если вектор b_1 содержит хотя бы две координаты, равные 1, то описанный выше процесс добавления остальных векторов линейно независимой системы $\{b_1, \dots, b_n\}$ закончился бы менее, чем за n шагов. Значит, у вектора b_1 имеется ровно одна координата, равная 1. А поскольку линейная независимость сохраняется при перенумерации векторов системы, то у каждого вектора системы $\{b_1, \dots, b_n\}$ имеется ровно одна координата, равная 1. Очевидно также, что все векторы системы $\{b_1, \dots, b_n\}$ должны быть различны, поэтому при подходящей нумерации получаем $b_1 = e_1, \dots, b_n = e_n$.$\square$

Из утверждений 1 и 2 непосредственно вытекает

Следствие. Любой подполумодуль $A \subseteq \mathbb{R}_+^n$ содержит не более чем n линейно независимых векторов. В частности, A содержит n линейно независимых векторов тогда и только тогда, когда $A = \mathbb{R}_+^n$.

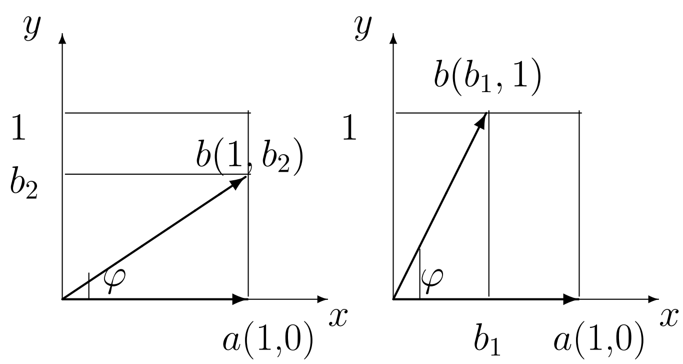
3. Метрические свойства свободных $\mathbb{R}_+$-полумодулей.

Как обычно, под скалярным произведением векторов $a, b \in \mathbb{R}^n_+$ понимается число $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Естественным образом определяется норма (длина) вектора $a \in \mathbb{R}^n_+$: $||a|| = \sqrt{(a, a)}$. Вектор a называется нормированным, если $||a|| = 1$.

Исследуем поведение скалярного произведения двух нормированных векторов a, b. Для упрощения вычислений будем считать, что векторы a и b лежат в свободном полумодуле $\mathbb{R}^2_+$. Обозначим угол между a, b через φ. Векторы имеют координаты $a(a_1, a_2), b(b_1, b_2)$.

Выясним поведение графика функции скалярного произведения (a, b) при фиксированном $a = (1, 0)$:

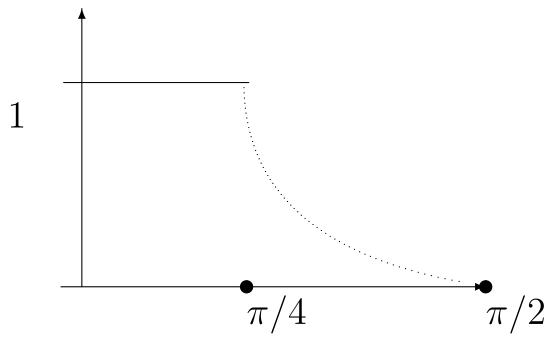


1 случай. $b = (1, b_2)$, $0 \leq b_2 \leq 1$, (то есть $0 \leq \varphi \leq \pi/4$)
В этом случае $(a, b) = 1$.

2 случай. $b = (b_1, 1)$, $(a, b) = b_1$.

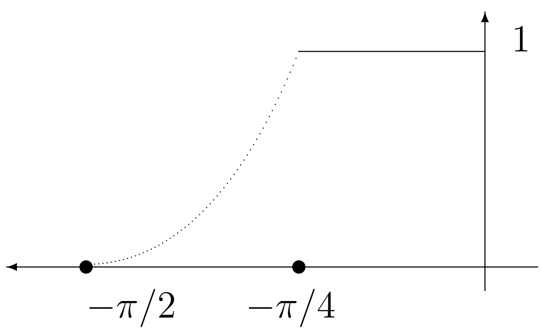
Имеем: $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{b_1}{1} = b_1$. Следовательно, $(a, b) = \operatorname{ctg} \varphi$ при $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$.

В результате получили, что в интервале $[\pi/4, \pi/2]$ график скалярного произведения совпадает с графиком функции $ctg\varphi$.



Обозначим через ψ угол между вектором a и осью OX. В рассматриваемом выше случае мы начальным вектором брали вектор $a = (1, 0)$, лежащий на оси OX, то есть $\psi = 0$.

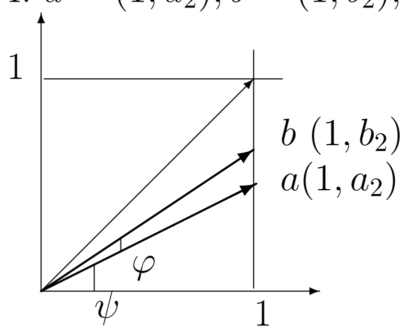
Аналогичными рассуждениями показывается, что в случае когда a лежит на оси OY, то есть $\psi = \pi/2$, график исследуемой функции имеет вид:



А теперь рассмотрим общий случай, когда вектор a расположен под некоторым углом $\psi \in [0; \pi/2]$ к оси OX.

Рассмотрим два случая:

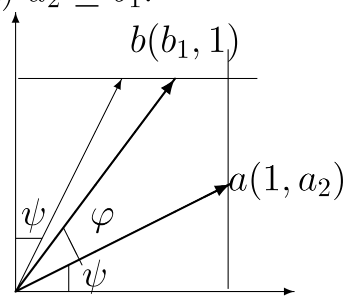
I. $a = (1, a_2), b = (1, b_2), 0 \leq a_2, b_2 \leq 1$.



Имеем: (a, b)=1 для $-\psi \leq \varphi \leq \pi/4 - \psi$.

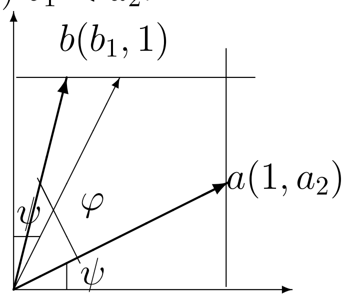
II. $a = (1, a_2), b = (b_1, 1)$. В данном случае, исследование подразделяется на два пункта:

а) $a_2 \leq b_1$.



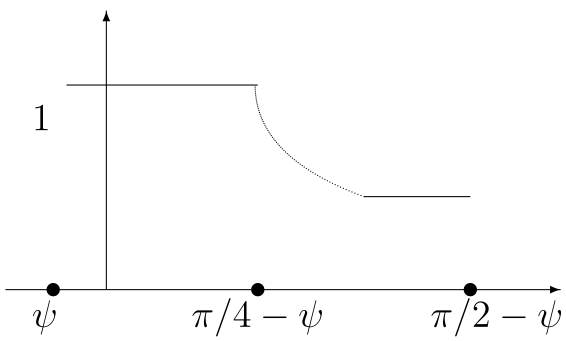
$(a, b) = b_1 = ctg(\psi + \varphi)$, $\pi/4 - \psi \leq \varphi \leq \pi/2 - 2\psi$.

b) $b_1 < a_2$.

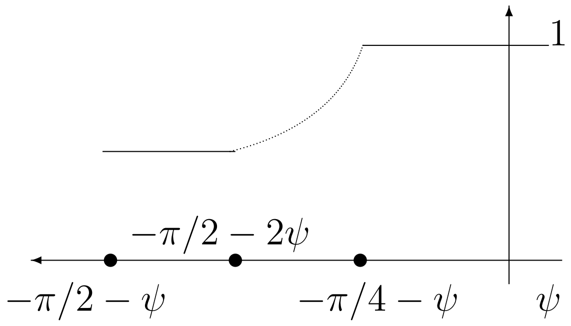


$(a, b) = a_2 = tg\psi$, $\pi/2 - 2\psi \leq \varphi \leq \pi/2 - \psi$.

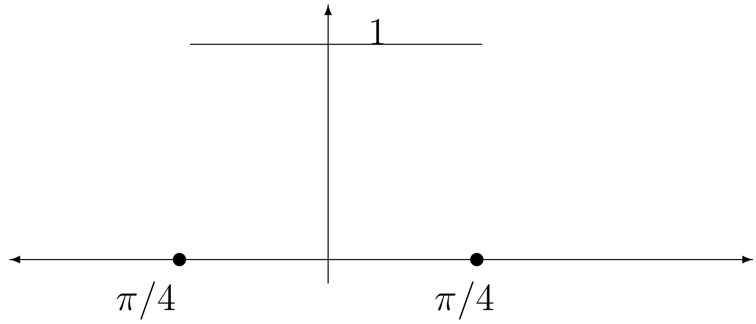
Нетрудно заметить,что график примет следующий вид:



Рассуждая аналогично, можно увидеть, что если вектор a имеет координаты $(a_1, 1)$, то график скалярного произведения будет иметь следующий вид:



Наконец, если $a=(1,1)$, то $\psi\in[-\pi/4,\pi/4]$, и получаем график :



Таким образом, получаем формулу, определяющую скалярное произведение нормированных векторов a, b в зависимости от угла φ между ними и угла ψ между вектором a и осью OX:

$$(a,b)=\begin{cases}1, & \text{если } -\psi\le\varphi\le\pi/4-\psi;\\ ctg(\psi+\varphi), & \text{если } \pi/4-\psi\le\varphi\le\pi/2-2\psi;\\ tg\psi, & \text{если } \pi/2-2\psi\le\varphi\le\pi/2-\psi.\end{cases}$$

4. Исследование справедливости формулы Грассмана.

Связь размерностей суммы и пересечения подпространств конечномерного пространства над полями описывает известная из курса алгебры формула Грассмана :

$$dim(L_1 + L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dimL_1 \cap L_2.$$

В данном параграфе исследуются случаи, в которых формула Грассмана справедлива для подполумодулей конечных размерностей свободных полумодулей $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^3_+$, понимая под размерностью подполумодуля:

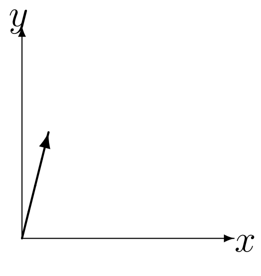
a) наименьшее количество порождающих его векторов, обозначаемое $dim_1 L$;

b) наибольшее возможное количество его линейно независимых векторов, обозначаемое $dim_2 L$.

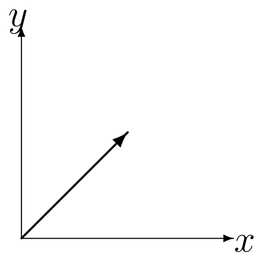
Сначала исследуем справедливость формулы Грассмана для подполумодулей в $\mathbb{R}^2_+$.

Рассмотрим три возможных случая.

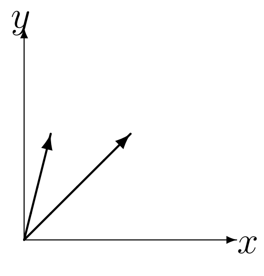
Случай 1. $dim_1 L_1 = dim_1 L_2 = 1$



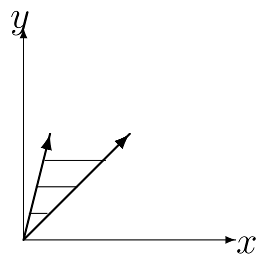
$dim_1 L_1 = 1$



$dim_1 L_2 = 1$



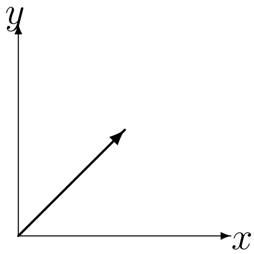
$dim_1 L_1 \cap L_2 = 0$



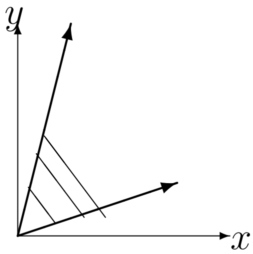
$dim_1 L_1 + L_2 = 2$

По рисунку видно, что если порождающие векторы не пропорциональны, то $dim_1 L_1 + L_2 = 2$, $dim_1 L_1 \cap L_2 = 0$, а если пропорциональны, то $dim_1 L_1 + L_2 = 1$ и $dim_1 L_1 \cap L_2 = 1$, поэтому для $dim_1 L_1 = dim_1 L_2 = 1$ формула верна всегда.

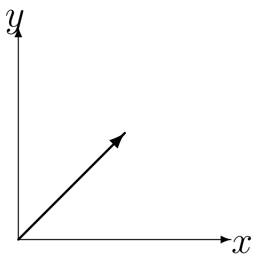
Случай 2. $dim_1 L_1 = 1, dim_1 L_2 = 2$.

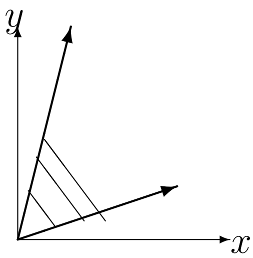


$dim_1 L_1 = 1$



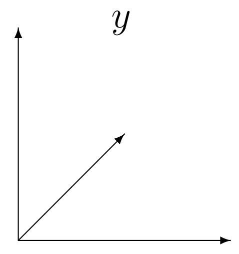
$dim_1 L_2 = 2$



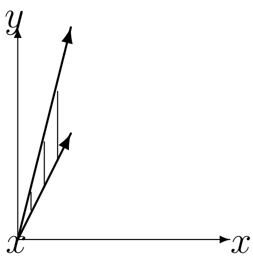


$dim_1(L_1 \cap L_2) = 1$ $\quad$ $dim_1(L_1 + L_2) = 2$

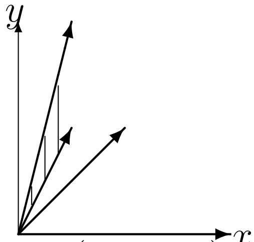
Рассмотрим другой случай, когда $L_1 \cap L_2 = 0$:



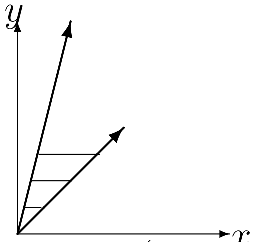
$dim_1 L_1 = 1$



$dim_1 L_2 = 2$



$dim_1(L_1 \cap L_2) = 0$



$dim_1(L_1 + L_2) = 2$

Анализ данных рисунков показывает, что формула Грассмана справедлива ровно тогда, когда полумодуль L_1 является подполумодулем в L_2.

Случай 3. $dim_1 L_1 = dim_1 L_2 = 2$. Поскольку для всякого подполумодуля $L \subseteq \mathbb{R}^2_+$ верно, что $dim_1 L \leq 2$, то в рассматриваемом случае формула Грассмана справедлива тогда и только тогда, когда $L_1 \cap L_2 = 0$.

Таким образом, доказана

Теорема. Для подполумодулей $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^2_+$ формула Грассмана не выполняется ровно в двух случаях:

1) один из полумодулей L_1, L_2 имеет размерность 1, а другой 2, и $L_1 \cap L_2 = 0$;

2) оба полумодуля L_1 и L_2 имеют размерность 2, а $dim_1(L_1 \cap L_2) < 2$.

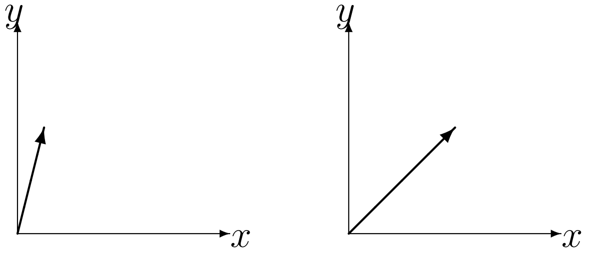
Теперь исследуем справедливость формулы Грассмана для подполумодулей в $\mathbb{R}^2_+$ в случае, когда вместо $dim_1 L$ берется $dim_2 L$.

Для подполумодулей L_1 , L_2 двумерного пространства снова рассмотрим три случая:

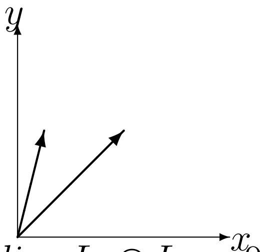
1) $dim_2 L_1 = dim_2 L_2 = 1$;
2) $dim_2 L_1 = 1, dim_2 L_2 = 2$;
3) $dim_2 L_1 = dim_2 L_2 = 2$.

Случай 1. Так как у нас $L \subseteq \mathbb{R}^2_+$, то размерность суммы может быть либо 1, либо 2. Рассмотрим случай, когда $dim_2 L_1 + L_2 = 1$, $L_1 \cap L_2 = 0$:

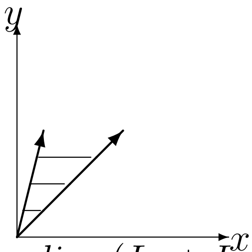
а)



$dim_2 L_1 = 1$ $\qquad$ $dim_2 L_2 = 1$

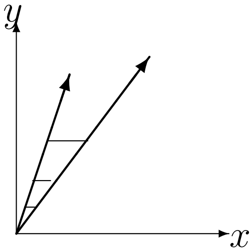


$dim_2 L_1 \cap L_2 = 0$

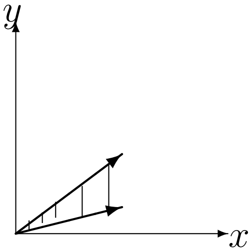


$dim_2(L_1 + L_2) = 1$

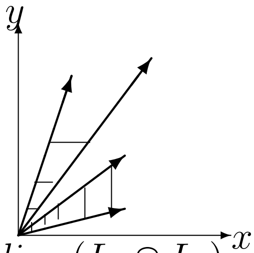
b)



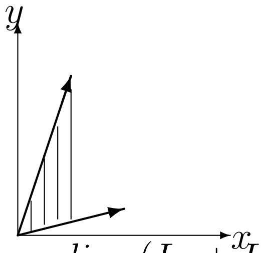
$dim_2 L_1 = 1$



$dim_2 L_2 = 1$



$dim_2(L_1 \cap L_2) = 0$

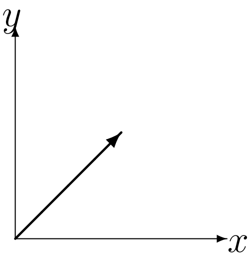


$dim_2(L_1 + L_2) = 1$

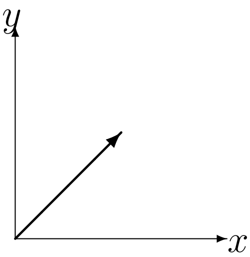
По рисункам видно, что в отличии от $dim_1 L$ формула Грассмана не выполняется.

Когда $dim_2(L_1 \cap L_2) = 1$, имеем:

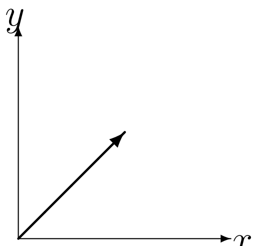
a)



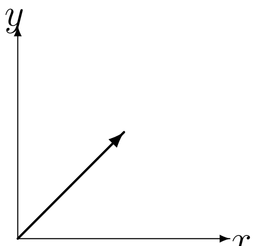
$dim_2 L_1 = 1$



$dim_2 L_2 = 1$

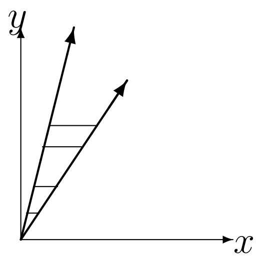


$dim_2 L_1 \cap L_2 = 1$

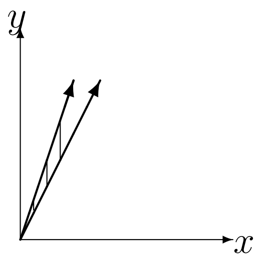


$dim_2 L_1 + L_2 = 1$

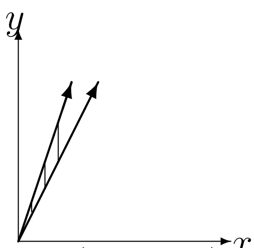
b)



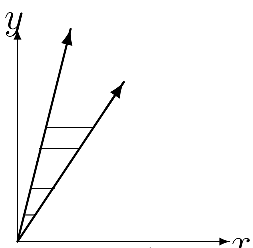
$dim_2 L_1 = 1$



$dim_2 L_2 = 1$



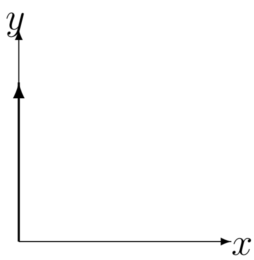
$dim_2 (L_1 \cap L_2) = 1$



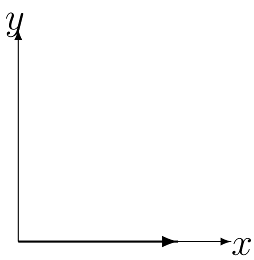
$dim_2 (L_1 + L_2) = 1$

Теперь рассмотрим случай, когда размерность суммы равна 2, а $L_1 \cap L_2 = 0$.

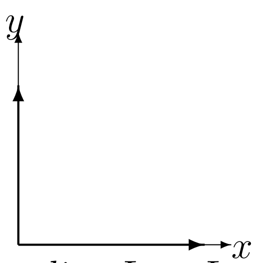
a)



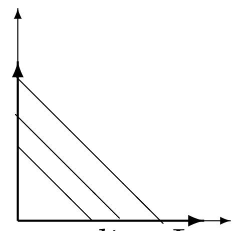
$dim_2 L_1 = 1$



$dim_2 L_2 = 1$

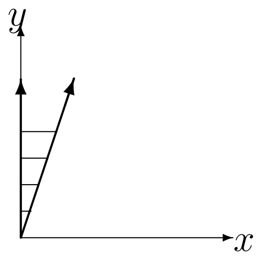


$dim_2 L_1 \cap L_2 = 0$

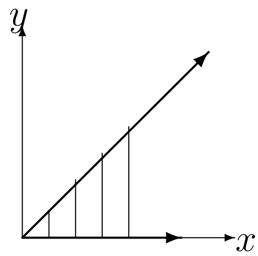


$dim_2 L_1 + L_2 = 2$

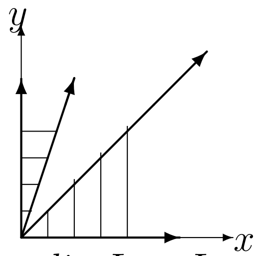
b)



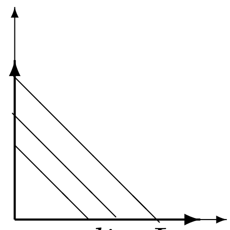
$dim L_1 = 1$



$dim L_2 = 1$

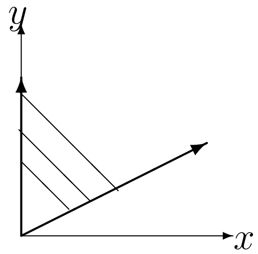


$dim L_1 \cap L_2 = 0$

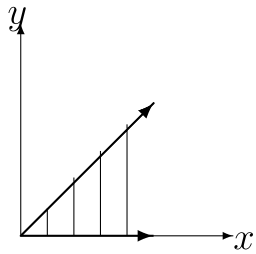


$dim L_1 + L_2 = 2$

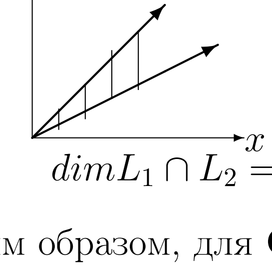
Если пересечение подполумодулей L_1, L_2 ненулевое, то такая ситуация изображена схематично на следующем рисунке:



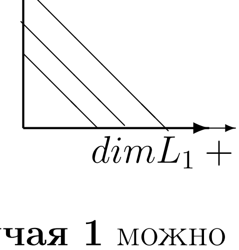
$dim L_1 = 1$



$dim L_2 = 1$



$dim L_1 \cap L_2 = 1$



$dim L_1 + L_2 = 2$

Таким образом, для **Случая 1** можно сделать вывод:

Если $dim_2 L_1 + L_2 = 1$ формула верна, тогда и только тогда, когда $L_1 \cap L_2 \neq 0$;

Если $dim_2 L_1 + L_2 = 2$ формула верна, тогда и только тогда, когда $L_1 \cap L_2 = 0$.

Случай 2 $dim_2 L_1 = 1, dim_2 L_2 = 2$. В этом случае $L_2 = \mathbb{R}^2_+$, поэтому $L_1 + L_2 = L_2$, $L_1 \cap L_2 = L_1$, и следовательно, формула верна.

Случай 3 $dim_2 L_1 = dim_2 L_2 = 2$. Аналогично доказывается, что формула Грассмана справедлива для данного случая всегда.

Исследование справедливости формулы Грассмана в $\mathbb{R}^3_+$.

Дальнейшее исследование будем проводить для подполумодулей в $\mathbb{R}^3_+$. Так же, как в плоскости, рассмотрим два понятия размерности $dim_1 L$, $dim_2 L$.

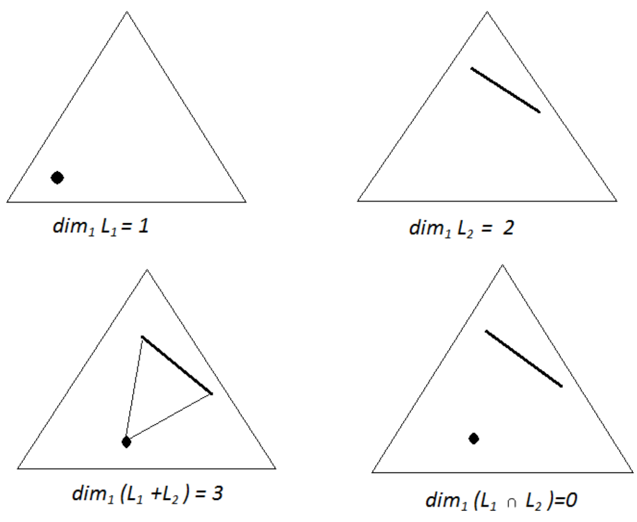
Подполумодули в $\mathbb{R}^3_+$ удобно отождествлять с сечениями их плоскостью, проходящей через точки с координатами A(1,0,0), B(0,1,0) и C(0,0,1) на координатных осях. Например, сечение исходного полумодуля $\mathbb{R}^3_+$ — это равносторонний треугольник ABC. Сечение произвольного подполумодуля в $\mathbb{R}^3_+$ — это некоторое выпуклое подмножество в равностороннем треугольнике ABC. Нулевому подполумодулю отвечает пустое подмножество, подполумодулю порождаемому одним вектором – точка, двумя – отрезок, и так далее.

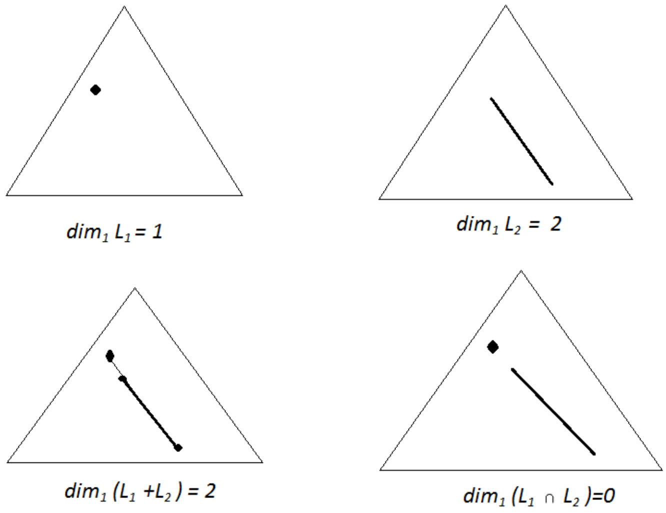
I. Исследование для $dim_1 L$.

Случай 1. $dim_1 L_1 = dim_1 L_2 = 1$.

По аналогии с подполумодулями в $\mathbb{R}^2_+$ нетрудно видеть, что в этом случае формула справедлива всегда.

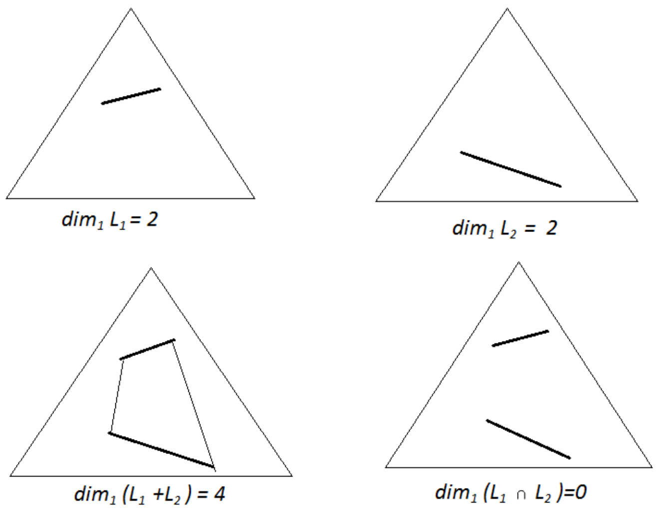
Случай 2. $dim_1 L_1 = 1, dim_1 L_2 = 2$.

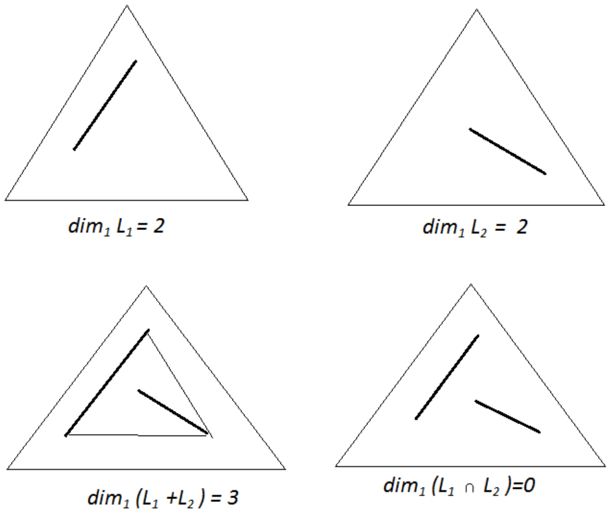




Изучив рисунки, можно заметить, что при нулевом пересечении справедливость формулы Грассмана выполняется всегда, кроме случая, когда точка, отвечающая подполумодулю L_1, лежит на продолжении отрезка, отвечающего подполумодулю L_2, но не на самом отрезке. А когда пересечение отлично от нуля, формула верна всегда.

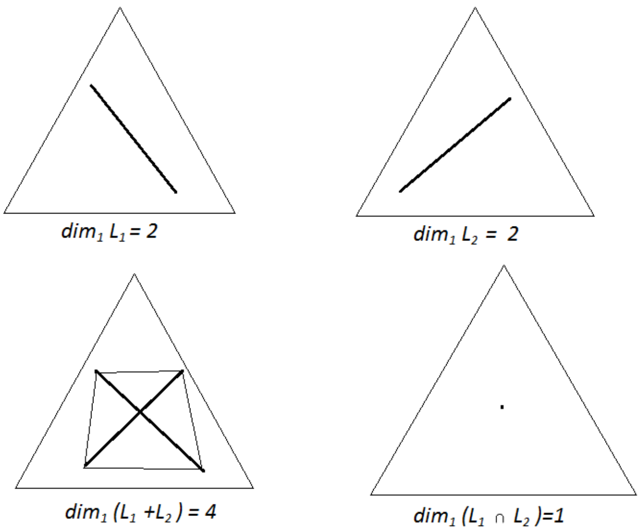
Случай 3. $dim_1 L_1 = dim_1 L_2 = 2$. Сечения подполумодулей будут отрезками. Возможны ровно два подслучая:
а)отрезки не пересекаются;

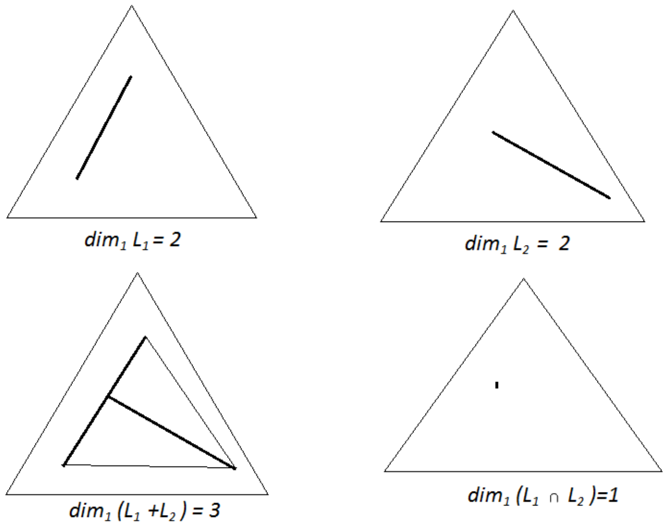




Мысленно проведем прямую через каждый отрезок. Видно, что формула не справедлива только в том случае, когда эти прямые пересекаются.

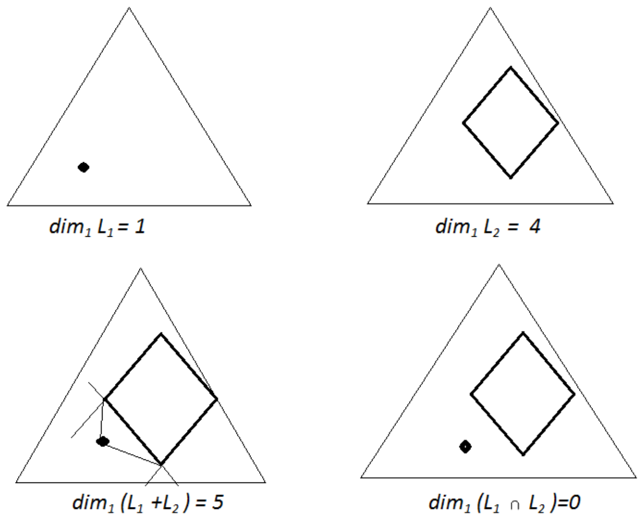
b)отрезки пересекаются.

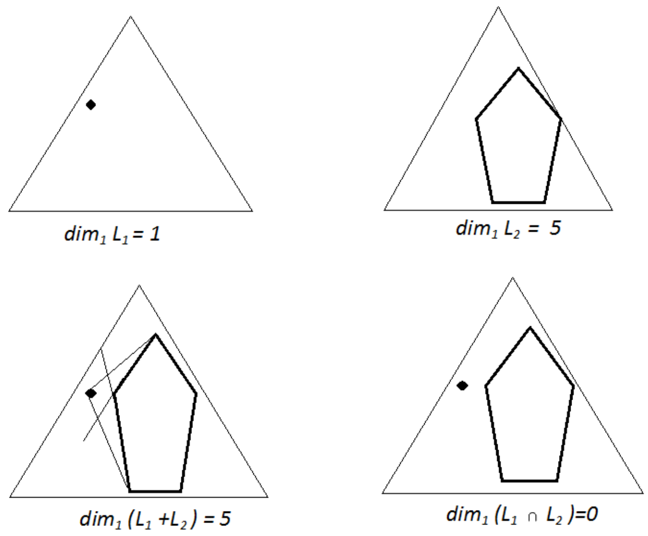




При ненулевом пересечении формула верна в двух случаях: либо точка пересечения является граничной для одного из отрезков, либо пересечение является отрезком.

Случай 4. $dim_1 L_1 = 1; dim_1 L_2 = n \geq 3.$



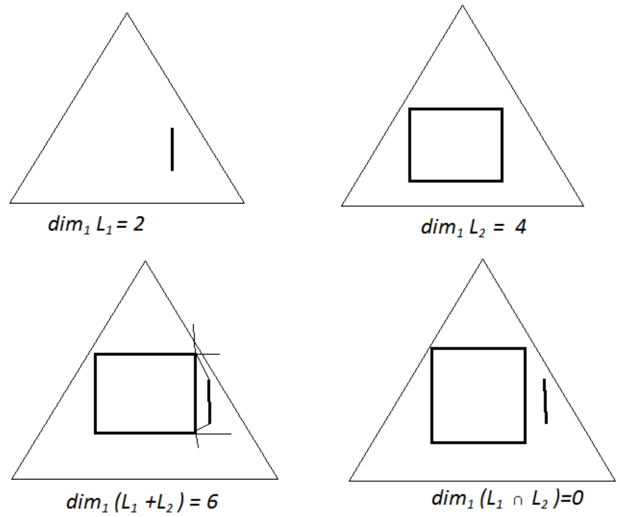


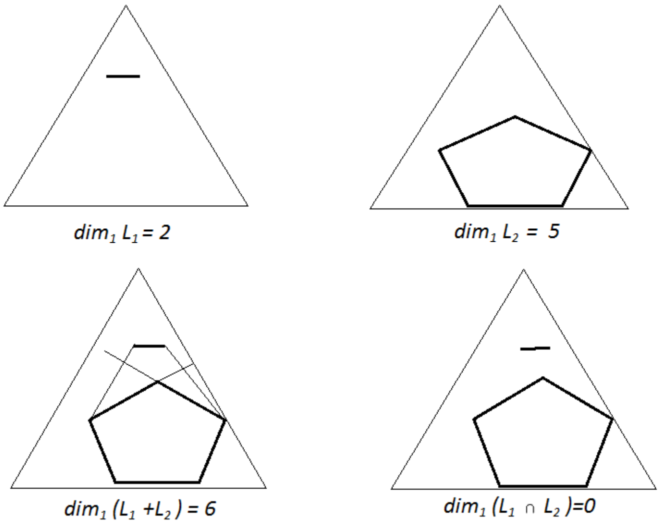
При нулевом пересечении формула Грассмана не верна тогда и только тогда, когда точка, отвечающая подполумодулю L_1, лежит в одном из внешних углов многоугольника, отвечающего подполумодулю L_2, исключая его вершины. Если пересечение ненулевое, формула верна всегда.

Случай 5. $dim_1 L_1 = 2; dim_1 L_2 = n \geq 3.$

Рассмотрим ситуации, когда:

а) Подполумодули не пересекаются;

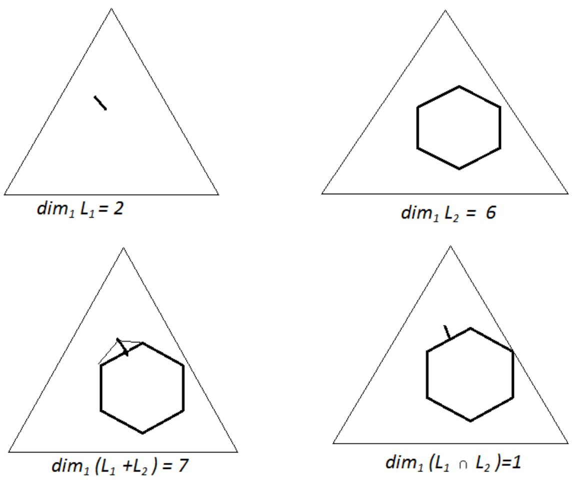


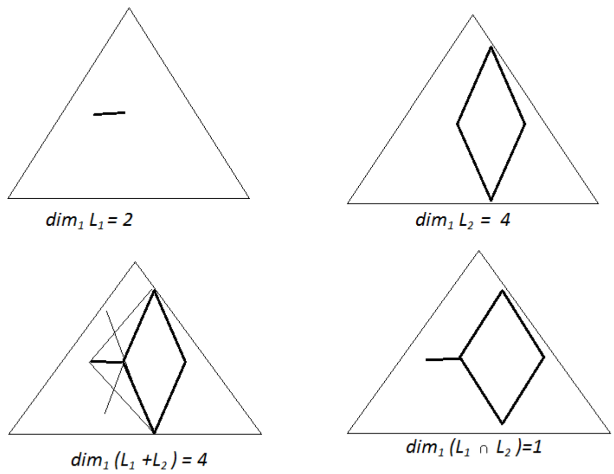


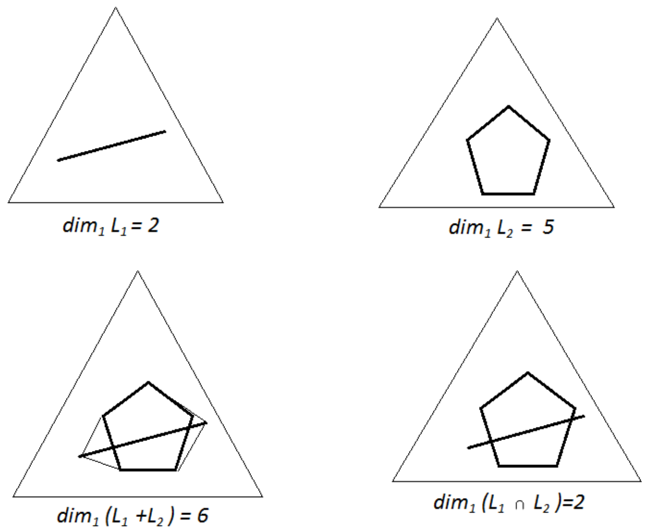
Изучив всевозможные расположения отрезка и многоугольника, делаем вывод.

Формула справедлива ровно тогда, когда выполнены условия: отрезок не должен пересекаться с внешними углами, и если через отрезок провести прямую, то эта прямая не должна пересекаться с многоугольником.

b) Подполумодули пересекаются по точке или по отрезку;





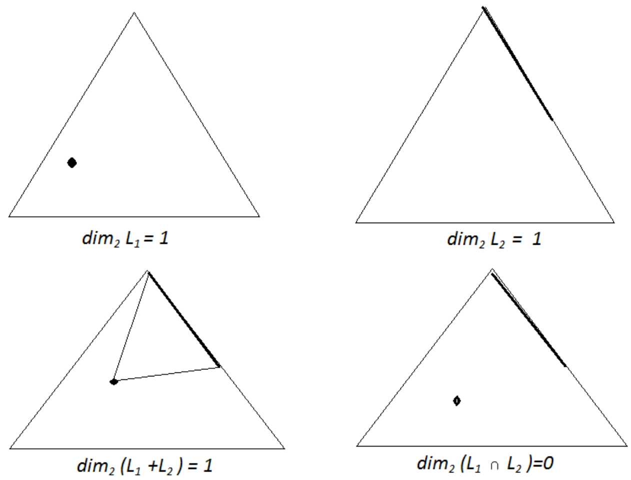


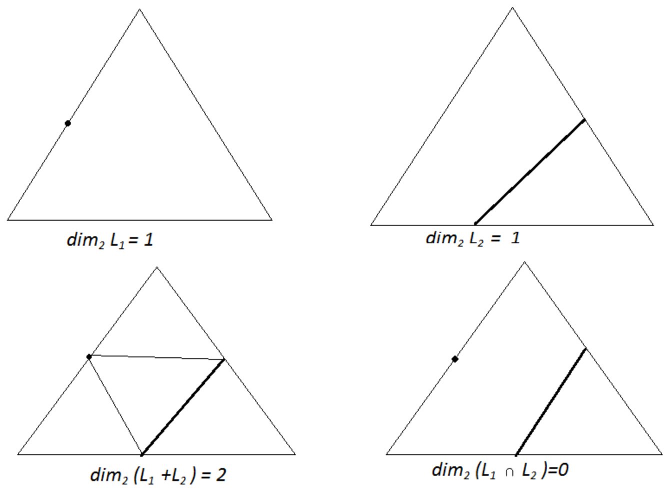
Когда пересечение ненулевое, формула справедлива в двух случаях: либо отрезок полностью должен лежать внутри многоугольника, либо отрезок пересекается в граничной точке, при этом отрезок не лежит во внешних углах многоугольника.

II. Исследование для $dim_2 L$.

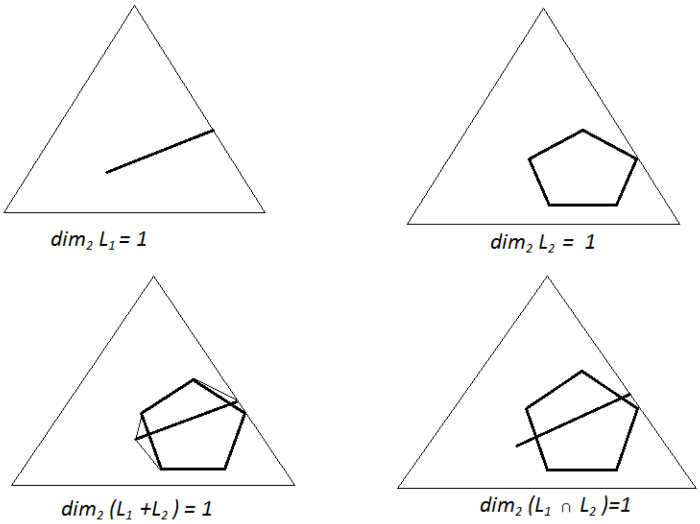
В параграфе 2 было показано (см. **Следствие**), что в полумодуле $\mathbb{R}_+^n$ имеется не больше, чем n линейно независимых векторов, поэтому (в отличие от случая с dim_1) для любого подполумодуля $L \subseteq \mathbb{R}_+^3$ верно $dim_2 L \leq 3$, причем $dim_2 L = 3$ ровно тогда, когда $L = \mathbb{R}_+^3$.
Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. $dim_2 L_1 = dim_2 L_2 = 1$.



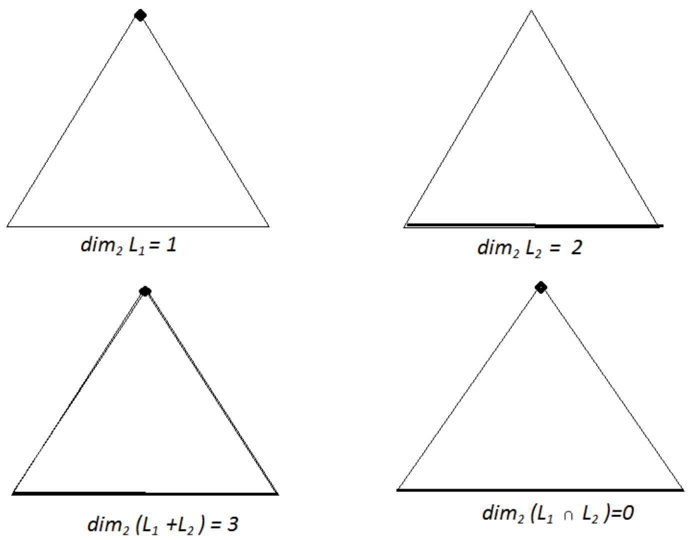


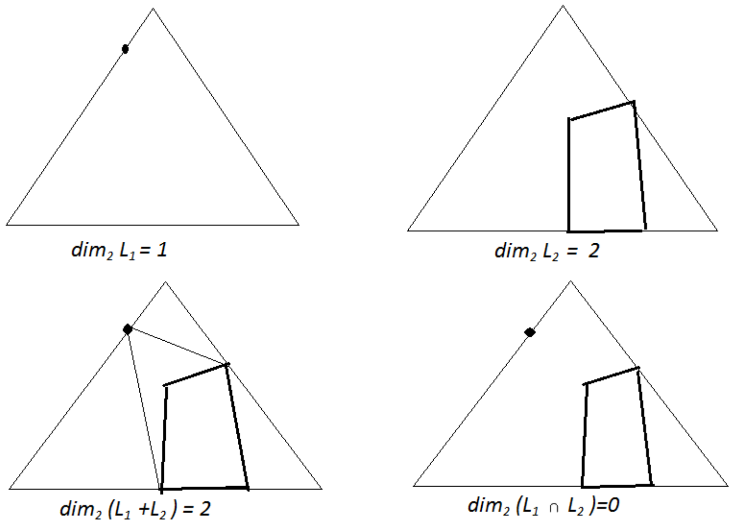
Когда пересечение нулевое, формула справедлива, если каждый из многоугольников, отвечающих подполумодулям, касаются ровно одной грани, причем эти грани для многоугольников разные.



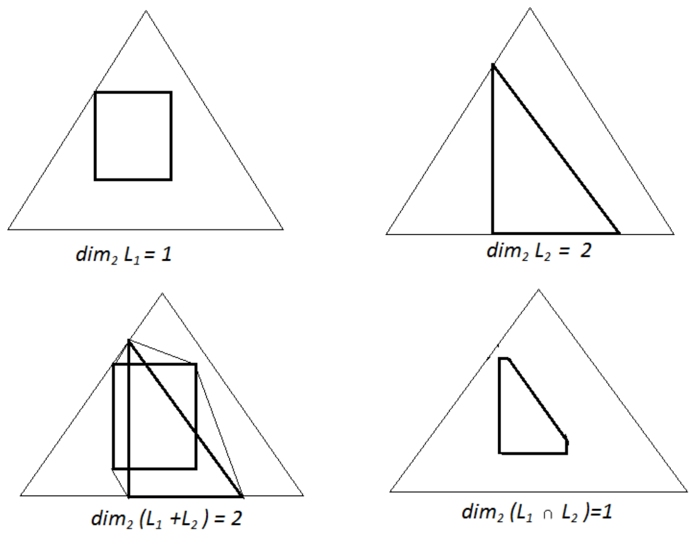
Когда пересечение ненулевое, формула верна, если в этих многоугольниках не существует двух точек, лежащих на разных гранях.

Случай 2. $dim_2 L_1 = 1; dim_2 L_2 = 2.$



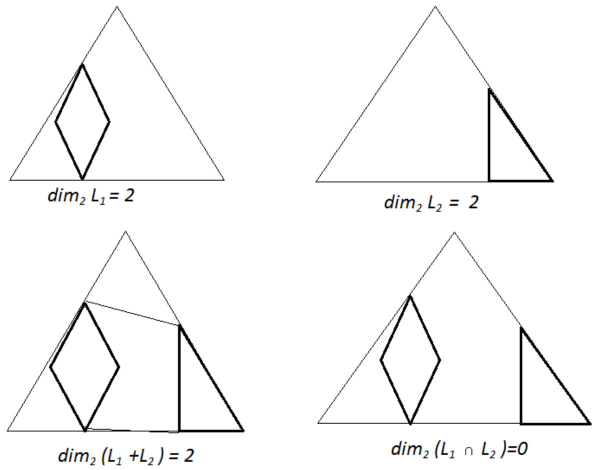


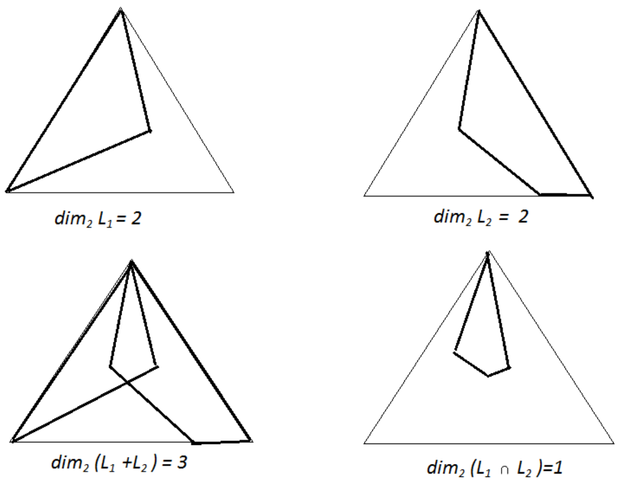
Когда пересечение нулевое, справедливость формулы выполняется тогда и только тогда, когда каждая из вершин треугольника ABC лежит в многоугольниках.

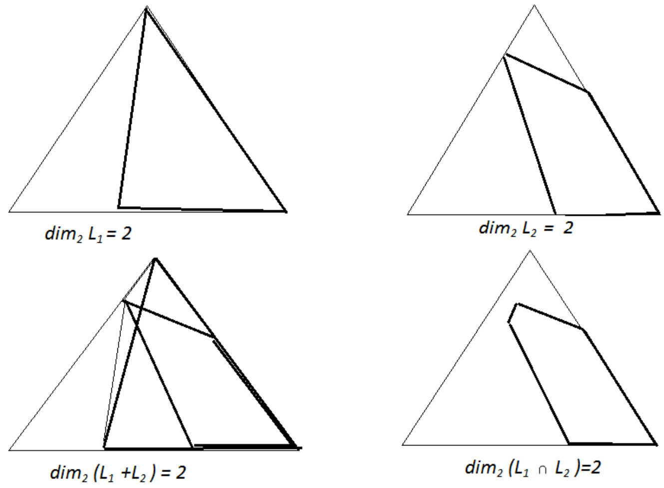


Если пересечение ненулевое, формула верна всегда.

Случай 3. $dim_2 L_1 = dim_2 L_2 = 2$.







В случаях, когда пересечение нулевое, справедливость формулы нарушается.

Когда пересечение ненулевое, формула верна ровно в двух случаях:

1)размерность пересечения равно единице, и каждая из вершин треугольника лежит хотя бы в одном из многоугольников;

2) размерность пересечения равно двум, одна из вершин треугольника не лежит ни в одном многоугольнике.

Случай 4. $dim_2 L_2 = 3$. Тогда $L_2 = \mathbb{R}^3_+$, следовательно, $L_1 + L_2 = L_2, L_1 \cap L_2 = L_1$ и формула справедлива всегда.

Список литературы

[1] Ю. А. Альпин, С. Н. Ильин, Степени знаковых портретов вещественных матриц, Зап. научн. сем. ПОМИ, 2002, том 284, 5–17.

[2] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Основы алгебры.-М.:Наука,1994.-319 с.

[3] В. А. Чермных. Полукольца. Учебное пособие.-Киров,1997.-131 с.

[4] Golan J.S. "Semirings and their applications."Kluwer Academic Publishers, London,1999.

[5] Wang H.L., Wang X.P., Eigenproblem for optimal-node matrices in max-plus algebra. Linear Multilinear Algebra 62, N8, 1105-1113 (2014).