УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
*Том 156, кн. 3* Физико-математические науки *2014*

УДК 519.716

# О ПОРОЖДАЮЩИХ СИСТЕМАХ В КЛАССАХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

*О.С. Дудакова*

**Аннотация**

Рассмотрена задача о конечной порожденности предполных классов монотонных функций $k$-значной логики. Для семейства всех частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами таких, что для любых двух элементов $x$ и $y$ существует $\sup(x,y)$ или $\inf(x,y)$, установлено, что соответствующие классы монотонных функций являются конечно-порожденными.

**Ключевые слова:** функции многозначной логики, замкнутые классы, предполные классы монотонных функций в $P_k$.

---

Известно, что все предполные классы функций $k$-значной логики, за исключением классов монотонных функций, являются конечно-порожденными, кроме того, при $k \leq 7$ все предполные классы монотонных функций $k$-значной логики также являются конечно-порожденными [1, 2], а начиная с $k = 8$ существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса [3] (см. также [2]); полного описания конечно-порожденных предполных классов монотонных функций к настоящему времени не получено. В ряде работ (см., например, [4–7]) приводятся различные достаточные и необходимые условия конечной порожденности классов монотонных функций. В работах автора [8–11] получен критерий конечной порожденности для предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины 2, а также условия существования конечных порождающих систем специального вида для ряда других семейств классов монотонных функций. В работе [12] изучены свойства подклассов предполных классов функций, монотонных относительно множеств ширины 2.

В настоящей работе продолжены исследования в этом направлении. Найдено семейство частично упорядоченных множеств таких, что соответствующие предполные классы монотонных функций $k$-значной логики являются конечно-порожденными.

Пусть $\preccurlyeq$ – частичный порядок на множестве $E_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Положим $\mathcal{P} = (E_k, \preccurlyeq)$. Будем рассматривать только такие частично упорядоченные множества, которые имеют наименьший и наибольший элементы. Через $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ будем обозначать класс всех монотонных функций над множеством $\mathcal{P}$ (отметим, что при указанных ограничениях на структуру частичного порядка класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ является предполным [13]).

Функцию $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ будем называть *функцией выбора*[1], если для каждого набора $(i, a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{P}^{k+1}$ выполняется равенство

$$\lambda(i, a_1, \ldots, a_k) = a_i. \tag{1}$$

[1] Функция выбора является обобщением мультиплексорных булевых функций (см., например, [14, гл. 10]).

Легко видеть, что если замкнутый класс функций $k$-значной логики содержит все константы $1, 2, \ldots, k$ и функцию выбора, то он является конечно-порожденным. Отметим также, что если $\mathcal{P}$ – частично упорядоченное множество, содержащее хотя бы одну пару сравнимых элементов, то $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k) \notin \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$.

Положим

$$\mathcal{P}_\lambda = \{(a, b_1, \ldots, b_k) \in \mathcal{P}^{k+1} \mid \text{ если } i \preccurlyeq j, \text{ то } b_i \preccurlyeq b_j\}.$$

Легко видеть, что функция $\lambda$ монотонна на множестве $\mathcal{P}_\lambda$. Назовем *монотонной функцией выбора* функцию $\nu(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, совпадающую на множестве $\mathcal{P}_\lambda$ с функцией $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Нетрудно показать, что если класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ содержит монотонную функцию выбора, то он является конечно-порожденным.

Пусть $a_1$ и $a_2$ – элементы множества $\mathcal{P}$, не сравнимые относительно частичного порядка $\preccurlyeq$. Элемент $b \in \mathcal{P}$ называется *верхней гранью* элементов $a_1$ и $a_2$, если выполняется неравенство $a_1, a_2 \preccurlyeq b$. Верхняя грань $b$ элементов $a_1$ и $a_2$ называется *минимальной верхней гранью* этих элементов, если не существует такой верхней грани $c$ элементов $a_1$ и $a_2$, что $c \neq b$ и $c \preccurlyeq b$. Верхняя грань $b$ элементов $a_1$ и $a_2$ называется *точной верхней гранью* этих элементов ($\sup(a_1, a_2)$), если для любой верхней грани $c$ элементов $a_1$ и $a_2$ выполняется неравенство $b \preccurlyeq c$. Аналогичным образом определяется *нижняя, максимальная нижняя* и *точная нижняя грани* элементов $a_1$ и $a_2$ (точная нижняя грань обозначается через $\inf(a_1, a_2)$). Через $|\mathcal{P}|$ будем обозначать число элементов множества $\mathcal{P}$. Положим $w_{\mathcal{P}} = \max |J|$, где максимум берется по всем антицепям $J$ множества $\mathcal{P}$; величину $w_{\mathcal{P}}$ будем называть *шириной* множества $\mathcal{P}$. Положим $h_{\mathcal{P}} = \max |I|$, где максимум берется по всем цепям $I$ множества $\mathcal{P}$; величину $h_{\mathcal{P}}$ будем называть *высотой* множества $\mathcal{P}$.

Рассмотрим семейство $\mathbb{S}_1$ частично упорядоченных множеств:

$\mathbb{S}_1$ – семейство, состоящее из всех множеств $\mathcal{P}$ с наименьшим и наибольшим элементами таких, что для любых двух элементов $a, b \in \mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$ существует по крайней мере один из элементов $\sup(a, b)$ и $\inf(a, b)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

**Теорема 1.** *Если $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_1$, то в классе $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ содержится монотонная функция выбора.*

Для доказательства теоремы 1 введем ряд определений и докажем несколько вспомогательных утверждений (леммы 1–4).

Частично упорядоченному множеству $\mathcal{P}$ можно сопоставить два ориентированных графа. Граф $G(\mathcal{P})$: вершинам графа соответствуют элементы множества $\mathcal{P}$ и для каждой пары $u, v$ вершин графа ориентированное ребро $(u, v)$ существует тогда и только тогда, когда для соответствующих элементов множества выполняется неравенство $u \prec v$ и не существует элемента $z$ такого, что $u \prec z \prec v$. Граф $\widehat{G}(\mathcal{P})$ (транзитивное замыкание графа $G(\mathcal{P})$): вершинам графа также соответствуют элементы множества $\mathcal{P}$ и для каждой пары $u, v$ вершин графа ориентированное ребро $(u, v)$ существует тогда и только тогда, когда для соответствующих элементов множества выполняется неравенство $u \prec v$.

Рассмотрим произвольное частично упорядоченное множество $\mathcal{Q}$ с частичным порядком $\leq$. Пусть $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f'$ – монотонное отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$. Элемент $X \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ назовем *зигзагом длины* 1 для отображения $f'$, если не существует монотонного доопределения $f'$ на элемент $X$. Множество элементов $X_1, \ldots, X_n \in \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$, образующих связный подграф в графе $\widehat{G}(\mathcal{Q})$, назовем *зигзагом длины* $n$ для отображения $f'$, если никакое его подмножество из $n-1$ элементов не является зигзагом длины $n-1$ и при любом монотонном доопределении отображения $f'$ на любой из элементов $X_1, \ldots, X_n$ оставшиеся элементы образуют зигзаг длины $n-1$

или несколько зигзагов меньшей длины. Отметим, что введенное здесь понятие зигзага обобщает понятие зигзага из работы Г. Тардоша [3].

Рассмотрим элемент $X \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$. Положим $f_*(X) = \{f'(Y) \mid Y \in \mathcal{Q}', Y < X\}$, $f^*(X) = \{f'(Y) \mid Y \in \mathcal{Q}', Y > X\}$. Через $\overline{f_*(X)}$ обозначим множество максимальных элементов множества $f_*(X)$, через $\underline{f^*(X)}$ – множество минимальных элементов множества $f^*(X)$.

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{Q}$ – произвольное частично упорядоченное множество, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f'$ – монотонное отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$. Доопределение отображения $f'$ до монотонного отображения $f : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ существует тогда и только тогда, когда в $\mathcal{Q}$ нет зигзагов для $f'$.*

Утверждение следует из определения зигзага.

**Лемма 2.** *Пусть $\mathcal{Q}$ – произвольное частично упорядоченное множество, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f'$ – монотонное отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_1$. Тогда в $\mathcal{Q}$ не существует зигзагов длины 2 для $f'$.*

**Доказательство.** Предположим, что $X_1, X_2$ – зигзаг длины 2 для отображения $f'$. По определению зигзага элементы $X_1$ и $X_2$ сравнимы, пусть без ограничения общности $X_1 > X_2$. Положим $\overline{f_*(X_1)} = B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $\underline{f^*(X_1)} = C = \{c_1, \ldots, c_m\}$, $\overline{f_*(X_2)} = A = \{a_1, \ldots, a_s\}$, $\underline{f^*(X_2)} = D = \{d_1, \ldots, d_l\}$. Нетрудно показать, что из монотонности отображения $f'$ и определения зигзага следует: $m, k \geq 2$, $b_i \prec c_j$ для всех $i$, $j$, $a_i \prec c_j$ для всех $i$, $j$, $a_i \prec d_j$ для всех $i$, $j$, $A \cap D = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, среди остальных пар множеств возможны непустые пересечения.

Так как элемент $X_1$ не является зигзагом длины 1 для $f'$, то существует монотонное доопределение отображения $f'$ на элемент $X_1$, то есть найдется элемент $x_1 \in \mathcal{P}$ такой, что $a_i, b_j \prec x_1 \prec c_t$ для всех возможных $i$, $j$, $t$. Рассуждая аналогично для $X_2$, получим, что найдется элемент $x_2 \in \mathcal{P}$ такой, что $a_i \prec x_2 \prec d_j, c_t$ для всех возможных $i$, $j$, $t$. Далее рассмотрим отображение $f'' : \mathcal{Q}' \cup \{X_1, X_2\} \to \mathcal{P}$ такое, что $f'' |_{\mathcal{Q}'} = f'$. Для того чтобы задать значения $f''(X_1)$ и $f''(X_2)$, рассмотрим три возможных случая.

1. Выполняется неравенство $x_1 \preccurlyeq x_2$. Тогда положим $f''(X_1) = f''(X_2) = x_1$. Очевидно, что отображение $f''$ монотонно.

2. Выполняется неравенство $x_1 \succcurlyeq x_2$. Тогда положим $f''(X_1) = x_1$, $f''(X_2) = x_2$. Очевидно, что отображение $f''$ монотонно.

3. Элементы $x_1$ и $x_2$ несравнимы. В силу условия $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_1$ в $\mathcal{P}$ существует по крайней мере один из элементов $\sup(x_1, x_2)$, $\inf(x_1, x_2)$. Если в $\mathcal{P}$ существует $\sup(x_1, x_2)$, то положим $f''(X_1) = \sup(x_1, x_2)$, $f''(X_2) = x_2$. Если $\sup(x_1, x_2)$ не существует, то существует $\inf(x_1, x_2)$, и тогда положим $f''(X_1) = x_1$, $f''(X_2) = \inf(x_1, x_2)$. В обоих случаях легко видеть, что отображение $f''$ монотонно.

Таким образом, во всех возможных случаях существует монотонное доопределение отображения $f'$ на элементы $X_1$ и $X_2$, а это противоречит тому, что $X_1, X_2$ – зигзаг для $f'$. Лемма доказана. □

**Лемма 3.** *Пусть $\mathcal{Q}$ – произвольное частично упорядоченное множество, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f'$ – монотонное отображение $\mathcal{Q}' \to \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_1$. Тогда для $f'$ не существует зигзагов длины $n \geq 2$.*

**Доказательство.** Для $n = 2$ утверждение выполнено по лемме 2. Предположим, что в $\mathcal{Q}$ найдется зигзаг длины $n$, $n \geq 3$, для $f'$, пусть он состоит из элементов $X_1, \ldots, X_n$. Пусть $X_1$ – такой элемент, что граф, образованный остальными элементами $X_2, \ldots, X_n$, связен (легко видеть, что в связном графе всегда существует элемент, после удаления которого граф остается связным (см., например, [15, гл. 3]). Рассмотрим произвольное монотонное доопределение $f'$ на элемент $X_1$, то есть монотонное отображение $f'_1 : \mathcal{Q}' \cup X_1 \to \mathcal{P}$. По определению зигзага элементы $X_2, \dots, X_n$ образуют зигзаг длины $n-1$ для $f'_1$. Продолжая аналогичное доопределение, получим, что существует монотонное отображение $f'_{n-2} : \mathcal{Q}' \cup \{X_1, \dots, X_{n-2}\} \to \mathcal{P}$, для которого $X_{n-1}, X_n$ – зигзаг длины 2. Это противоречит лемме 2. Таким образом, лемма доказана. □

Далее будем рассматривать частично упорядоченное множество $\mathcal{P}$ из семейства $\mathbb{S}_1$, $|\mathcal{P}| = k$. *Частичной функцией выбора* назовем функцию $\lambda'(x_0, x_1, \dots, x_k) : \mathcal{P}_\lambda \to \mathcal{P}$, заданную соотношением (1). Напомним, что функция $\lambda'$ монотонна на своей области определения.

**Лемма 4.** *На множестве $\mathcal{P}^{k+1}$ не существует зигзага длины 1 для функции $\lambda'$.*

**Доказательство.** Пусть для частичной функции $\lambda'$ существует зигзаг длины 1 в $\mathcal{P}^{k+1}$. Обозначим этот элемент через $\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k)$, $\widetilde{x} \in \mathcal{P}^{k+1} \setminus \mathcal{P}_\lambda$. Из определения зигзага длины 1 следует, что $|\underline{\lambda^*(\widetilde{x})}| \geq 2$, $|\overline{\lambda_*(\widetilde{x})}| \geq 2$. Пусть $a, b \in \overline{\lambda_*(\widetilde{x})}$, $c, d \in \underline{\lambda^*(\widetilde{x})}$. Очевидно, что $a \preccurlyeq c, d$ и $b \preccurlyeq c, d$, элементы $a$ и $b$ несравнимы, элементы $c$ и $d$ несравнимы. Из определения зигзага длины 1 следует, что не существует такого элемента $e \in \mathcal{P}$, что $a, b \preccurlyeq e \preccurlyeq c, d$.

Далее, найдется четверка наборов из множества $\mathcal{P}_\lambda$: $\widetilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\widetilde{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$, $\widetilde{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$, $\widetilde{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k)$ таких, что выполняются следующие условия:

a) $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \preccurlyeq \widetilde{x} \preccurlyeq \widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$;

b) $\lambda'(\widetilde{\alpha}) = a, \quad \lambda'(\widetilde{\beta}) = b, \quad \lambda'(\widetilde{\gamma}) = c, \quad \lambda'(\widetilde{\delta}) = d.$

Пусть $\alpha_0 = i$, $\beta_0 = j$, $\gamma_0 = m$, $\delta_0 = l$, $x_0 = r$ (где $i, j, m, l, r \in \{1, \dots, k\}$). Из условия a) следует, что выполняются неравенства $i, j \preccurlyeq r \preccurlyeq m, l$. В силу определения множества $\mathcal{P}_\lambda$ и функции $\lambda'$ (см. условие b)) выполняются следующие соотношения: $a = \alpha_i \preccurlyeq \alpha_r$, $b = \beta_j \preccurlyeq \beta_r$, $c = \gamma_m \succcurlyeq \gamma_r$, $d = \delta_l \succcurlyeq \delta_r$. Кроме того, в силу условия a) выполняются неравенства $\alpha_r, \beta_r \preccurlyeq x_r \preccurlyeq \gamma_r, \delta_r$.

Таким образом, существует элемент $x_r \in \mathcal{P}$, для которого выполняются неравенства $a, b \preccurlyeq x_r \preccurlyeq c, d$, что невозможно в силу проведенных ранее рассуждений. Следовательно, зигзага длины 1 для частичной функции $\lambda'$ в $\mathcal{P}^{k+1}$ не существует.

Лемма доказана.

□

**Доказательство теоремы 1.** Необходимое утверждение следует из лемм 1, 3, 4.

**Следствие 1.** *Если $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_1$, то класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ является конечно-порожденным.*

Рассмотрим еще одно семейство частично упорядоченных множеств $\mathbb{S}_2$, состоящее из всех множеств $\mathcal{P}$ с наибольшим и наименьшим элементами, для которых выполняется следующее условие: для любой пары несравнимых элементов $a_1$ и $a_2$, не имеющих на $\mathcal{P}$ точной верхней грани, и для любой верхней грани $c$ элементов $a_1$ и $a_2$, не сравнимой с некоторой минимальной верхней гранью $b$ этих элементов, в $\mathcal{P}$ существует $\sup(b, c)$.

Нетрудно показать, что имеет место следующее

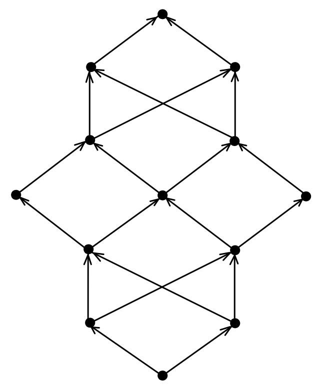

Рис. 1

**Предложение 1.** *Выполняется включение* $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_2$. *Если* $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$, *то* $w_{\mathcal{P}} \geq 3$, $h_{\mathcal{P}} \geq 7$, $|\mathcal{P}| \geq 13$.

На рис. 1 приведен пример минимального (по ширине, по высоте и по числу элементов) множества из семейства $\mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$.

В работе [11] приводится следующее необходимое условие существования монотонной функции выбора.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathcal{P}$ *– произвольное частично упорядоченное множество. Если класс* $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ *содержит монотонную функцию выбора, то* $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_2$.

Из теорем 1 и 2 и предложения 1 можно получить следующее утверждение.

**Следствие 2.** *Пусть* $\mathcal{P}$ *– частично упорядоченное множество такое, что* $h(\mathcal{P}) \leq 6$. *Класс* $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ *содержит монотонную функцию выбора тогда и только тогда, когда* $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

**Summary**

*O.S. Dudakova.* On Finite Generating Subsets in Monotone Clones of Many-Valued Logic.

The problem of existence of finite generating systems in maximal clones of monotone functions of many-valued logic is considered. It is proved that if a finite bounded poset contains $\sup(x, y)$ or $\inf(x, y)$ for every two elements $x$ and $y$, then the clones of all monotone functions in this poset is finitely generated.

**Keywords:** functions of many-valued logic, clones, maximal clones of monotone functions of $P_k$.

**Литература**

1. *Lau D.* Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der $k$-wertigen Logik // Z. math Log. und Grundl. Math. – 1978. – Bd. 24. – S. 79–96.

2. *Lau D.* Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory. – Berlin: Springer, 2006. – 668 p.

3. *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. – 1986. – V. 3. – P. 211–218.

4. *Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L.* Near unanimity functions and partial orderings // Proc. I4th Int. Symposium on Multiple-Valued Logic (Winnipeg, Manitoba, Canada, May 29–31, 1984). – 1984. – P. 52–56.

5. *Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L.* On algebraic properties of monotone clones // Order. – 1986. – V. 3. – P. 219–225.

6. *Baker K., Pixley A.* Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Z. – 1975. – V. 143. – P. 165–174.

7. *Zádori L.* Series parallel posets with nonfinitely generated clones // Order. – 1993. – V. 10. – P. 305–316.

8. *Дудакова О.С.* О классах функций $k$-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. – 2008. – № 1. – С. 31–37.

9. *Дудакова О.С.* О конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций в $P_k$ // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 2. – С. 65–71.

10. *Дудакова О.С.* О порождающих системах специального вида для предполных классов монотонных функций $k$-значной логики // Материалы XVI Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Н. Новгород, 20–25 июня 2011 г.). – Н. Новгород: Изд-во Нижегор. гос. ун-та, 2011. – С. 145–147.

11. *Дудакова О.С.* О существовании порождающих систем специального вида в классах монотонных функций $k$-значной логики // Материалы VIII Молодежной науч. шк. по дискретной математике и ее приложениям (М., 24–29 окт. 2011 г.). – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. – Ч. 1. – С. 27–29.

12. *Панин Д.Ю.* Критерии полноты для некоторых классов монотонных одноместных функций в $P_k$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. – 2013. – № 3. – С. 57–61.

13. *Мартынюк В.В.* Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. – М.: Наука. – 1960. – Т. 3. – С. 49–60.

14. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

15. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

Поступила в редакцию
31.07.14

**Дудакова Ольга Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

E-mail: *olga.dudakova@gmail.com*