УДК 519.63

АППРОКСИМАЦИЯ НАИМЕНЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

В.С. Желтухин, С.И. Соловьёв, П.С. Соловьёв

Аннотация

Изучены свойства минимального собственного значения, отвечающего положительной собственной функции, нелинейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения. Эта задача аппроксимирована сеточной схемой метода конечных элементов на равномерной сетке с линейными конечными элементами. Исследована погрешность приближенных решений. Теоретические результаты подтверждены численными экспериментами для модельной задачи на собственные значения.

Ключевые слова: собственное значение, положительная собственная функция, нелинейная задача на собственные значения, обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Штурма – Лиувилля, метод конечных элементов.

Введение

В статье исследуется задача определения наименьшего собственного значения $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = [0, \infty)$, и соответствующей положительной собственной функции $u(x)$, $x \in \Omega$, $\Omega = (0, \pi)$, $\overline{\Omega} = [0, \pi]$, удовлетворяющих обыкновенному дифференциальному уравнению и однородным граничным условиям Дирихле

$$\begin{aligned} &-(p(\lambda s(x))u')' = r(\lambda s(x))u, \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты дифференциального уравнения зависят от спектрального параметра $\lambda \in \Lambda$. Пусть функции $p(\mu)$, $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ являются непрерывными положительными, функция $p(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ – неубывающая ограниченная, а функция $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ – неубывающая неограниченная. Предположим дополнительно, что производные $p'(\mu)$, $r'(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, существуют и непрерывны.

Задачу (1) сформулируем в эквивалентном виде как задачу о нахождении корня линейного уравнения. Пусть $\gamma(\mu)$ для фиксированного $\mu \in \Lambda$ обозначает наименьшее простое собственное значение, отвечающее положительной собственной функции $u(x) = u_\mu(x)$, $x \in \Omega$, параметрической линейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &-(p(\mu s(x))u')' = \gamma(\mu) r(\mu s(x))u, \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда наименьшее собственное значение $\lambda \in \Lambda$ задачи (1) определяется как наименьший корень характеристического уравнения

$$\gamma(\mu) = 1, \quad \mu \in \Lambda. \tag{3}$$

В работе [1] предложено простое достаточное условие существования собственного значения $\lambda \in \Lambda$ как корня характеристического уравнения (3) в терминах коэффициентов уравнения задачи (1). Это условие состоит в выполнении неравенства $p(0) > r(0)$. В разд. 1 настоящей статьи доказывается непрерывная дифференцируемость функции $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, и выводится формула для вычисления производной $\gamma'(\mu)$, $\mu \in \Lambda$. Доказательство основано на использовании вариационных формулировок задач (1) и (2) в гильбертовом пространстве. Установлено также необходимое и достаточное условие для существования собственного значения $\lambda \in \Lambda$ задачи (1). В разд. 2 определяется сеточная схема метода конечных элементов для решения задачи (1) как конечномерная аппроксимация вариационной задачи в гильбертовом пространстве. Доказаны оценки погрешности аппроксимации собственного значения $\lambda \in \Lambda$ задачи (1) и соответствующей собственной функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, при выполнении условия $\gamma'(\lambda) \neq 0$. В разд. 3 приведены результаты численных экспериментов для модельной задачи.

Задача вида (1) возникает при моделировании плазмы высокочастотного разряда пониженного давления [2–5]. Минимальное собственное значение, отвечающее положительной собственной функции, определяет условие, необходимое для поддержания стационарного высокочастотного индукционного разряда пониженного давления.

Приближенные методы решения задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &-(p(\lambda,x)u')' + q(\lambda,x)u = \lambda r(\lambda,x)u, \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(l) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

с коэффициентами, зависящими от спектрального параметра, изучались в работах [6–8]. В этих работах предполагалось, что функции $p(\mu,x) > 0$, $q(\mu,x) \geqslant 0$, $r(\mu,x) > 0$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$, $\Omega = (0,l)$, $\overline{\Omega} = [0,l]$, являются достаточно гладкими. Функции $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$, предполагались невозрастающими по первому аргументу $\mu \in \Lambda$, а функция $r(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$, – неубывающей по первому аргументу $\mu \in \Lambda$ при фиксированном $x \in \overline{\Omega}$.

Чтобы сформулировать задачу (4) в эквивалентном виде обозначим через $\gamma(\mu)$ для фиксированного $\mu \in \Lambda$ минимальное собственное значение, отвечающее положительной собственной функции $u(x) = u_\mu(x)$, $x \in \Omega$, параметрической линейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &-(p(\mu,x)u')' + q(\mu,x)u = \gamma(\mu) r(\mu,x)u, \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(l) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда минимальное собственное значение λ задачи (4) определяется как наименьший корень характеристического уравнения

$$\gamma(\mu) = \mu, \quad \mu \in \Lambda. \tag{6}$$

В работах [6, 7] исследована погрешность метода конечных разностей для задачи (4) при $r(\mu,x) = r(x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$. В [8] получены оценки погрешности метода конечных элементов для задачи (4). В этих случаях функция $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, невозрастающая и существует единственный корень уравнения (6). В отличие от работ [6–8], в настоящей статье функция $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, из характеристического уравнения (3) может быть немонотонной.

Задачи на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра имеют многочисленные приложения в науке и технике [9–18]. Вычислительные алгоритмы решения нелинейных спектральных задач исследовались в работах [9, 19–22]. Погрешность приближенных методов решения задач на собственные значения с монотонным и немонотонным вхождением спектрального параметра изучалась в работах [23–32]. Исследование погрешности приближенных методов решения нелинейных спектральных задач опирается на применение результатов для линейных задач на собственные значения [33–43].

1. Вариационная постановка задачи

Пусть $\Lambda = [0,\infty)$, $\Omega = (0,\pi)$, $H = L_2(\Omega)$ – вещественное гильбертово пространство Лебега с нормой $|\cdot|_0$ и со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ при

$$|v|_0 = \left(\int\limits_0^\pi (v(x))^2\,dx\right)^{1/2}, \quad (u,v)_0 = \int\limits_0^\pi u(x)v(x)\,dx \quad \forall\, u,\, v \in H.$$

Обозначим через $V = \{v : v, v' \in H, v(0) = v(\pi) = 0\}$ вещественное гильбертово пространство Соболева с нормой $|\cdot|_1$ и со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_1$ при

$$|v|_1 = \left(\int\limits_0^\pi (v'(x))^2\,dx\right)^{1/2}, \quad (u,v)_1 = \int\limits_0^\pi u'(x)v'(x)\,dx \quad \forall\, u,\, v \in V.$$

При фиксированном $\mu \in \Lambda$ определим билинейные формы

$$a(\mu,u,v) = \int\limits_0^\pi p(\mu s(x))u'v'\,dx, \quad b(\mu,u,v) = \int\limits_0^\pi r(\mu s(x))uv\,dx,$$

для $u,\, v \in V$ и отношение Рэлея

$$R(\mu,v) = \frac{a(\mu,v,v)}{b(\mu,v,v)} \quad \forall\, v \in V \setminus \{0\}.$$

Положим $K = \{v : v \in V,\ v(x) > 0,\ x \in \Omega\}$.

Дифференциальную задачу (1) представим в виде вариационной нелинейной задачи на собственные значения: найти минимальное число $\lambda \in \Lambda$ и функцию $u \in K$, $b(\lambda,u,u) = 1$, такие, что

$$a(\lambda,u,v) = b(\lambda,u,v) \quad \forall\, v \in V. \tag{7}$$

При фиксированном $\mu \in \Lambda$ введем вариационную линейную параметрическую задачу на собственные значения: найти число $\gamma(\mu)$ и функцию $u = u_\mu \in K$, $b(\mu,u,u) = 1$, такие, что

$$a(\mu,u,v) = \gamma(\mu)b(\mu,u,v) \quad \forall\, v \in V. \tag{8}$$

Для собственного значения задачи (8) справедлив вариационный принцип минимума

$$\gamma(\mu) = \min_{v\in V\setminus\{0\}} R(\mu,v).$$

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения: найти минимальное число $\varkappa$ и функцию $u \in K$, $(u,u)_0 = 1$, такие, что

$$(u,v)_1 = \varkappa(u,v)_0 \quad \forall\, v \in V. \tag{9}$$

Решения этой задачи определяются по формулам

$$\varkappa = 1, \quad u(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sin x, \quad x \in \overline{\Omega},$$

и выполняется принцип минимума

$$\varkappa = \min_{v\in V\setminus\{0\}} S(v)$$

с отношением Рэлея

$$S(v) = \frac{(v,v)_1}{(v,v)_0} \quad \forall\, v \in V \setminus \{0\}.$$

Обозначим через $\gamma_i(\mu)$, $u_i(\mu) = u_i(\mu, x)$, $x \in \overline{\Omega}$, $\mu \in \Lambda$, $i = 1, 2, \ldots$, собственные значения и собственные функции, удовлетворяющие уравнению (8) и такие, что $\gamma_1(\mu) < \gamma_2(\mu) < \cdots < \gamma_i(\mu) < \cdots$, $a(\mu, u_i(\mu), u_j(\mu)) = \gamma_i(\mu)\delta_{ij}$, $b(\mu, u_i(\mu), u_j(\mu)) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, $u_1(\mu) = u_\mu \in K$, $\gamma_1(\mu) = \gamma(\mu)$, $\gamma_i(\mu) \to \infty$ при $i \to \infty$; функции $u_i(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $i = 1, 2, \ldots$, образуют полную систему в пространстве V.

Положим

$$s_0 = \min_{x\in\overline{\Omega}} s(x), \quad s_1 = \max_{x\in\overline{\Omega}} s(x), \quad p_1 = \sup_{\mu\in\Lambda} p(\mu).$$

Для фиксированного $\nu \in \Lambda$ обозначим $\Delta = [0, \nu]$,

$$\alpha_1 = p(0), \quad \alpha_2 = \max_{\mu\in\Delta} p(\mu s_1), \quad \alpha_3 = \max_{\mu\in\Delta} p'(\mu s_1) s_1,$$

$$\beta_1 = r(0), \quad \beta_2 = \max_{\mu\in\Delta} r(\mu s_1), \quad \beta_3 = \max_{\mu\in\Delta} r'(\mu s_1) s_1.$$

Лемма 1. *Для $\mu, \eta \in \Delta$ справедливы неравенства*

$$\alpha_1 |v|_1^2 \leqslant a(\mu, v, v) \leqslant \alpha_2 |v|_1^2 \quad \forall\, v \in V,$$

$$\beta_1 |v|_0^2 \leqslant b(\mu, v, v) \leqslant \beta_2 |v|_0^2 \quad \forall\, v \in H,$$

$$|a(\mu, v, v) - a(\eta, v, v)| \leqslant \alpha_3 |\mu - \eta|\, |v|_1^2 \quad \forall\, v \in V,$$

$$|b(\mu, v, v) - b(\eta, v, v)| \leqslant \beta_3 |\mu - \eta|\, |v|_0^2 \quad \forall\, v \in H.$$

Доказательство. Используя соотношения

$$\alpha_1 \leqslant p(\mu s(x)) \leqslant \alpha_2, \quad |p(\mu s(x)) - p(\eta s(x))| \leqslant \alpha_3 |\mu - \eta|, \quad \mu, \eta \in \Delta, \quad x \in \overline{\Omega},$$

для любого $v \in V$ получаем

$$\alpha_1 |v|_1^2 \leqslant a(\mu, v, v) = \int_0^\pi p(\mu s(x))(v')^2\, dx \leqslant \alpha_2\, |v|_1^2,$$

$$|a(\mu, v, v) - a(\eta, v, v)| \leqslant \int_0^\pi |p(\mu s(x)) - p(\eta s(x))|(v')^2\, dx \leqslant \alpha_3 |\mu - \eta|\, |v|_1^2.$$

Аналогично устанавливаются свойства билинейной формы $b(\mu, \cdot, \cdot)$. □

Через σ будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от μ, $\eta \in \Delta$. Положим $\|v\|_{a(\mu)}^2 = a(\mu, v, v)$, $\|v\|_{b(\mu)}^2 = b(\mu, v, v)$ для $v \in V$, $\mu \in \Lambda$.

Лемма 2. *Если* $\mu, \eta \in \Delta$ *и величина* $|\mu-\eta|$ *достаточно мала, то существует постоянная* σ *, для которой справедливы оценки*

$$|\gamma_i(\mu)-\gamma_i(\eta)| \leqslant \sigma\,|\mu-\eta|, \quad i=1,2.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из [8] с учетом леммы 1. □

Лемма 3. *Если* $\mu, \eta \in \Delta$ *и величина* $|\mu-\eta|$ *достаточно мала, то существует постоянная* σ *, для которой выполняется оценка*

$$|u_\mu - u_\eta|_1 \leqslant \sigma\,|\mu-\eta|.$$

Доказательство. Зафиксируем $\mu \in \Delta$. Представим элемент $y = u_\mu = u_1(\mu)$ в виде разложения

$$y = \beta_1(\eta)u_1(\eta) + w_1(\eta),$$

где

$$w_1(\eta) = \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i(\eta)u_i(\eta), \quad \beta_i(\eta) = b(\eta, y, u_i(\eta)), \quad i=1,2,\ldots, \quad \eta \in \Delta.$$

Согласно лемме 2 выберем $\eta \in \Delta$ так, чтобы $\gamma_2(\eta)-\gamma_1(\mu) > 0$. Обозначим

$$\delta(\eta, v) = \sup_{w \in V\setminus\{0\}} \frac{|a(\eta,v,w)-\gamma_1(\mu)b(\eta,v,w)|}{\|w\|_{a(\eta)}}.$$

Докажем оценку

$$\|w_1(\eta)\|_{a(\eta)} \leqslant \frac{\gamma_2(\eta)}{\gamma_2(\eta)-\gamma_1(\mu)}\,\delta(\eta,y).$$

Нетрудно проверить, что

$$a(\eta, y, w_1(\eta)) = a(\eta, w_1(\eta), w_1(\eta)),$$

$$b(\eta, y, w_1(\eta)) = b(\eta, w_1(\eta), w_1(\eta)),$$

$$a(\eta, w_1(\eta), w_1(\eta)) \geqslant \gamma_2(\eta) b(\eta, w_1(\eta), w_1(\eta)).$$

Поэтому приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} a(\eta, y, w_1(\eta)) - \gamma_1(\mu) b(\eta, y, w_1(\eta)) &= \\ = a(\eta, w_1(\eta), w_1(\eta)) - \gamma_1(\mu) b(\eta, w_1(\eta), w_1(\eta)) &\geqslant \\ \geqslant \frac{\gamma_2(\eta)-\gamma_1(\mu)}{\gamma_2(\eta)} a(\eta, w_1(\eta), w_1(\eta)),& \end{aligned}$$

которые приводят к требуемой оценке.

Установленная оценка дает

$$\|y-\beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{a(\eta)} = \|w_1(\eta)\|_{a(\eta)} \leqslant \frac{\gamma_2(\eta)}{\gamma_2(\eta)-\gamma_1(\mu)}\,\delta(\eta,y) \leqslant \sigma\,|\mu-\eta|.$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \beta_1(\eta) = \|\beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{b(\eta)} &\leqslant \|u_1(\mu)\|_{b(\eta)} + \|u_1(\mu)-\beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{b(\eta)} \leqslant \\ &\leqslant \|u_1(\mu)\|_{b(\mu)} + \big|\,\|u_1(\mu)\|_{b(\eta)} - \|u_1(\mu)\|_{b(\mu)}\big| + \|u_1(\mu)-\beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{b(\eta)} \leqslant \\ &\leqslant 1 + \sigma\,|\mu-\eta|, \end{aligned}$$

$$\beta_1(\eta) = \|\beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{b(\eta)} \geqslant \|u_1(\mu)\|_{b(\eta)} - \|u_1(\mu) - \beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{b(\eta)} \geqslant$$
$$\geqslant \|u_1(\mu)\|_{b(\mu)} - \big|\, \|u_1(\mu)\|_{b(\eta)} - \|u_1(\mu)\|_{b(\mu)} \big| - \|u_1(\mu) - \beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{b(\eta)} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \sigma\,|\mu - \eta|,$$

поскольку

$$\big|\, \|u_1(\mu)\|_{b(\eta)} - \|u_1(\mu)\|_{b(\mu)} \big| = \frac{|b(\eta, u_1(\mu), u_1(\mu)) - b(\mu, u_1(\mu), u_1(\mu))|}{\|u_1(\mu)\|_{b(\eta)} + \|u_1(\mu)\|_{b(\mu)}} \leqslant \sigma\,|\mu - \eta|.$$

Следовательно,

$$|1 - \beta_1(\eta)| \leqslant \sigma\,|\mu - \eta|.$$

Таким образом, собирая предыдущие оценки, заключаем

$$\sqrt{\alpha_1}\,|u_\mu - u_\eta|_1 \leqslant \|u_1(\mu) - u_1(\eta)\|_{a(\eta)} \leqslant$$
$$\leqslant \|u_1(\mu) - \beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{a(\eta)} + \|u_1(\eta) - \beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{a(\eta)} =$$
$$= \|u_1(\mu) - \beta_1(\eta)u_1(\eta)\|_{a(\eta)} + \sqrt{\gamma(\eta)}\,|1 - \beta_1(\eta)| \leqslant \sqrt{\alpha_1}\,\sigma\,|\mu - \eta|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Для* $\mu \in \Lambda$ *имеет место равенство*

$$\gamma'(\mu) = \frac{d}{d\mu} R(\mu, v)$$

при $v = u_\mu$.

Доказательство. Для $\mu, \eta \in \Lambda$, $\mu \neq \eta$, справедливы соотношения

$$\frac{\gamma(\mu) - \gamma(\eta)}{\mu - \eta} =$$
$$= \frac{R(\mu, u_\mu) - R(\eta, u_\eta)}{\mu - \eta} = \frac{R(\mu, u_\mu) - R(\eta, u_\mu)}{\mu - \eta} + \frac{R(\eta, u_\mu) - R(\eta, u_\eta)}{\mu - \eta}.$$

Докажем, что

$$G(\eta) = \frac{R(\eta, u_\mu) - R(\eta, u_\eta)}{\mu - \eta} \to 0$$

при $\eta \to \mu$. Предположим, что существует последовательность $\eta' \to \mu$, для которой $|G(\eta)| > \sigma$ при $\eta = \eta' \to \mu$. Обозначим $\varepsilon = \mu - \eta$, $w = (u_\mu - u_\eta)/(\mu - \eta)$. Так как согласно лемме 3 выполняется неравенство $|w|_1 \leqslant \sigma$ при $\eta = \eta' \to \mu$, то существует подпоследовательность $\eta'' \to \mu$ такая, что $w \rightharpoonup \widetilde{w}$ в V при $\eta = \eta'' \to \mu$, где $\widetilde{w} \in V$, символ $\rightharpoonup$ обозначает слабую сходимость в гильбертовом пространстве V. Тогда получим

$$R(\eta, u_\mu) - R(\eta, u_\eta) = R(\eta, u_\mu) - R(\eta, u_\mu + \varepsilon w) =$$
$$= \frac{a(\eta, u_\mu, u_\mu)}{b(\eta, u_\mu, u_\mu)} - \frac{a(\eta, u_\mu + \varepsilon w, u_\mu + \varepsilon w)}{b(\eta, u_\mu + \varepsilon w, u_\mu + \varepsilon w)} = \frac{A(\eta)}{B(\eta)},$$

где

$$A(\eta) = 2\varepsilon A_1(\eta) + \varepsilon^2 A_2(\eta),$$
$$A_1(\eta) = a(\eta, u_\mu, u_\mu)\, b(\eta, u_\mu, w) - b(\eta, u_\mu, u_\mu)\, a(\eta, u_\mu, w),$$

$$A_2(\eta) = a(\eta, u_\mu, u_\mu)\, b(\eta, w, w) - b(\eta, u_\mu, u_\mu)\, a(\eta, w, w),$$
$$B(\eta) = b(\eta, u_\mu, u_\mu)\, b(\eta, u_\mu + \varepsilon w, u_\mu + \varepsilon w).$$

Учитывая, что

$$A_1(\eta) \to 0, \quad |A_2(\eta)| \leqslant \sigma,$$

получаем

$$A(\eta) \to 0, \quad B(\eta) \to 1,$$

при $\eta = \eta'' \to \mu$. В результате приходим к противоречию, так как

$$G(\eta) = \frac{2\varepsilon A_1(\eta) + \varepsilon^2 A_2(\eta)}{\varepsilon B(\eta)} \to 0$$

при $\eta = \eta'' \to \mu$.

Таким образом, заключаем

$$\gamma'(\mu) = \lim_{\eta\to\mu} \frac{\gamma(\mu) - \gamma(\eta)}{\mu - \eta} = \lim_{\eta\to\mu} \frac{R(\mu, u_\mu) - R(\eta, u_\mu)}{\mu - \eta} = \frac{d}{d\mu} R(\mu, v)$$

при $v = u_\mu$. Лемма доказана. □

Обозначим

$$a'(\mu, u, v) = \int_0^\pi p'(\mu s(x)) s(x) u' v'\, dx, \quad b'(\mu, u, v) = \int_0^\pi r'(\mu s(x)) s(x) u v\, dx,$$

для $\mu \in \Lambda$, $u, v \in V$.

Лемма 5. *Функция $\gamma'(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ является непрерывной и вычисляется по формуле*

$$\gamma'(\mu) = a'(\mu, v, v) - \gamma(\mu) b'(\mu, v, v)$$

при $\mu \in \Lambda$, $v = u_\mu$.

Доказательство. Для $v = u_\mu$ имеем

$$\gamma'(\mu) = \frac{d}{d\mu} R(\mu, v) = \left(\frac{a(\mu, v, v)}{b(\mu, v, v)}\right)' = \\ = \frac{a'(\mu, v, v)\, b(\mu, v, v) - a(\mu, v, v)\, b'(\mu, v, v)}{b^2(\mu, v, v)} = \\ = a'(\mu, v, v) - \gamma(\mu) b'(\mu, v, v).$$

Отсюда с помощью соотношений

$$\gamma(\eta) \to \gamma(\mu), \quad a'(\eta, u_\eta, u_\eta) \to a'(\mu, u_\mu, u_\mu), \quad b'(\eta, u_\eta, u_\eta) \to b'(\mu, u_\mu, u_\mu),$$

при $\eta \to \mu$ выводим, что $\gamma'(\eta) \to \gamma'(\mu)$ при $\eta \to \mu$. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Для существования наименьшего простого собственного значения задачи (7), отвечающего положительной собственной функции, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(\xi) > 1$ для некоторого $\xi \in \Lambda$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 функция $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, является непрерывной. Используя вариационные принципы минимума для наименьших собственных значений задач (8) и (9), получим

$$\gamma(\mu) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\mu, v) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_0^\pi p(\mu s(x))(v')^2\, dx}{\int\limits_0^\pi r(\mu s(x)) v^2\, dx} \leqslant \frac{p_1}{r(\mu s_0)}\, \varkappa = \frac{p_1}{r(\mu s_0)} \to 0$$

при $\mu \to \infty$, поскольку $r(\mu) \to \infty$ при $\mu \to \infty$. Поэтому для существования наименьшего корня $\lambda \in \Lambda$ уравнения (3) необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(\xi) > 1$ для некоторого $\xi \in \Lambda$. Корень $\lambda \in \Lambda$ определяет минимальное собственное значение задачи (7). Собственное значение $\lambda \in \Lambda$ является простым и отвечает положительной собственной функции, поскольку $\gamma(\mu)$ – простое собственное значение параметрической задачи (8) при $\mu = \lambda$, соответствующее положительной собственной функции. Теорема доказана. □

2. Сеточная схема метода конечных элементов

Зададим разбиение отрезка $[0, \pi]$ равноотстоящими точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, на элементы $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $h = \pi/n$. Пусть V_h есть подпространство пространства V, состоящее из непрерывных функций v^h, линейных на каждом элементе $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Размерность подпространства V_h есть $N_h = n - 1$. Обозначим $K_h = \{v^h : v^h \in V_h,\ v^h(x) > 0,\ x \in \Omega\}$.

Метод конечных элементов бесконечномерной вариационной задаче (7) ставит в соответствие конечномерную задачу: найти минимальное число $\lambda^h \in \Lambda$ и функцию $u^h \in K_h$, $b(\lambda^h, u^h, u^h) = 1$, такие, что

$$a(\lambda^h, u^h, v^h) = b(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \forall\, v^h \in V_h. \tag{10}$$

При фиксированном $\mu \in \Lambda$ введем конечномерную линейную параметрическую задачу на собственные значения: найти минимальное число $\gamma^h(\mu)$ и функцию $u^h = u^h_\mu \in K_h$, $b(\mu, u^h, u^h) = 1$, такие, что

$$a(\mu, u^h, v^h) = \gamma^h(\mu) b(\mu, u^h, v^h) \quad \forall\, v^h \in V_h. \tag{11}$$

Наименьшее собственное значение задачи (11) удовлетворяет принципу минимума

$$\gamma^h(\mu) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h).$$

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения: найти минимальное число $\varkappa^h$ и функцию $u^h \in K_h$, $(u^h, u^h)_0 = 1$, такие, что

$$(u^h, v^h)_1 = \varkappa^h (u^h, v^h)_0 \quad \forall\, v^h \in V_h. \tag{12}$$

Для этой задачи также выполняется принцип минимума

$$\varkappa^h = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} S(v^h).$$

Известно, что $1 \leqslant \varkappa^h \to 1$ при $h \to 0$.

Минимальное собственное значение λ^h задачи (10) является наименьшим корнем характеристического уравнения

$$\gamma^h(\mu) = 1, \quad \mu \in \Lambda. \tag{13}$$

Лемма 6. *Если μ, $\eta \in \Delta$ и величина $|\mu-\eta|$ достаточно мала, то существует постоянная σ, для которой справедливы оценки*

$$|\gamma_i^h(\mu)-\gamma_i^h(\eta)| \leqslant \sigma\,|\mu-\eta|, \quad i=1,2.$$

Лемма 7. *Если μ, $\eta \in \Delta$ и величина $|\mu-\eta|$ достаточно мала, то существует постоянная σ, для которой выполняется оценка*

$$|u_\mu^h-u_\eta^h|_1 \leqslant \sigma\,|\mu-\eta|.$$

Лемма 8. *Для $\mu\in\Lambda$ имеет место равенство*

$$(\gamma^h(\mu))' = \frac{d}{d\mu}R(\mu,v)$$

при $v=u_\mu^h$.

Лемма 9. *Функция $(\gamma^h(\mu))'$, $\mu\in\Lambda$ является непрерывной и вычисляется по формуле*

$$(\gamma^h(\mu))' = a'(\mu,v^h,v^h)-\gamma^h(\mu)\,b'(\mu,v^h,v^h)$$

при $\mu\in\Lambda$, $v^h=u_\mu^h$.

Леммы 6–9 доказываются аналогично леммам 2–5 соответственно.

Теорема 2. *Для существования наименьшего простого собственного значения задачи (10), отвечающего положительной собственной функции, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma^h(\xi)>1$ для некоторого $\xi\in\Lambda$.*

Доказательство. По лемме 6 функция $\gamma^h(\mu)$, $\mu\in\Lambda$, является непрерывной. Применяя вариационные принципы минимума для наименьших собственных значений задач (11) и (12), получаем

$$\gamma^h(\mu)=\min_{v^h\in V_h\setminus\{0\}}R(\mu,v^h)=\min_{v^h\in V_h\setminus\{0\}}\frac{\int\limits_0^\pi p(\mu s(x))((v^h)')^2\,dx}{\int\limits_0^\pi r(\mu s(x))(v^h)^2\,dx}\leqslant\frac{p_1}{r(\mu s_0)}\,\varkappa^h\to 0$$

при $\mu\to\infty$, поскольку $r(\mu)\to\infty$ при $\mu\to\infty$. Поэтому для существования наименьшего корня $\lambda^h\in\Lambda$ уравнения (13) необходимо и достаточно, чтобы $\gamma^h(\xi)>1$ для некоторого $\xi\in\Lambda$. Корень $\lambda^h\in\Lambda$ определяет минимальное собственное значение задачи (10). Собственное значение $\lambda^h\in\Lambda$ является простым и отвечает положительной собственной функции, поскольку $\gamma^h(\mu)$ – простое собственное значение параметрической задачи (11) при $\mu=\lambda^h$, соответствующее положительной собственной функции. Теорема доказана. □

Через c будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от h. Для фиксированного $\mu\in\Lambda$ введем оператор $P_h(\mu):V\to V_h$ по правилу $a(\mu,u-P_h(\mu)u,v^h)=0$ для любого $v^h\in V_h$, где $u\in V$, $|u-P_h(\mu)u|_1\leqslant ch$. Положим $P_h=P_h(\lambda)$.

Обозначим через $\gamma_i^h(\mu)$ и $u_i^h(\mu)=u_i^h(\mu,x)$, $x\in\overline{\Omega}$, $\mu\in\Lambda$, $i=1,2,\ldots,N_h$, собственные значения и собственные функции, удовлетворяющие уравнению (11) и такие, что $\gamma_1^h(\mu)<\gamma_2^h(\mu)<\cdots<\gamma_{N_h}^h(\mu)$, $a(\mu,u_i^h(\mu),u_j^h(\mu))=\gamma_i^h(\mu)\delta_{ij}$,

$b(\mu, u_i^h(\mu), u_j^h(\mu)) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots,N_h$, $u_1^h(\mu) = u_\mu^h \in K_h$, $\gamma_1^h(\mu) = \gamma^h(\mu)$; функции $u_i^h(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $i = 1,2,\ldots,N_h$, образуют полную систему в пространстве V_h. Для $\mu \in \Lambda$ и достаточно малых h выполняются оценки $0 \leqslant \gamma_i^h(\mu) - \gamma_i(\mu) \leqslant ch^2$, $i = 1,2$, $|u_\mu^h - u_\mu|_1 \leqslant ch$.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma'(\lambda) \neq 0$. *Тогда для достаточно малых* h *выполняется оценка*

$$0 \leqslant \lambda^h - \lambda \leqslant ch^2.$$

Доказательство. Имеем, что $(\gamma^h(\mu))' \to \gamma'(\mu)$ при $h \to 0$. Действительно,

$$(\gamma^h(\mu))' = a'(\mu, v^h, v^h) - \gamma^h(\mu)\, b'(\mu, v^h, v^h) \to a'(\mu, v, v) - \gamma(\mu)\, b'(\mu, v, v) = \gamma'(\mu)$$

при $h \to 0$, $\mu \in \Lambda$, $v^h = u_\mu^h$, $v = u_\mu$, так как $\gamma^h(\mu) \to \gamma(\mu)$, $u_\mu^h \to u_\mu$ в V при $h \to 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\lambda^h \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ при достаточно малых h, и существует $\xi^h \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ такое, что

$$c_1(\lambda^h - \lambda) \leqslant -(\gamma^h(\xi^h))'(\lambda^h - \lambda) = \gamma^h(\lambda) - \gamma^h(\lambda^h) = \gamma^h(\lambda) - \gamma(\lambda) \leqslant c_2 h^2$$

при достаточно малых h, поскольку $-(\gamma^h(\mu))' \geqslant c_1$ для $\mu \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ и достаточно малых h, $\gamma^h(\lambda^h) = \gamma(\lambda) = 1$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть* $\gamma'(\lambda) \neq 0$, u *– положительная собственная функция задачи* (7), u^h *– приближение по схеме* (10). *Тогда для достаточно малых* h *выполняется оценка*

$$|u^h - u|_1 \leqslant ch.$$

Доказательство. Положим $\beta_i^h = b(\lambda^h, P_h u, y_i^h)$, $i = 1,2,\ldots,N_h$, где $y_i^h = u_i^h(\lambda^h)$, $i = 1,2,\ldots,N_h$. Поскольку элементы y_i^h, $i = 1,2,\ldots,N_h$ образуют ортонормированный базис в пространстве V_h, то элемент $P_h u \in V_h$ можно представить в виде

$$P_h u = \beta_1^h y_1^h + w_1^h,$$

где

$$w_1^h = \sum_{i=2}^{N_h} \beta_i^h y_i^h.$$

Поскольку $\gamma_2(\lambda) - \gamma_1(\lambda) > 0$, то

$$\begin{aligned}\gamma_2^h(\lambda^h) - 1 = \gamma_2^h(\lambda^h) - \gamma_1(\lambda) &= \\ = (\gamma_2(\lambda) - \gamma_1(\lambda)) + (\gamma_2^h(\lambda^h) - \gamma_2^h(\lambda)) &+ (\gamma_2^h(\lambda) - \gamma_2(\lambda)) \geqslant \\ &\geqslant (\gamma_2(\lambda) - \gamma_1(\lambda)) - ch^2 \geqslant c\end{aligned}$$

для достаточно малых h. Обозначим

$$\zeta_h(u) = \sup_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a(\lambda^h, P_h u, v^h) - \lambda b(\lambda^h, P_h u, v^h)|}{|v^h|_1}.$$

Тогда $\zeta_h(u) \leqslant ch$.

Докажем оценку

$$|w_1^h|_1 \leqslant c\, \zeta_h(u).$$

Нетрудно проверить, что

$$a(\lambda^h, P_h u, w_1^h) = a(\lambda^h, w_1^h, w_1^h),$$

$$b(\lambda^h, P_h u, w_1^h) = b(\lambda^h, w_1^h, w_1^h),$$

$$a(\lambda^h, w_1^h, w_1^h) \geqslant \gamma_2^h(\lambda^h) b(\lambda^h, w_1^h, w_1^h).$$

Поэтому

$$|w_1^h|\,\zeta_h(u) \geqslant a(\lambda^h, P_h u, w_1^h) - b(\lambda^h, P_h u, w_1^h) = \\ = a(\lambda^h, w_1^h, w_1^h) - b(\lambda^h, w_1^h, w_1^h) \geqslant \\ \geqslant \frac{\gamma_2^h(\lambda^h) - 1}{\gamma_2^h(\lambda^h)}\, a(\lambda^h, w_1^h, w_1^h) \geqslant c^{-1}\,|w_k^h|_1^2.$$

Отсюда получим требуемую оценку.

Теперь, используя доказанные выше оценки, имеем

$$|P_h u - \beta_1^h y_1^h|_1 = |w_1^h|_1 \leqslant c\,\zeta_h(u) \leqslant ch$$

при достаточно малых h. Кроме того,

$$\beta_1^h = \|\beta_1^h y_1^h\|_{b(\lambda^h)} \leqslant \|u\|_{b(\lambda)} + \big|\, \|u\|_{b(\lambda)} - \|u\|_{b(\lambda^h)} \big| + \|u - \beta_1^h y_1^h\|_{b(\lambda^h)} \leqslant 1 + ch,$$

$$\beta_1^h = \|\beta_1^h y_1^h\|_{b(\lambda^h)} \geqslant \|u\|_{b(\lambda)} - \big|\, \|u\|_{b(\lambda)} - \|u\|_{b(\lambda^h)} \big| - \|u - \beta_1^h y_1^h\|_{b(\lambda^h)} \geqslant 1 - ch,$$

поскольку

$$\big|\, \|u\|_{b(\lambda)} - \|u\|_{b(\lambda^h)} \big| \leqslant \frac{\|u\|_{b(\lambda)}^2 - \|u\|_{b(\lambda^h)}^2}{\|u\|_{b(\lambda)} + \|u\|_{b(\lambda^h)}} \leqslant c\,(\lambda^h - \lambda) \leqslant ch^2,$$

$$\|u - \beta_1^h y_1^h\|_{b(\lambda^h)} \leqslant c\sqrt{\beta_2}\,|u - \beta_1^h y_1^h|_1 \leqslant c\sqrt{\beta_2}(|u - P_h u|_1 + |P_h u - \beta_1^h y_1^h|_1) \leqslant ch.$$

Следовательно, выводим $|1 - \beta_1^h| \leqslant ch$.

В результате заключаем

$$\sqrt{\alpha_1}|u^h - u|_1 \leqslant \|u - y_1^h\|_{a(\lambda^h)} \leqslant \|u - \beta_1^h y_1^h\|_{a(\lambda^h)} + \|y_1^h - \beta_1^h y_1^h\|_{a(\lambda^h)} = \\ = \|u - \beta_1^h y_1^h\|_{a(\lambda^h)} + |1 - \beta_1^h| \leqslant ch.$$

Теорема доказана. □

3. Численные эксперименты

Для дифференциальной задачи на собственные значения (1) определим коэффициенты по формулам $s(x) = \sqrt{\pi - x} + 1,\ x \in \overline{\Omega}$,

$$p(\mu) = \begin{cases} -\mu^3 + \mu^2 + \mu + 2, & \mu \in [0,1], \\ 3, & \mu \in (1,\infty), \end{cases} \qquad r(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \in [0,1], \\ (\mu-1)^2/2 + 1, & \mu \in (1,\infty). \end{cases}$$

В данном случае функции $p(\mu)$, $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, являются непрерывно дифференцируемыми, $p(0) = 2$, $r(0) = 1$,

$$\gamma(0) = \frac{p(0)}{r(0)} = 2 > 1.$$

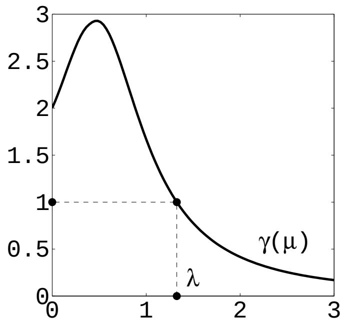

Рис. 1. Минимальное собственное значение λ

Табл. 1

Скорость сходимости

n	α
10	1.999309
20	1.999832
50	1.999973
100	1.999993
200	1.999998
300	2.000004

На рис. 1 представлен график функции $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, задачи (2) и отмечено наименьшее простое собственное значение $\lambda = 1.3248$ задачи (1). Этот рисунок служит иллюстрацией к теореме 1 о необходимом и достаточном условии существования собственного значения, отвечающего положительной собственной функции.

В табл. 1 приведены значения порядка сходимости приближенного собственного значения λ^h, найденные по формуле

$$\alpha = \log_2 \frac{\lambda^h - \lambda^{h/2}}{\lambda^{h/2} - \lambda^{h/4}},$$

для $h = \pi/n$, $n = 10,\ 20,\ 50,\ 100,\ 200,\ 300$, так, что $\lambda^h - \lambda \approx ch^\alpha$. Экспериментальные результаты табл. 1 согласуются с теоретическими результатами теоремы 3, а именно $\alpha \approx 2$ при $n = 10,\ 20,\ 50,\ 100,\ 200,\ 300$.

Собственное значение $\lambda = 1.3248$ дифференциальной задачи получено как предельное значение приближений λ^h при $h \to 0$. Отметим, что точное собственное значение $\lambda = 1.3248$ совпадает с приближенным собственным значением λ^h при $n = 1000$ с приведенной точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Гумбольдта (Alexander von Humboldt Foundation) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00908, 14-01-00755, 15-41-02672).

Summary

V.S. Zheltukhin, S.I. Solov'ev, P.S. Solov'ev. Approximation of the Minimal Eigenvalue for a Nonlinear Sturm–Liouville Problem.

Properties of the minimal eigenvalue corresponding to the positive eigenfunction of a nonlinear eigenvalue problem for an ordinary differential equation are studied. This problem is approximated by a mesh scheme of the finite element method. The error of approximate solutions is investigated. Theoretical results are illustrated by numerical experiments for a model eigenvalue problem.

Keywords: eigenvalue, positive eigenfunction, nonlinear eigenvalue problem, ordinary differential equation, Sturm–Liouville problem, finite element method.

Литература

1. *Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю.* Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма – Лиувилля // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 3. – С. 91–104.
2. *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф.* Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2000. – 348 с.
3. *Желтухин В.С.* О разрешимости одной нелинейной спектральной задачи теории высокочастотных разрядов пониженного давления // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 5. – С. 26–31.
4. *Желтухин В.С.* Об условиях разрешимости системы краевых задач теории высокочастотной плазмы пониженного давления // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 1. – С. 52–57.
5. *Желтухин В.С., Ольков Е.В.* О разрешимости одной нелинейной задачи Штурма–Лиувилля // Исслед. по прикл. матем. и информатике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2004. – Вып. 25. – С. 59–65.
6. *Гулин А.В., Крегжде А.В.* Разностные схемы для некоторых нелинейных спектральных задач. Препринт № 153. – М.: ИПМ АН СССР, 1981. – 28 с.
7. *Крегжде А.В.* О разностных схемах для нелинейной задачи Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 7. – С. 1280–1284.
8. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от параметра // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 7. – С. 955–962.
9. *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. – Saarbrücken: LAP Lambert Acad. Publ., 2011. – 256 с.
10. *Goolin A.V., Kartyshov S.V.* Numerical study of stability and nonlinear eigenvalue problems // Surv. Math. Ind. – 1993. – V. 3. – P. 29–48.
11. *Apel Th., Sändig A.-M., Solov'ev S.I.* Computation of 3D vertex singularities for linear elasticity: Error estimates for a finite element method on graded meshes // Math. Model. Numer. Anal. – 2002. – V. 36, No 6. – P. 1043–1070.
12. *Lyashko A.D., Solov'yev S.I.* Fourier method of solution of FE systems with Hermite elements for Poisson equation // Sov. J. Numer. Anal. Math. Model. – 1991. – V. 6, No 2. – P. 121–129.
13. *Solov'ev S.I.* A fast direct method of solving Hermitian fourth-order finite-element schemes for the Poisson equation // J. Math. Sci. – 1995. – V. 74, No 6. – P. 1371–1376.
14. *Solov'ev S.I.* Fast direct methods of solving finite-element grid schemes with bicubic elements for the Poisson equation // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71, No 6. – P. 2799–2804.
15. *Жигалко Ю.П., Ляшко А.Д., Соловьёв С.И.* Колебания цилиндрической оболочки с присоединёнными жёсткими кольцевыми элементами // Моделирование в механике. – 1988. – Т. 2, № 2. – С. 68–85.

16. *Жигалко Ю.П., Соловьёв С.И.* Собственные колебания балки с гармоническим осциллятором // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 10. – С. 36–38.

17. *Карчевский Е.М., Соловьёв С.И.* Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 4. – С. 563–565.

18. *Карчевский Е.М., Соловьёв С.И.* Существование собственных значений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 3. – С. 78–80.

19. *Гулин А.В., Крегжде А.В.* О применимости метода бисекции к решению нелинейных разностных задач на собственные значения. Препринт № 8. – М.: ИПМ АН СССР, 1982. – 22 с.

20. *Гулин А.В., Яковлева С.А.* О численном решении одной нелинейной задачи на собственные значения // Вычислительные процессы и системы. – М.: Наука, 1988. – Вып. 6. – С. 90–97.

21. *Dautov R.Z., Lyashko A.D., Solov'ev S.I.* The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. – 1994. – V. 9, No 5. – P. 417–427.

22. *Solov'ëv S.I.* Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems // Linear Algebra Appl. – 2006. – V. 415, No 1. – P. 210–229.

23. *Вайникко Г.М., Карма О.О.* О быстроте сходимости приближённых методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1974. – Т. 14, № 6. – С. 1393–1408.

24. *Карма О.О.* Асимптотические оценки погрешности приближённых характеристических значений голоморфных фредгольмовых оператор-функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1971. – Т. 11, № 3. – С. 559–568.

25. *Карма О.О.* Об аппроксимации оператор-функций и сходимости приближённых собственных значений // Труды ВЦ Тарт. гос. ун-та. – Тарту: ВЦ ТГУ, 1971. – Вып. 24. – С. 3–143.

26. *Карма О.О.* О сходимости дискретизационных методов отыскания собственных значений интегральных и дифференциальных операторов, голоморфно зависящих от параметра // Труды ВЦ Тарт. гос. ун-та. – Тарту: ВЦ ТГУ, 1971. – Вып. 24. – С. 144–159.

27. *Соловьёв С.И.* Погрешность метода Бубнова – Галёркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1992. – Т. 32, № 5. – С. 675–691.

28. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Матем. – 1993. – № 10. – С. 60–68.

29. *Соловьёв С.И.* Оценки погрешности метода конечных элементов для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 9. – С. 70–77.

30. *Соловьёв С.И.* Метод конечных элементов для симметричных задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – Т. 37, № 11. – С. 1311–1318.

31. *Даутов Р.З., Ляшко А.Д., Соловьёв С.И.* Сходимость метода Бубнова–Галёркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 7. – С. 1144–1153.

32. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 7. – С. 937–950.

33. *Вайникко Г.М.* Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1964. – Т. 4, № 3. – С. 405–425.

34. *Вайникко Г.М.* Оценки погрешности метода Бубнова – Галёркина в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1965. – Т. 5, № 4. – С. 587–607.

35. *Вайникко Г.М.* О быстроте сходимости приближённых методов в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1967. – Т. 7, № 5. – С. 977–987.

36. *Соловьёв С.И.* Метод конечных элементов для несамосопряженных спектральных задач // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 51–62.

37. *Соловьёв С.И.* Суперсходимость конечно-элементных аппроксимаций собственных функций // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 1230–1238.

38. *Соловьёв С.И.* Суперсходимость конечно-элементных аппроксимаций собственных подпространств // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 710–711.

39. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация вариационных задач на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 7. – С. 1022–1032.

40. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация неотрицательно-определенных спектральных задач // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 8. – С. 1075–1082.

41. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация знаконеопределенных спектральных задач // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 7. – С. 1042–1055.

42. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 7. – С. 936–944.

43. *Solov'ëv S.I.* Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Appl. Numer. Math. – 2015. – V. 93. – P. 206–214.

Поступила в редакцию
06.04.15

Желтухин Виктор Семёнович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *vzheltukhin@gmail.com*

Соловьёв Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *sergei.solovyev@kpfu.ru*

Соловьёв Павел Сергеевич – студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.