ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 02 ноября 2022 г.

Аннотация: *Критерий Ю.Л.Ершова об отделимости нумерации вычислимого семейства вычислимо перечислимых множеств. Теорема об аппроксимируемости отделимых алгебр эффективно отделимыми. Условия конечности для отделимых алгебр.* Π^0_2*-представления.*

Эффективно отделимые нумерации

Следуя Ю.Л.Ершову приведем ряд основных определений. Если M – произвольное не более чем счетное множество и ν – отображение множества натуральных чисел ω на M, то пара (M, ν) называется нумерованным множеством, а отображение ν – нумерацией множества M. Нумерационной эквивалентностью нумерованного множества (M, ν) называется ядро отображения ν, т.е. $\{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$. Пусть η – эквивалентность на ω. Подмножество γ множества натуральных чисел ω называется η-замкнутым, если γ вместе с каждым числом содержит и все ему η-эквивалентные, т.е. $x \in \gamma$ и $x = y$ $(mod\ \eta)$ $\to y \in \gamma$. Нумерация ν вычислимо перечислимых множеств называется вычислимой, если вычислимо перечислимым является множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in \nu x\}$. Эквивалентность η называется отделимой, если всякая пара различных ее смежных классов отделяется подходящим η-замкнутым вычислимо перечислимым множеством, т.е. для любых не η-эквивалентных x и y существует такое η-замкнутое вычислимо перечислимое множество α, что $(x \in \alpha \wedge y \notin \alpha) \vee (y \in \alpha \wedge x \notin \alpha)$.

Эффективно отделимые нумерации

Аналогично, нумерация называется отделимой, если таковой является ее нумерационная эквивалентность. Если (M, ν) – нумерованное множество, то подмножество $M_0 \subseteq M$ называется ν-вполне перечислимым (ν-вполне вычислимым), если вычислимо перечислимым (вычислимым) является множество $\{x \mid \nu x \in M_0\}$ всех ν-номеров элементов множества M_0. С нумерованным множеством (M, ν) естественным образом связаны два топологических пространства, в одном из которых базу открытых множеств составляют ν-вполне перечислимые подмножества множества M, а во втором – его ν-вполне вычислимые подмножества. Будем называть первое из этих пространств ν-эффективно порожденным, а второе – ν-вычислимо порожденным. Далее, если из контекста ясно о какой нумерации ν идет речь, соответствующее пространство будем называть просто эффективно (вычислимо) порожденным, без приставки ν. Точно так же, будем использовать термины вполне перечислимый (вполне вычислимый) имея в виду фиксированную нумерацию ν.

Эффективно отделимые нумерации

Иногда, для краткости, вполне перечислимые (вполне вычислимые) множества будем называть перечислимыми (вычислимыми). Последовательность $A_0, A_1, \ldots$ вычислимо перечислимых множеств называется вычислимой, если вычислимо перечислимым является множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in A_x\}$. Эквивалентность η называется эффективно отделимой, если для нее существует вычислимая последовательность η-замкнутых вычислимо перечислимых отделяющих множеств. Аналогично, нумерация называется эффективно отделимой, если таковой является ее нумерационная эквивалентность.

Замечание относительно терминологии. Поскольку центральным понятием работы является понятие вычислимой (в смысле Ю.Л.Ершова!) нумерации, то мы будем избегать применения прилагательного "вычислимый" как синонима "алгоритмически разрешимый", предпочитая использовать в последнем случае термин "рекурсивный".

Точно так же, вместо ныне общепринятого термина "вычислимо перечислимый" будем употреблять его классический синоним "рекурсивно перечислимый", что позволит избежать терминологических недоразумений.

Определение 1

Нумерация ν семейства вычислимых множеств $\Re$ называется вполне вычислимой, если вычислимым является множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in \nu x, x \in \omega, \nu x \in \Re\}$.

Эквивалентность η называется вычислимо отделимой, если любая пара натуральных чисел, различных по ее модулю, отделяется подходящим η-замкнутым вычислимым множеством. Аналогично, нумерация называется вычислимо отделимой, если таковой является ее ядро (нумерационная эквивалентность).

Эффективно отделимые нумерации

Эквивалентность η назовем вполне отделимой, если для нее существует вычислимо перечислимая по индексам характеристических функций последовательность $R_0, R_1, \ldots$ рекурсивных отделяющих множеств.

Неформально, вычислимость нумерации семейства перечислимых множеств равносильна наличию эффективной процедуры, которая по номеру вычислимо перечислимого множества перечисляет элементы данного множества. Вполне вычислимость же означает существование алгоритма, который по номеру вычислимого множества "выдает" алгоритм разрешения этого множества. Таким образом, если вычислимость подразумевает возможность перечисления семейства по рекурсивно перечислимым индексам, то вполне вычислимость означает вычислимую перечислимость данного семейства по индексам характеристических функций его элементов. В частности, если семейство вычислимо перечислимых множеств содержит хотя бы одно нерекурсивное множество, то для него заведомо бессмысленна постановка вопроса о существовании вполне вычислимой нумерации.

Эффективно отделимые нумерации

Одним из центральных результатов для эффективно отделимых нумераций является следующий (Ю.Л.Ершов, ТН, Глава 1, §3, Предложение 8, с.60):
Эквивалентность эффективно отделима тогда и только тогда, когда она является нумерационной эквивалентностью вычислимой нумерации подходящего семейства рекурсивно перечислимых множеств.
При этом, нумерационные эквивалентности вычислимых нумераций не имеют четкой характеризации в арифметической иерархии Клини-Мостовского. Так, пусть E_0 – класс эффективно отделимых эквивалентностей на ω. Тогда E_0 содержит позитивные (Σ^0_1) и негативные (Π^0_1) эквивалентности и $E_0 \subset \Pi^2_0$. Однако для $\Delta^2_0 = \Sigma^2_0 \bigcap \Pi^2_0$ имеет место как $\Delta^2_0 \setminus E_0 \neq \varnothing$, так и $E_0 \setminus \Delta^2_0 \neq \varnothing$.
Следующая теорема показывает, что для вполне вычислимых нумераций их нумерационные эквивалентности в точности совпадают с классом негативных эквивалентностей.

Теорема о вполне вычислимых нумерациях (ТВВН)

Для произвольной эквивалентности η на ω следующие условия равносильны:
(1) η – нумерационная эквивалентность подходящей вполне вычислимой нумерации;
(2) η – негативна;
(3) η – вполне отделима.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Пусть ν – вполне вычислимая нумерация подходящего семейства $\Re$ рекурсивных множеств и η – нумерационная эквивалентность нумерации ν. Тогда $x \neq y \ (mod\ \eta)$ $\leftrightarrow \exists m(m \in \nu x \setminus \nu y \vee m \in \nu y \setminus \nu x)$, где правая часть соотношения вычислимо перечислима в силу равномерной вычислимости отношения $p \in \nu q$ по p, q.

(2)$\Rightarrow$(3). Пусть η – негативная эквивалентность. Еще А.И.Мальцевым отмечалась рекурсивная отделимость любых двух различных η-классов негативной эквивалентности. В действительности, отделяющие множества можно выбирать среди η-замкнутых, причем процедура предоставления характеристического индекса соответствующего множества равномерно зависит от пар чисел, различных по модулю η. Поэтому вычислимо перечислимое множество пар чисел, различных по модулю η, определяет вполне вычислимую последовательность η-замкнутых рекурсивных отделяющих множеств.

(3)$\Rightarrow$(1). Пусть $R_0, R_1, \ldots$ – вполне отделяющая последовательность для η. Построим нумерацию ν некоторого семейства рекурсивных множеств, определенную следующим образом: $\nu x = \{n \mid x \in R_n\}$. Очевидно, что ν – вполне вычислимая нумерация. Покажем, что нумерационная эквивалентность этой нумерации есть η. В самом деле, если x=y $(mod\ \eta)$, то, в силу η-замкнутости всех множеств из отделяющей последовательности, каждое множество содержащее x (y) одновременно содержит и y (соответственно x), т.е. $\nu x = \nu y$. Если же x$\neq$y $(mod\ \eta)$, то для них найдется отделяющий член последовательности, скажем $x \in R_n$ и $y \notin R_n$, поэтому объекты, нумеруемые числами x и y, являются различными, т.к. $n \in \nu x$ и $n \notin \nu y$. *Теорема доказана.*

Под нумерацией произвольной не более чем счетной алгебры A вычислимой сигнатуры понимается любое отображение ν из ω на A такое, что для всякого символа операции F местности n из сигнатуры алгебры A по номеру символа F и любым $a_1, \ldots, a_n \in \omega$ эффективно находится некоторое $a \in \omega$ такое, что $F(\nu a_1, \ldots, \nu a_n) = \nu a$ (т.е. по номеру символа F эффективно строится алгоритм вычисления такой n-местной вычислимой функции f, представляющей операцию F алгебры A в нумерации ν, что $F(\nu a_1, \ldots, \nu a_n) = \nu f(a_1, \ldots, a_n)$). Заметим, что, вообще говоря, не всякая нумерация основного множества алгебры A является нумерацией этой алгебры.

Эффективно отделимые нумерации

Пусть η – эквивалентность на ω. Будем говорить, что алгебра A вычислимой сигнатуры представима (или определима) над η, если существует нумерация этой алгебры (в смысле приведенного выше определения) с нумерационной эквивалентностью (ядром) равной η. Легко заметить, что представимость (определимость) алгебры А над эквивалентностью η равносильна существованию такого вычислимого семейства $\Im$ общерекурсивных функций, согласованных с η (т.е. из η-эквивалентности наборов аргументов любой вычислимой функции из $\Im$ следует η-эквивалентность соответствующих значений), что алгебра A изоморфна фактор-алгебре вычислимой алгебры $(\omega; \Im)$ по конгруэнции η. Хотя, как отмечено выше, в современной теории вычислимых структур вычислимость семейства $\Im$ вообще говоря не требуется, для большинства приводимых ниже результатов это условие необходимо.

Как обычно, в рамках понятий универсальной алгебры, из согласованности всех $\Im$-операций с эквивалентностью η (или, что равносильно, из того, что эквивалентность η есть конгруэнция рекурсивной алгебры $(\omega; \Im)$) следует корректная определенность фактор-алгебры $(\omega/\eta; \Im)$, т.к. действия $\Im$-операций на фактор-множестве ω/η определены однозначно. Это позволяет обосновать запись $(\omega/\eta; \Im)$. Уместно отметить, что рекурсивные алгебры вида $(\omega; \Im)$, где $\Im$ – произвольное вычислимое семейство общерекурсивных функций, играют в теории вычислимости универсальных алгебр роль абсолютно свободных объектов, т.к. образуют тот исходный материал, из которого строится любая нумерованная алгебра путем подходящей факторизации. Поскольку всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию (например, индуцированную геделевской нумерацией абсолютно свободной алгебры данной сигнатуры от счетного множества свободных порождающих), то всякая такая алгебра представима (определима) над некоторой эквивалентностью на ω.

Эффективно отделимые нумерации

Известно, что существуют нетривиальные позитивные эквивалентности, над которыми представимы только тривиальные алгебры в следующем смысле. Очевидно, что функции–константы и проектирующие функции (и только они) согласованы с любой эквивалентностью. Существует позитивная эквивалентность с бесконечным числом смежных классов, по модулю которой всякая согласованная с этой эквивалентностью вычислимая функция действует либо как константа, либо как проектирующая. Пример такой эквивалентности можно найти в (Ю.Л.Ершов, ТН, Глава 3, §6, с.296–299). Для негативных эквивалентностей ситуация диаметрально противоположная, как показывает

Следствие

Над всякой негативной эквивалентностью представима конгруэнц-простая алгебра.

Эффективно отделимые нумерации

Для доказательства, используя вполне отделяющую последовательность, для каждой пары различных по модулю данной эквивалентности чисел определим эффективное семейство унарных вычислимых функций, корректно (т.е. сопоставляющих эквивалентным наборам аргументов эквивалентные значения) отображающих данную пару во все другие пары. Данная процедура, равномерно зависящая от вычислимо перечислимого множества пар, различных по модулю нумерационной эквивалентности элементов, очевидно, наделяет фактор-множество по данной негативной эквивалентности структурой простой алгебры.

ТВВН позволяет давать более прямые и краткие описания важных свойств негативных эквивалентностей. Например, имет место

Предложение 1

Эквивалентность негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно вычислимо отделимой эквивалентностью с вычислимо перечислимой характеристической трансверсалью.

Доказательство дадим с умеренной степенью детализации.
Если эквивалентность η негативна, то, по ТВВН, она вполне отделима, т.е. для нее существует перечислимая по индексам характеристических функций последовательность $R_0, R_1, \ldots$ η-замкнутых вычислимых отделяющих множеств. Тогда частичная вычислимая функция f, определенная следующим образом:
$f(x, y) = \mu n((x \in R_n \wedge y \notin R_n) \vee (y \in R_n \wedge x \notin R_n))$, где μ – оператор минимизации, определена на каждой паре чисел x, y, различных по модулю η, и "выдает" в качестве значения число n, позволяющее эффективно распознавать принадлежность любого числа множеству R_n. Вычислимая перечислимость характеристической трансверсали негативной эквивалентности очевидна. Обратно, пусть η – равномерно вычислимо отделимая эквивалентность с вычислимо перечислимой характеристической трансверсалью $tr(\eta)$, $t_0, t_1, \ldots$ – фиксированный эффективный пересчет множества $tr(\eta)$, f – функция из определения равномерно рекурсивной отделимости.

Определим последовательность η-замкнутых вычислимых множеств $R_0, R_1, \ldots$ следующим образом. Пусть g – взаимно однозначное вычислимое отображение множества пар натуральных чисел $\{\langle x, y\rangle \mid x \neq y\}$ на ω. Если $m \neq n$, то $f(t_m, t_n)$ определено и его значение есть индекс характеристической функции η-замкнутого вычислимого множества, отделяющего любое число $x = t_m \ (mod\ \eta)$ от $y = t_n \ (mod\ \eta)$. Назовем номером этого множества R число $g(m, n)$. Тогда $R_0, R_1, \ldots$ является вполне отделяющей последовательностью для η и, по теореме о ВВН, η является негативной. *Предложение доказано.*

Эффективно отделимые нумерации

Нумерованную алгебру назовем отделимой (эффективно отделимой), если таковой является ее нумерационная эквивалентность. Под гомоморфизмами нумерованных алгебр понимаются обычные гомоморфизмы, одновременно являющиеся морфизмами соответствующих нумерованных множеств, т.е. если (A, ν) и (B, μ) – две нумерованные алгебры одной сигнатуры и φ – гомоморфизм из A в B, то предполагается существование такой вычислимой функции f, что $\varphi\nu = \mu f$. Покажем, что для нумерованной алгебры (A, ν) все операции алгебры A, представленные вычислимыми операциями в нумерации ν (точнее, их действиями, индуцированными на классах нумерационной эквивалентности), являются непрерывными как в ν-эффективно порожденном, так и в ν-вычислимо порожденном пространствах. Для одноместных операций это очевидно, т.к. прообразы ν-вполне перечислимых (ν-вполне вычислимых) множеств являются таковыми же. Докажем этот факт в общем случае.

Непрерывность

Предложение 2

Операции любой нумерованной алгебры непрерывны в рекурсивно (эффективно) порожденном пространстве.

Доказательство. Пусть $(\omega/\eta; \Im)$ – произвольная η-алгебра (т.е. алгебра, определимая над η). Заметим, что мы не предполагаем вычислимости семейства $\Im$ вычислимых функций, для которых η является конгруэнцией. Допустим, что $f \in \Im$ и число аргументов n операции f не меньше 2. Зафиксируем набор $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Нужно показать, что для любого η-замкнутого вычислимого (вычислимо перечислимого) множества Y, содержащего число $f(x_1, \ldots, x_n)$, существуют такие η-замкнутые вычислимые (соответственно вычислимо перечислимые) множества $X_1 \ni x_1, \ldots, X_n \ni x_n$, что $f(X_1, \ldots, X_n) \subseteq Y$. Возьмем полный f-прообраз X множества Y, т.е. $X = \{\overline{u} \,|\, f(\overline{u}) \in Y\}$. Очевидно, что X – непустое вычислимое (вычислимо перечислимое) множество кортежей длины n, если вычислимо (соответственно перечислимо) множество Y.

Непрерывность

Зафиксируем любую геделевскую нумерацию всех наборов из ω^n.
Рассмотрим сначала случай вычислимого Y. Будем строить множества $X_1, \ldots, X_n$ и $Z \subseteq X$ по шагам:
Шаг 0. $X_1^0 = \{x_1\}, \ldots, X_n^0 = \{x_n\}$ и $Z^0 = \varnothing$.
Шаг $s+1$. Пусть $\overline{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ – первый кортеж из X, не принадлежащий множеству $X_1^s \times \cdots \times X_n^s \cup Z^s$. Если $(X_1^s \cup \{z_1\}) \times \cdots \times (X_n^s \cup \{z_n\}) \subseteq X$, то полагаем $X_1^{s+1} = X_1^s \cup \{z_1\}, \ldots, X_n^{s+1} = X_n^s \cup \{z_n\}$ и $Z^{s+1} = Z^s$ (при этом, может оказаться, что $X_i^{s+1} = X_i^s \cup \{z_i\}$ для некоторых $1 \le i \le n$), в противном случае $X_1^{s+1} = X_1^s, \ldots, X_n^{s+1} = X_n^s$ и $Z^{s+1} = Z^s \cup \{\overline{z}\}$.
Конец шага $s+1$.
Теперь определим $X_k = \bigcup_{s\in\omega} X_k^s, 1 \le k \le n$ и $Z = \bigcup_{s\in\omega} Z^s$.
По построению, вычислимое множество X распадается на две перечислимые дизъюнктные части – $X_1 \times \cdots \times X_n$ и Z, откуда следует вычислимость прямого произведения.

Заметим, что оба эти множества η-замкнуты, при этом, если какой-то набор $\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ на некотором шаге распределяется по $X_k, 1 \leq k \leq n$ (т.е. $z_1 \in X_1, \ldots, z_n \in X_n$), то все наборы, η-эквивалентные этому набору, появляющиеся на более поздних шагах, распределяются таким же образом. Корректность конструкции легко показать индукцией по шагам построения.

Для вычислимо перечислимого Y ситуация несколько сложнее, т.к.в этом случае, нужно учитывать тот факт, что наборы из $\omega^n \setminus X$ эффективно нераспознаваемы, однако, общая идея такая же, как и в вычислимом случае.

Будем говорить, что набор $\overline{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ использовался до шага $s+1$, если $\overline{z} \in X_1^s \times \cdots \times X_n^s \subseteq X^s$, где X^s – обозначает первые s элементов множества X в некотором фиксированном эффективном пересчете этого множества. В противном случае, набор назовем не использовавшимся до шага $s+1$.

Шаг 0. $X_1^0 = \{x_1\}, \ldots, X_n^0 = \{x_n\}$.
Шаг $s+1$. Берем все наборы $\overline{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ из X^{s+1}, не использовавшиеся до шага $s+1$, и проверяем каждый из них на свойство $(X_1^s \cup \{z_1\}) \times \cdots \times (X_n^s \cup \{z_n\}) \subseteq X^{s+1}$. Если такие наборы есть, то выбираем из них набор с наименьшим номером, скажем, $\langle z_1^*, \ldots, z_n^* \rangle$, и полагаем, так же, как и в вычислимом случае, $X_1^{s+1} = X_1^s \cup \{z_1^*\}, \ldots, X_n^{s+1} = X_n^s \cup \{z_n^*\}$. Иначе, переходим к следующему шагу. Конец шага $s+1$.
Как и для вычислимого случая определим предельные множества. Далее, используя свойства построения и индукцию по шагам, нетрудно заметить, что эффективно строящиеся множества $X_1, \ldots, X_n$ таковы, что каждое из них η-замкнуто, а их прямое произведение лежит в X и потому переводится функцией f в множество Y. *Предложение доказано.*

Критерий Ю.Л.Ершова

Отношение эквивалентности эффективно отделимо тогда и только тогда, когда оно является нумерационной эквивалентностью подходящего вычислимого семейства вычислимо перечислимых множеств.

Следующий факт сводит изучение отделимых нумераций алгебр к их эффективно отделимым нумерациям.

Теорема об отделимости

Нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами.

Доказательство. Пусть (A, ν) – нумерованная алгебра эффективной сигнатуры Σ и ν – отделимая нумерация. Обогатим сигнатуру Σ счетным множеством констант $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$, не пересекающимся с Σ, интерпретируя, как обычно, константу c_n в элемент νn алгебры A.

Критерий отделимости

Переменной будем называть любой элемент множества $X = \{x_n \mid n \in \omega\}$, не пересекающегося с $\Sigma \cup C$.
Трансляцией $t(x)$ назовем любой терм от одной переменной x, который можно получить из подходящего терма сигнатуры $\Sigma \cup C$ путем замены всех его переменных (из множества X) на x. Таким образом, всякая трансляция алгебры A задает на ней одноместную операцию, однозначно определенную интерпретациями всех символов обогащенной сигнатуры. Множество всех трансляций будем обозначать через $T(x)$.
ν-интерпретацией трансляции $t(x)$ в нумерации ν алгебры A назовем одноместную функцию $t_\nu(x)$, получаемую из $t(x)$ подстановкой вместо всех Σ-символов соответствующих рекурсивных функций и натуральных чисел (для Σ-констант), представляющих операции алгебры A в нумерации ν. Таким образом, каждая ν-трансляция определяет одноместную общерекурсивную функцию, представляющую соответствующую трансляцию алгебры A.

Критерий отделимости

Множество ν-интерпретаций всех трансляций из $T(x)$ обозначим через $T_\nu(x)$.

Хорошо известно, что отношение эквивалентности на основном множестве алгебры A является ее конгруэнцией тогда и только тогда, когда эта эквивалентность согласована со всеми трансляциями этой алгебры.

Теперь заметим, что в силу эффективности сигнатуры Σ и вычислимой перечислимости $T(x)$ множество $T_\nu(x)$ вычислимо, т.е. существует эффективная процедура, равномерно трансформирующая номер ν-трансляции в способ вычисления соответствующей вычислимой функции. Более формально, в качестве нумерации соответствующего семейства рекурсивных функций удобно принять нумерацию этого семейства синтаксическими выражениями из $T(x)$, т.к. существует очевидное эффективное соответствие между трансляциями и ν-трансляциями.

Критерий отделимости

С использованием стандартных λ-обозначений Чёрча множество рекурсивных ν-трансляций можно записать как $T_\nu(x) = \{\lambda x.t_\nu(x) \mid t(x) \in T(x)\}$, где все символы в $t(x)$, за исключением переменной x, представлены интерпретациями сигнатурных символов в нумерации ν. Вполне очевидна вычислимость этого семейства, поэтому мы не будем вдаваться в детали построения конкретной вычислимой геделевской нумерации $\gamma : \omega \to T_\nu(x)$.

Пусть A_0, A_1 – разбиение основного множества алгебры A на две непересекающиеся части и $\Theta(A)$ – решетка всех конгруэнций этой алгебры. Рассмотрим множество $\Theta(A_0, A_1)$ всех тех конгруэнций алгебры A, никакая из которых не отождествляет никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1, т.е.
$\Theta(A_0, A_1) = \{\theta \mid \theta \in \Theta(A) \wedge (x = y \ (mod \ \theta) \to \ ((x \in A_0 \wedge y \in A_0) \vee (x \in A_1 \wedge y \in A_1)))\}$.

Лемма 1

В $\Theta(A_0, A_1)$ существует наибольший элемент.

Доказательство. Множество $\Theta(A_0, A_1)$ непустое, т.к. в нем содержится нулевая конгруэнция. Пусть θ^* есть точная верхняя грань для $\Theta(A_0, A_1)$. Покажем, что $\theta^* \in \Theta(A_0, A_1)$. В самом деле, $a = b \ (mod\ \theta^*)$ равносильно существованию конечной цепочки $a = a_0\theta_0 a_1\theta_1 \ldots a_{m-1}\theta_{m-1}a_m = b$, в которой все $\theta_i \in \Theta(A_0, A_1)$. Остается заметить, что как a, так и b обязаны принадлежать одному и тому же множеству A_i, т.к. никакое звено этой цепочки не может изменить членство в этих множествах. *Лемма доказана.*

Критерий отделимости

Пусть $\nu m \neq \nu n$. Из отделимости ν следует существование η-замкнутого вычислимо перечислимого множества α (где η – обозначает нумерационную эквивалентность нумерации ν), отделяющего эти элементы. Пусть, для определенности, $m \in \alpha$ и $n \notin \alpha$. Положим $A_0 = \nu\alpha$ и $A_1 = \nu(\omega \setminus \alpha)$, тогда множества A_0, A_1 образуют разбиение основного множества алгебры A на две дизъюнктные части. По лемме 1 существует наибольшая конгруэнция θ^*, не "склеивающая" никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1. Очевидно, $\nu m \neq \nu n \pmod{\theta^*}$. Поскольку θ^* – наибольшая конгруэнция, различающая элементы νm и νn алгебры A, то всякая ненулевая конгруэнция фактор-алгебры A/θ^* содержит пару элементов $\langle \nu m/\theta^*, \nu n/\theta^* \rangle$. Рассмотрим нумерованную фактор-алгебру $(A/\theta^*, \nu^*)$ нумерованной алгебры (A, ν), где ν^* обозначает естественную нумерацию фактор-алгебры, индуцированную нумерацией ν, т.е. $\nu^* = \theta^*\nu$.

Лемма 2

Нумерованная алгебра $(A/\theta^*, \nu^*)$ эффективно отделима.

Доказательство. Заметим, что алгебра A/θ^* подпрямо неразложима, т.к. пересечение всех ее ненулевых конгруэнций содержит пару $\langle \nu m/\theta^*, \nu n/\theta^* \rangle$. В частности, любая главная конгруэнция алгебры A/θ^* (т.е. порожденная парой различных ее элементов), также содержит эту пару. Следовательно, для любой пары различных элементов $\nu^* p, \nu^* q$ алгебры (A/θ^*) найдется ν-трансляция $t^*(x)$, переводящая номера одного из этих элементов в α, а другого – в $\omega \setminus \alpha$, т.е. $t^*(p) \in \alpha \wedge t^*(q) \notin \alpha$ либо $t^*(q) \in \alpha \wedge t^*(p) \notin \alpha$. В противном случае, существовала бы собственная конгруэнция алгебры (A/θ^*), различающая элементы $\nu m/\theta^*, \nu n/\theta^*$, что невозможно.

Обозначим t^*-прообраз множества α через $t^{*-1}(\alpha)$, т.е. $t^{*-1}(\alpha) = \{x \mid t^*(x) \in \alpha\}$. Ясно, что множество $t^{*-1}(\alpha)$ вычислимо перечислимо как рекурсивный t^*-прообраз вычислимо перечислимого множества α. Если, далее, через η^* обозначить нумерационную эквивалентность нумерации ν^*, то $t^{*-1}(\alpha)$ является η^*-замкнутым. Пусть $t_0, t_1, \dots,$ – вычислимая последовательность всех ν-трансляций. Рассмотрим последовательность множеств $t_0^{-1}(\alpha), t_1^{-1}(\alpha), \dots$. Тогда эта последовательность, очевидно, вычислима и, с учетом вышесказанного, является отделяющей для нумерации ν^*. *Лемма доказана.*

Следовательно, для любой пары различных элементов алгебры (A, ν) найдется эффективный на номерах гомоморфизм из этой алгебры на подходящую эффективно отделимую алгебру, различающий эти элементы.

Отделимость эффективно отделимой нумерованной алгебры очевидна. *Теорема доказана.*

Критерий отделимости

Ранее была сформулирована следующая основная теорема теории вычислимо отделимых нумерованных алгебр:
Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.
Таким образом, роль и место эффективно отделимых алгебр в классе отделимых родственна роли и месту негативных алгебр в классе вычислимо отделимых. При этом, как показывает теорема об отделимости, наиболее общая концепция отделимости, определяемая теоремой Ю.Л.Ершова о вычислимых нумерациях, дает готовый математический аппарат для развития структурной теории отделимых алгебр.

Следствие 1

Отделимая нумерация подпрямо неразложимой алгебры эффективно отделима.

Доказательство. Пусть A – подпрямо неразложимая алгебра и ν – ее отделимая нумерация. По условию, существует пара различных элементов a, b алгебры A, содержащаяся в любой ее ненулевой конгруэнции. Согласно теореме об отделимости имеется эффективно отделимый гомоморфный образ нумерованной алгебры (A, ν), в котором образы элементов a и b различны, однако, единственная конгруэнция, различающая эти элементы является нулевой. Следовательно, ядро этого гомоморфизма тривиально, т.е. исходная нумерация ν сама эффективно отделима. *Следствие доказано.*
Неединичная эквивалентность η на ω называется квазисовершенной (совершенной), если не существует собственных η-замкнутых вычислимо перечислимых (вычислимых) подмножеств множества ω. На языке эффективно порожденных пространств квазисовершенность означает, что соответствующее эффективно порожденное

пространство (с естественной нумерацией – каждое число нумерует содержащий его класс эквивалентности) является пространством слипшихся точек. Точно так же, совершенность эквивалентности равносильна тому, что соответствующее вычислимо порожденное пространство антидискретно.

Следствие 2

Неединичная эквивалентность квазисовершенна тогда и только тогда, когда никакая алгебра, представимая над ней, не обладает эффективно отделимой фактор-алгеброй.

Доказательство. Если эквивалентность не квазисовершенна, то, используя метод теоремы об отделимости, над ней можно определить алгебру с эффективно отделимым гомоморфным образом. Обратно, факт представимости над эквивалентностью алгебры с эффективно отделимым гомоморфным образом, очевидно, достаточен для того, чтобы эта эквивалентность не была квазисовершенной. *Следствие доказано.*

Предложение 3

Нумерованная конгруэнц-простая алгебра эффективно отделима тогда и только тогда, когда она имеет собственное вполне перечислимое подмножество.

Доказательство. Пусть A – простая алгебра, ν – ее нумерация, α – собственное вполне перечислимое подмножество ω и $t_0, t_1, \dots$ – вычислимая последовательность всех ν-трансляций, определенная в доказательстве теоремы об отделимости. Тогда вычислимая последовательность вполне перечислимых множеств $t_0^{-1}(\alpha), t_1^{-1}(\alpha), \dots$ является отделяющей для нумерации ν, т.к. в силу простоты A для любой пары различных элементов этой алгебры существует трансляция из данной последовательности, переводящая один из этих элементов в множество α, а другой – в его дополнение, т.е. ν эффективно отделима. Обратное очевидно. *Предложение доказано.*

Критерий отделимости

Следствие 3

Всякая нумерация простой алгебры либо квазисовершенна, либо ядро ее нумерации совпадает с ядром некоторой вычислимой нумерации.

Неодноэлементное топологическое пространств называется тривиальным, если открытыми множествами являются только само множество и $\varnothing$.

Следствие 4

Для нумерованной простой алгебры отделимость эффективно порожденного топологического пространства равносильна его нетривиальности.

Наличие вполне вычислимого подмножества у неквазисовершенной простой алгебры оказывается достаточным для ее негативности.

Критерий отделимости

Предложение 4

Нумерованная простая алгебра негативна тогда и только тогда, когда она имеет собственное вполне вычислимое подмножество.

Доказательство. Если нумерованная простая алгебра негативна, то она, согласно теореие о негативной аппроксимируемости вычислимо отделимых алгебр, вычислимо отделима, а значит имеет собственное вполне вычислимое подмножество (напомним, что мы предполагаем неодноэлементность рассматриваемых алгебр).

Пусть (A, ν) – нумерованная простая алгебра, M – собственное ν-вполне вычислимое подмножество множества A и $\alpha = \{x | \nu x \in M\}$. Тогда

$x \neq y \leftrightarrow \exists t \in T(t(x) \in \alpha \wedge t(y) \in \omega \setminus \alpha) \vee (t(y) \in \alpha \wedge t(x) \in \omega \setminus \alpha)$,

где T – обозначает вычислимое! множество всех трансляций алгебры A в нумерации ν. *Предложение доказано.*

Условия конечности

Среди трех основных инструментов исследования в универсальной алгебре – решеток конгруэнций, подалгебр и групп автоморфизмов, особую роль, с точки зрения теории нумераций и структурных свойств η-алгебр, играют решетки конгруэнций. К примеру, решетки подалгебр не всегда дают достаточно мощный инструмент описания свойств η-алгебр, т.к. если над эквивалентностью η определима конечно порожденная алгебра $(\omega/\eta; c_1, \ldots, c_k, f_1, \ldots, f_n)$, где $c_1, \ldots, c_k$ – порождающие константы, интерпертируемые натуральными числами $l_1, \ldots, l_k$ соответственно, то над ней определяется алгебра, порожденная любым своим элементом (для этого достаточно обогатить сигнатуру одноместными функциями $g_1, \ldots, g_k$, интерпретируемыми в функции-константы $l_1, \ldots, l_k$ соответственно), т.е. с одноэлементной решеткой подалгебр. Семейства вычислимых автоморфизмов, играющие фундаментальную роль при изучении абстрактных свойств симметрии позитивных (в особенности вычислимых) систем, в случае произвольных нумерованных алгебр вообще не являются группами.

Более того, существуют естественные примеры негативных систем, полугруппы вычислимых автоморфизмов которых также не являются группами. Иное дело решетки конгруэнций. Например, всякая алгебра, определимая над неразрешимой позитивной эквивалентностью, имеет весьма богатую решетку конгруэнций (впрочем, справедливости ради, следует отметить, что над любой негативной эквивалентностью определимы конгруэнц-простые алгебры). Ниже будет показано, что множество конгруэнций всякой алгебры, имеющей отделимую, но не эффектвно отделимую нумерацию, является бесконечным. Как было отмечено выше, нумерационная эквивалентность всякой эффективно отделимой нумерации принадлежит индуктивному классу арифметической иерархии Клини-Мостовского. В то же время, в каждой m-степени присутствует вычислимо отделимая (а значит и отделимая) эквивалентность. Поскольку класс отделимых нумераций алгебр весьма обширен, то представляется целесообразным изучение подклассов этого класса в предположениях наличия ограничений тех или иных типов на решетки конгруэнций.

Условия конечности

Свидетельством полезности такого подхода является следующая

Теорема об отделимых нумерациях алгебр с условием минимальности

Всякая отделимая нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является эффективно отделимой.

Доказательство. Пусть решетка конгруэнций алгебры A удовлетворяет условию минимальности и ν – отделимая нумерация этой алгебры. Допустим, что ν не является эффективно отделимой. Покажем, что в этом случае можно построить бесконечно убывающую цепь конгруэнций алгебры A. Зафиксируем любую пару различных элементов a_0, b_0 алгебры A. По теореме об отделимости существует такая конгруэнция $\theta_0(a_0, b_0)$ этой алгебры, различающая элементы a_0 и b_0, что нумерованная фактор-алгебра $(A/\theta_0(a_0, b_0), \nu_0)$, где $\nu_0 = \theta_0\nu$ (θ_0 обозначает естественное проектирование в классы $\theta_0(a_0, b_0)$-эквивалентности), является эффективно отделимой.

Ядро гомоморфизма θ_0 – ненулевое, т.к. ν, согласно предположению, не является эффективно отделимой. В силу того, что гомоморфизм θ_0 является собственным, существует пара различных элементов a_1, b_1 алгебры A, которые равны по модулю $\theta_0(a_0, b_0)$. Опять-таки, по теореме об отделимости, эти элементы различаются в подходящем эффективно отделимом гомоморфном образе алгебры A по конгруэнции, которую обозначим через $\theta_1(a_1, b_1)$.
Положим $\theta = \theta_0(a_0, b_0) \cap \theta_1(a_1, b_1)$, очевидно, что θ – конгруэнция, для которой $\theta_0(a_0, b_0)$ является собственным расширением.
Рассмотрим нумерованную алгебру $(A/\theta, \theta\nu)$. Покажем, что нумерованная алгебра $(A/\theta, \theta\nu)$ эффективно отделима.

Лемма 3

Пересечение конечного числа эффективно отделимых эквивалентностей на ω является эффективно отделимым.

Доказательство достаточно привести для двух эквивалентностей. Пусть η_0, η_1 – эффективно отделимые эквивалентности и $\eta = \eta_0 \cap \eta_1$. По определению, как для η_0, так и для η_1 существуют вычислимые отделяющие последовательности η_0-замкнутых (η_1-замкнутых) вычислимо перечислимых множеств: $B_0, B_1, \ldots (C_0, C_1, \ldots,$ соответственно). Легко понять, что последовательность $B_0, C_0, B_1, C_1, \ldots$ является вычислимой отделяющей последовательностью для η. Убедимся в том, что все множества из этой последовательности η-замкнуты. В самом деле, пусть $x \in B_k (k \in \omega)$ и $x = y \ (mod \ \eta)$, тогда $x = y \ (mod \ \theta_0)$, т.к. $\eta \subseteq \eta_0$, но B_k есть η_0-замкнутое, поэтому $y \in B_k$. Аналогично доказывается η-замкнутость каждого члена последовательности $C_0, C_1, \ldots$. *Лемма доказана.*

Согласно лемме 3 нумерованная алгебра $(A/\theta, \theta\nu)$ эффективно отделима, причем $\theta_0(a_0, b_0)$ является строгим расширением θ, т.к. $\langle a_1/b_1 \rangle \in \theta_0(a_0, b_0) \setminus \theta_1(a_1, b_1)$.

Далее, повторяем процедуру построения строго меньшей эффективно отделимой конгруэнции, рассматривая в качестве $\eta_0(a_0, b_0)$ конгруэнцию θ. Поскольку на каждом этапе построения получается эффективно отделимая конгруэнция, то, в силу предположения о том, что исходная нумерация не является эффективно отделимой, каждая конгруэнция из этой цепи является ненулевой. Следовательно, решетка конгруэнций алгебры A оказывается неартиновой. Противоречие. *Теорема доказана.*

Следствие 5

Нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций отделима тогда и только тогда, когда она эффективно отделима.

Таким образом, отделимые нумерации алгебр с артиновыми решетками конгруэнций являются вычислимыми в смысле Ю.Л.Ершова, т.е. ядра таких нумераций совпадают с ядрами подходящих вычислимых нумераций некоторых семейств вычислимо перечислимых множеств.

Следствие 6

Отделимая нумерация алгебры с конечным числом конгруэнций является эффективно отделимой.

В частности, эффективно отделимой является любая отделимая нумерация конечной алгебры эффективной сигнатуры.
Еще более частным случаем (в случае пустой сигнатуры) является эффективная отделимость отделимой нумерации любого конечного множества.

Следствие 7

Решетка конгруэнций всякой алгебры, обладающей отделимой, но не эффективно отделимой нумерацией является бесконечной.

В самом деле, в этом случае решетка конгруэнций не может быть артиновой, а значит, она бесконечна.

Условия конечности

Для алгебр с нетеровыми решетками конгруэнций теорема о нумерациях с условием минимальноости не имеет места. Согласно следствию 7, такие алгебры должны быть бесконечными. Простейшей бесконечной алгеброй с нетеровой решеткой конгруэнций является алгебра следования $S = (\omega; s)$, где $s(x) = x + 1$. Более того, легко понять, что всякая ненулевая конгруэнция алгебры следования имеет конечный индекс. Покажем, что уже эта алгебра имеет отделимые (даже вычислимо отделимые) нумерации, алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей которых превосходят любую наперед заданную арифметическую сложность.

Предложение 5

Алгебра следования S имеет континуум нумераций, нумерационные эквивалентности которых вычислимо отделимы.

Доказательство. Пусть $E = \{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \mid \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in \omega\}$ – множество всех счетно-бесконечных последовательностей из нулей и единиц. Очевидно, что E имеет мощность континуума. Удобно представлять E в виде двоичного дерева с соответствующим естественным частичным упорядочением, левые ветвления которого помечены нулем, правые – единицей, а вершина – пустым множеством. Пусть $S_0, S_1, \ldots$ – равномерно вычислимое дизъюнктное разбиение натурального ряда на счетное число вычислимых копий алгебры следования, т.е. $S_k \cong S = (\omega; s), s(x) = x + 1$ и s_k – первый элемент алгебры S_k. Объединение этих алгебр есть абсолютно свободная алгебра от бесконечного вычислимого множества порождающих. Сопоставим каждой последовательности $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots$ из E конгруэнцию θ^*_ε этой алгебры, как конгруэнтное замыкание множества θ_ε, определенного следующим образом: если
$\varepsilon_k = 0$ то $\langle s_k, s_{k+1}\rangle \in \theta_\varepsilon$;
если $\varepsilon_k = 1$ то $\langle s(s_k), s_{k+1}\rangle \in \theta_\varepsilon$.

Условия конечности

Неформально, конгруэнция θ^*_ε "склеивает" первые элементы экземпляров S_k и S_{k+1} алгебры S (второй элемент экземпляра S_k с первым элементом экземпляра S_{k+1}), если $\varepsilon_k = 0$ (если $\varepsilon_k = 1$), с соответствующими "склейками" всех образов отождествленных первых (первого и второго) элементов. Очевидно, что определенное таким образом отображение φ из множества E всех счетно-бесконечных последовательностей из нулей и единиц в множество всех конгруэнций вычислимой абсолютно свободной алгебры $(\bigcup_{k\in\omega} S_k; s)$ является инъективным, поэтому мощность множества конгруэнций этой алгебры не меньше мощности E, т.е. континуума. Остается заметить, что каждая из построенных конгруэнций абсолютно свободной алгебры есть нумерация алгебры следования. При этом, если в последовательности ε имеется бесконечно много единиц, то каждый класс $\varphi(\varepsilon)$-конгруэнтности конечен. Если же в ε начиная с некоторого n все ε_n равны нулю, то почти все $\varphi(\varepsilon)$-классы беконечны и вычислимы. В любом случае имеем вычислимо отделимую нумерацию. *Предложение доказано.*

Условия конечности

Отметим, что эффективно порожденное топологическое пространство для каждой из построенных выше нумераций алгебры следования совпадает с вычислимо порожденным пространством и является дискретным.

Следствие 8

Для любого класса арифметической иерархии Клини-Мостовского существует отделимая нумерация алгебры с нётеровой решеткой конгруэнций, алгоритмическая сложность нумерационной эквивалентности которой не принадлежит данному классу.

Известно, что следующие алгебры имеют невычислимые негативные нумерации:
а) арифметика Пеано $(\omega; s, +, *)$, где s – функция следования (в частности, невычислимой негативной нумерацией обладают алгебра следования и арифметика Пресбургера и любые их позитивные нумерации, очевидно, вычислимы);

(б) всякое бесконечное вычислимо представимое поле $(F; 0, 1, +, *)$ (заметим, что любое поле есть простая алгебра);
(в) всякая вычислимо представимая абелева группа без кручения;
(г) всякое бесконечное вычислимо представимое векторное пространство над конечным полем;
(д) абсолютно свободная алгебра термов эффективной сигнатуры от свободного эффективного множества порождающих.
Примеры такого рода, которые легко умножить, показывают, что в определенном смысле негативные алгебры не менее естественны, нежели позитивные. В пользу этого наблюдения говорит также следующий факт. Пусть K_{EffSep} – класс эффективно отделимых алгебр, K_{ArtSep} – класс отделимо нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций. Все позитивные и негативные алгебры являются K_{EffSep}-алгебрами. Согласно теореме об отделимых нумерациях с условием минимальности всякая K_{ArtSep}-алгебра есть K_{EffSep}-алгебра, т.е. для класса алгебр с артиновыми решетками конгруэнций понятия отделимой и эффективно отделимой нумерации совпадают.

Условия конечности

В классе K_{ArtSep} присутствует весьма обширный и важный подкласс K_{ArtNeg} негативно нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, причем многие естественные K_{ArtNeg}-алгебры невычислимы. Пусть K_{ArtPos} – класс позитивно нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, тогда K_{ArtPos} также есть подкласс класса K_{ArtSep}. Очевидно, что $K_{ArtSep} \setminus K_{ArtPos} \neq \varnothing$ (например, связное двоеточие). Известно, что всякая K_{ArtPos}-алгебра, мощность решетки конгруэнций которой меньше континуума, вычислима, т.е. является K_{ArtNeg}-алгеброй. Класс невычислимых негативных алгебр с условием минимальности для решетки конгруэнций, т.е. $K_{ArtNeg} \setminus K_{ArtPos}$, как следует из вышесказанного, весьма богат. Известно также, что существуют как невычислимые позитивные, так и невычислимые негативные алгебры с нетеровыми решетками конгруэнций. Насколько богат класс $K_{ArtPos} \setminus K_{ArtNeg}$? Вопрос "$K_{ArtPos} \setminus K_{ArtNeg} \neq \varnothing$?" в настоящий момент является открытым.

Условия конечности

Предложение 6

Среди нумерованных алгебр существуют как подпрямо неразложимые, так и алгебры с артиновыми решетками конгруэнций, нумерационные эквивалентности которых обладают собственными вполне перечислимыми подмножествами, но не являются отделимыми.

Приведем набросок доказательства. Пусть γ – фиксированная сильно вычислимая нумерация, сопоставляющая каждому натуральному числу n простую алгебру $\gamma(n)$, изоморфную $P = (\{0, 1\}; p)$, где $p(0) = 0, p(1) = 0$, т.е. по номеру алгебры можно равномерно эффективно определить все ее элементы и действия операций. Удобно считать, что объединение основных множеств алгебр $\gamma(n)$ есть $\omega \setminus \{0\}$ и $\gamma(m) \cap \gamma(n) = \varnothing$ для различных m, n. Пусть, далее α, β – пара непересекающихся неперечислимых множеств, объединение которых есть ω.

Построим эквивалентость η на $\omega \setminus \{0\}$ следующим образом: $\langle x, y\rangle \in \eta \leftrightarrow (x = y) \vee (\exists m \exists n : x \in \gamma(m) \wedge y \in \gamma(n) \wedge m, n \in \alpha) \vee (p(x) = x \wedge p(y) = y) \vee (p(x) \neq x \wedge p(y) \neq y \wedge \gamma^{-1}(x) \in \beta \wedge \gamma^{-1}(y) \in \beta)$, где $\gamma^{-1}(x)$ обозначает номер алгебры, содержащей число x.

Неформально, все элементы всех алгебр с γ-номерами из α "склеиваются" в единственной неподвижной точке алгебры P, туда же "засылаются" неподвижные точки всех алгебр, а все остальные элементы (γ-номера которых лежат в β и которые не являются неподвижными точками в содержащих их алгебрах) "склеиваются" во второй смежный класс. Легко заметить, что η является конгруэнцией, фактор-алгебра по которой изоморфна P и η не является отделимой. Добавив к полученной алгебре точку 0 и доопределив в этой точке значение операции p как любое число не являющееся неподвижной точкой, получим трехэлементную нумерованную алгебру P^*, которая имеет вычислимое η-замкнутое подмножество $\{0\}$, но не является отделимой.

В то же время P^* изоморфна алгебре $(\{0,1,2\};p), p(0)=0, p(1)=0, p(2)=1$, которая, как легко заметить, подпрямо неразложима (в любой ее ненулевой конгруэнции содержится пара $\langle 0,1\rangle$) и, в силу конечности, имеет артинову решетку конгруэнций.

Следствие 9

Существуют нумерации как подпрямо неразложимых алгебр, так и алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, эффективно порожденные пространства которых нетривиальны, но неотделимы.

Таким образом, следствие 4, верное для класса простых алгебр, нельзя обобщить на собственные расширения этого класса с более слабыми условиями конечности.

Аксиомы отделимости

Некоторые усиления условия отделимости нумерации во многих естественных случаях оказываются достаточными для ее эффективной отделимости и, даже, негативности.

Выше мы рассматривали отделимые нумерации, которые естественно назвать T_0-отделимыми. Попытка усиления понятия отделимости приводит к следующему определению.

Нумерация называется T_1-отделимой (T_2-отделимой; T_3-отделимой; T_4-отделимой), если для всякой пары натуральных чисел, различных по модулю α ее нумерационной эквивалентности, найдется перечислимая окрестность первого числа, не содержащая второе, и перечислимая окрестность второго, не содержащая первое (найдутся непересекающиеся перечислимые окрестности этих чисел; для всякого элемента и замкнутого в эффективно порожденной топологии множества, не содержащего этот элемент, найдутся их непересекающиеся окрестности; для всякой пары непересекающихся замкнутых множеств найдутся их непересекающиеся окрестности).

Аксиомы отделимости

Обозначим через $K_m (0 \leq m \leq 4)$ класс пространств, гомеоморфных эффективно порожденным пространствам, для которых выполняется аксиома T_m-отделимости.

Предложение 7

$K_m \setminus K_{m+1} \neq \varnothing$ для $m \in \{0, 1\}$, $K_3 = K_4$.

Для $m = 0$ тривиальный пример дается связным двоеточием, т.к. если α – вычислимо перечислимое невычислимое множество, то двухэлементное множество $\{\alpha, \omega \setminus \alpha\}$ с естественной нумерацией, сопоставляющей каждому числу содержащее его множество, есть эффективно порожденное отделимое и не T_1-отделимое пространство. Для $m = 1$ в известен пример эффективно порожденного пространства, гомеоморфного счетно-бесконечному пространству Зарисского, т.к. непустыми вполне перечислимыми подмножествами в этом примере являются все коконечные множества и только они.

Для $m = 3$ вопрос также тривиален, т.к. в предположении T_1-отделимости для счетных топологических пространств регулярность и нормальность равносильны.
Для $m = 2$ вопрос открыт.
В случае вычислимо порожденных пространств ситуацию полностью описывает

Предложение 8

Нумерация вычислимо отделима тогда и только тогда, когда вычислимо порожденное топологическое пространство совершенно нормально.

В частности, в этом случае выполняются все аксиомы T_m-отделимости $(m \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$.

Определение 2

Нумерация называется эффективно T_1-отделимой (T_2-отделимой), если для нее существует вычислимая последовательность T_1-отделяющих (T_2-отделяющих) множеств.

Для T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумераций естественно возникает вопрос о справедливости усиленных аналогов теоремы об отделимости: всякая ли T_1-отделимая (T_2-отделимая) нумерованная алгебра аппроксимируется эффективно T_1-отделимыми (T_2-отделимыми)? Если (A, ν) – нумерованная алгебра и K – класс нумерованных алгебр, однотипных с A, то назовем A простой относительно класса K (K-простой), если никакая её нееднничная фактор-алгебра не принадлежит K. Через $K_1(K_2)$ обозначим класс эффективно T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумерованных алгебр.

Для алгебр пустой сигнатуры (т.е. нумерованных множеств) верна

Теорема о T_1-отделимых нехаусдорфовых нумерациях

Существует T_1-отделимое, но не T_2-отделимое нумерованное множество, никакое фактор-множество которого не является эффективно T_1-отделимым.

Доказательству предпошлем следующее утверждение.

Лемма 1

Для любого счетного семейства множеств $\Gamma = \{\gamma_i | i \in \omega\}$ и всякого бесконечного $\alpha \subseteq \omega$ существует такое бесконечное $\beta \subseteq \alpha$, что никакое бесконечное подмножество β не принадлежит Γ.

Доказательство основано на неэффективной диагонализации.
Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ – фиксированный пересчет всех бесконечных множеств семейства Γ и $a_0, a_1, \ldots$ – пересчет в порядке строгого возрастания всех чисел из множества α. Построим подмножество β множества α по шагам.
Шаг 0. Если γ_0 содержит число из $\omega \setminus \alpha$, то $\beta_0 = \alpha$, в противном случае полагаем $\beta_0 = \alpha \setminus \{a_m\}$, где a_m – второй в порядке возрастания элемент из α, входящий в γ_0 (в этом случае γ_0 целиком содержится в α).
Шаг $s+1$. Если γ_{s+1} содержит число из $\omega \setminus \beta_s$, то $\beta_{s+1} = \beta_s$. В противном случае полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s \setminus \{a_m\}$, где a_m – второй в порядке возрастания элемент из β_s, входящий в γ_s и превосходящий все ранее (т.е. на предыдущих шагах) использованные числа a_m.
Конец шага $s+1$.

Определим $\beta = \bigcap_{s \in \omega} \beta_s$.

Легко заметить, что β бесконечно и $\omega \setminus \beta$ имеет непустое пересечение с каждым бесконечным Г-множеством. Тем более эти пересечения непустые для любого расширения множества $\omega \setminus \beta$. Множество β уместно было бы назвать Г-иммунным, т.к. предложенная конструкция обеспечивает непустоту пересечения каждого бесконечного Г-множества с дополнением β. Допустим, что некоторое бесконечное подмножество γ множества β есть Г-множество. Тогда, по построению, $\omega \setminus \gamma$ имеет непустое пересечение с любым Г-множеством, в частности с γ, что невозможно. Противоречие. *Лемма доказана.*

Аксиомы отделимости

Пусть η – эквивалентность на ω с бесконечным числом смежных классов, для которой эффективно порожденная топология есть топология Зарисского, т.е. η-замкнутыми вычислимо перечислимыми множествами являются те и только те, дополнения которых состоят из объединений конечных совокупностей η-классов. Пример такой эквивалентности можно построить, используя методы Ю.Л.Ершова из ТН. Рассмотрим нумерованное множество $(\omega/\eta, \nu)$, где нумерация ν обозначает естественное проектирование в классы η-эквивалентности. Пусть $tr(\eta)$ – характеристическая трансверсаль эквивалентности η. Поскольку число эффективно отделимых эквивалентностей (а значит, и их характеристических трансверсалей) счетно, то, по лемме 1, существует бесконечное подмножество α множества $tr(\eta)$, никакое бесконечное подмножество которого не является характеристической трансверсалью никакой эффективно отделимой эквивалентности. Пусть $a_0, a_1 \ldots$ – пересчет в порядке строгого возрастания всех чисел из α. Без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 0$.

Аксиомы отделимости

Построим расширение η^* эквивалентности η, определенное следующим образом:
$x = y \ (mod\ \eta^*) \leftrightarrow \exists u, v \in tr(\eta) \exists n \in \omega (a_n \leq u, v < a_{n+1}) \wedge x = u \ (mod\ \eta) \wedge y = v \ (mod\ \eta)$.
Неформально, η^* получается из η "склеиванием" всех η-классов, минимальные η-представители которых лежат в полуинтервале линейно упорядоченного множества $(\alpha; \leq)$ между a_n и a_{n+1}, включая a_n. Очевидно, что $tr(\eta^*) = \alpha$. Ясно также, что для всякого расширения η^{**} эквивалентности η^* справедливо $tr(\eta^{**}) \subseteq tr(\eta^*)$. Т.к. каждый η^*-класс получается из η "склеиванием" конечного числа η-классов, то дополнение каждой точки в ω/η^* вполне перечислимо и соответствующее эффективно порожденное пространство также является пространством Зарисского. Никакой бесконечный фактор-объект для ω/η^* не являтся эффективно отделимым, т.к. иначе его характеристическая трансверсаль принадлежала бы классу характеристических трансверсалей эффективно отделимых эквивалентностей, что противоречит выбору α.

Следовательно, никакой бесконечный фактор-объект нумерованного множества $(\omega/\eta^*, \nu^*)$, $\nu^*(x) = x/\eta^*)$, не является эффективно отделимым.

Если фактор-объект нумерованного множества $(\omega/\eta^*, \nu^*)$ по эквивалентности η^{**} конечен, то хотя бы один смежный η^{**}-класс состоит из бесконечного числа η^*-классов. Пусть это будет класс x/η^{**}. Тогда, если $x \neq y \ (mod\ \eta^{**})$, то любая вполне перечислимая окрестность элемента y/η^{**} содержит элемент x/η^{**}, т.е. конечные факторы вообще не могут быть T_1-отделимыми.

Таким образом, T_1-отделимое нумерованное множество $(\omega/\eta^*, \nu^*)$ не имеет гомоморфных образов, являющихся эффективно T_1-отделимыми. *Теорема доказана.*

Следствие

Существует K_1-простая T_1-отделимая нумерованная алгебра, эффективно порожденное топологическое пространство которой является пространством Зарисского.

Простейшими примерами эффективно T_2-отделимых нумераций являются позитивные и негативные нумерации. Заметим, что в этих случаях имеет место равномерная T_2-отделимость, т.е. существует эффективная процедура, значением которой на каждой паре различных элементов является пара перечислимых индексов непересекающихся множеств, отделяющих эту пару. Приведем пример T_2-отделимого нумерованного множества, не имеющего вычислимых факторов, эффективно порожденное пространство которого является дискретным.

Предложение 9

Существует T_2-отделимое нумерованное множество с вполне перечислимыми элементами, никакое фактор-множество которого не является эффективно T_1-отделимым.

Доказательство. Пусть η - позитивная совершенная эквивалентность (т.е. позитивная эквивалентность, для которой нет нетривиальных η-замкнутых вычислимых подмножеств). Легко показать, что характеристическая трансверсаль эффективно отделимой эквивалентности является Π^0_3-множеством. По лемме 1 существует такое $\alpha \subseteq tr(\eta)$, что как само α, так и любое его бесконечное подмножество не являются Π^0_3-множествами. Точно так же, как в теореме о нехаусдорфовых нумерациях, определим эквивалентность η^*: $x = y \ (mod\ \eta^*) \leftrightarrow \exists u, v \in tr(\eta) \exists n \in \omega (a_n \leq u, v < a_{n+1}) \wedge x = u \ (mod\ \eta) \wedge y = v \ (mod\ \eta)$,
где $a_0, a_1, \ldots$ – возрастающий пересчет множества α, и рассмотрим нумерованное множество $(\omega/\eta^*, \nu^*)$, $\nu^*(x) = x/\eta^*$.

Каждый η^*-класс рекурсивно перечислим, т.к. он является объединением конечного числа η-классов. Поскольку $tr(\eta^*) = \alpha$ и $\alpha \notin \Pi^0_3$, то ν^* не вычислима, т.е. не является эффективно отделимой. Характеристическая трансверсаль бесконечного фактор-множества $(\omega/\eta^*, \nu^*)$ есть бесконечное подмножество α и потому никакое бесконечное фактор-множество нумерованного множества $(\omega/\eta^*, \nu^*)$ также не является вычислимым.
Ни один из конечных факторов не является T_1-отделимым, т.к. допущение существования конечного T_1-отделимого нумерованного фактор-множества (которое обязано быть рекурсивным) противоречит совершенности эквивалентности η. *Предложение доказано.*

Следствие 10

Существует K_1-простая T_2-отделимая нумерованная алгебра, эффективно порожденное пространство которой дискретно.

Следствия 9 и 10 дополнительно подчеркивают фундаментальную роль теоремы Ю.Л.Ершова о вычислимых нумерациях с точки зрения теории нумерованных алгебр, т.к. для приведенных выше естественных усилений аксиом отделимости теорема об аппроксимации T_1-отделимых (T_2-отделимых) алгебр эффективно T_1-отделимыми (T_2-отделимыми) неверна. Заметим, что построенныу выше нумерованные множества тривиально аппроксимируются эффективно отделимыми – связными двоеточиями.

Бесконечное подмножество α множества ω назовем наследственно высоким, если никакое его бесконечное подмножество (включая само α) не лежит в классе Π^0_3 арифметической иерархии Клини-Мостовского. Понятие наследственно высокого множества позволяет легко доказать

Предложение 10.

Всякая алгебра, обладающая отделимой нумерацией с наследственно высокой характеристической трансверсалью, финитно аппроксимируема.

Аксиомы отделимости

Действительно, если ν – отделимая нумерация алгебры A и $tr(\nu)$ наследственно высокая, то любая бесконечная фактор-алгебра нумерованной алгебры (A, ν), в т.ч. по нулевой конгруэнции, также имеет наследственно высокую характеристическую трансверсаль и потому не может быть эффективно отделимой. Однако, по теореме об отделимости, (A, ν) аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами, следовательно, все они конечны, т.е. A финитно аппроксимируема.

Особое место как в теории решеток конгруэнций универсальных алгебр, так и в теории вычислимых структур, принадлежит простым алгебрам. Оказалось, что свойство T_1-отделимости (T_2-отделимости) тесно связано с негативностью нумераций не только простых алгебр, но и алгебр с артиновыми решетками *конгруэнций, а также подпрямо неразложимых алгебр. В случае отделимых алгебр простейшим примером нумерованной простой алгебры, не являющейся негативной, является связное двоеточие (см.случай $m = 0$ предложения 7).

Аксиомы отделимости

Для T_2-отделимых простых алгебр пример не негативной алгебры неизвестен. Если такая алгебра существует, то она не имеет собственных вполне вычислимых подмножеств, но, согласно теореме об отделимости, является эффективно отделимой, и, значит, сложность ее нумерационной эквивалентности не выходит за пределы индуктивного класса Π_2^0 иерархии Клини-Мостовского. С другой стороны (если такого примера нет), не видно явных причин, вынуждающих T_2-отделимые нумерации простых алгебр быть негативными. Таким образом, естественный вопрос о существовании не негативной T_2-отделимой (или даже хотя бы T_1-отделимой) нумерованной простой алгебры на данный момент остается открытым.

В заключение, продемонстрируем возможность наличия тесных связей между отделимостью и негативностью на двух естественных примерах алгебр, всякие T_2-отделимые (T_1-отделимые) нумерации которых негативны.

Согласно теореме оботделимости (или теореме о нумерациях с условием минимальности) для простейшей подпрямо неразложимой бесконечной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций – алгебры предшествования $(\omega; p)$, где ω – множество натуральных чисел, $p(x+1) = x$, $p(0) = 0$, всякая ее отделимая нумерация эффективно отделима.

Предложение 11

Всякая T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования является негативной.

Доказательство. Пусть ν – T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования $P = (\omega; p)$, η – нумерационная эквивалентность нумерации ν.

На самом деле, доказательство можно провести при гораздо более слабых предположениях T_2-отделимости элементов 0 и 1 алгебры P (т.е. $p(0) = 0$, $p(1) = 0$). Пусть α, β – такие η-замкнутые непересекающиеся вычислимо перечислимые множества, что $0 \in \nu\alpha$ и $1 \in \nu\beta$. Тогда $x \neq y \ (mod\ \eta) \leftrightarrow \exists n \in \omega[(p^n(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \beta) \vee (p^n(y) \in \alpha \wedge p^n(x) \in \beta)]$, где $p^0(z) = z$. *Предложение доказано.*
Заметим, что в доказательстве этого предложения не используются ни T_2-отделимость нумерации ν (достаточно предположить T_2-отделимость неподвижной точки и ее непосредственного последователя), ни теорема об отделимости, ни теорема об отделимых нумерациях с условием минимальности, что дает повод для предположения возможности наблюдения аналогичных эффектов негативности в достаточно широких классах T_2-отделимых нумерованных алгебр.

Легко построить пример отделимой нумерации алгебры предшествования, не являющейся негативной. Вопрос о существовании T_1-отделимой, но не негативной нумерации этой алгебры был открытым до 2021 года. Сложность построения контрпримера, связана с построением T_1-отделимой нехаусдорфовой нумерации, что само по себе сопряжено с определенными трудностями. Отметим, что далеко не всякая негативная нумерация алгебры предшествования является позитивной (а значит – и вычислимой).

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!