

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной деятельности КФУ

Проф. Д.К. Нургалиев

« 23 » сентября 2015 г.



Программа дисциплины

Б1.В.ДВ.2 Дополнительные главы метрической геометрии

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика
Профиль подготовки: 01.01.04 Геометрия и топология
Квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Казань
2014

1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целями освоения дисциплины (модуля) «Дополнительные главы метрической геометрии» являются: углубленное изучение аспирантами некоторых разделов метрической геометрии теории гладких многообразий, таких как слоения на многообразиях и ассоциированные с ними комплексы дифференциальных форм, многообразия над ассоциативными коммутативными алгебрами теоретическая и практическая подготовка в указанных областях; овладение современным математическим аппаратом, применяемым в геометрии слоений и геометрии многообразий над алгебрами для дальнейшего использования в исследованиях; подготовка к сдаче кандидатского экзамена по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина "Дополнительные главы метрической геометрии" включена в раздел "Б1.В.ДВ.2" вариативной части профиля 01.01.04 геометрия и топология, направления подготовки 01.06.01 математика и механика и относится к дисциплинам по выбору. Осваивается на 2 курсе, 4 семестр. Для ее успешного освоения необходимо знания и умения, приобретенные в результате освоения следующих дисциплин: математический анализ, дифференциальная геометрия и топология.

Приобретенные знания в результате освоения дисциплины «Дополнительные главы метрической геометрии» способствуют дальнейшему повышению квалификации в области геометрии и топологии, послужат основой для научно-исследовательской работы аспирантов. Материал дисциплины входит в программу кандидатского экзамена по специальности «геометрия и топология».

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен

знать:

основные понятия и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

уметь:

решать задачи в области метрической геометрии.

владеть:

математическим аппаратом в области метрической геометрии.

демонстрировать способность и готовность:

- применять результаты освоения дисциплины в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

| Шифр компетенции | Расшифровка приобретаемой компетенции |
|------------------|---|
| УК-1 | Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях |
| УК-3 | Готовность участвовать в работе российских и международных |

| | |
|-------|--|
| | исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач |
| ОПК-1 | Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий |
| ПК-1 | Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области математики и механики, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов. |
| ПК-2 | Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях. |

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

Форма промежуточной аттестации по дисциплине: зачет в 4 семестре.

| | Раздел дисциплины | Семестр | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | Самостоятельная работа |
|----|--|---------|--------|----------------------|---------------------|------------------------|
| 1. | Теория кривых в метрическом пространстве. Кривая в метрическом пространстве. Свойства длины пути. Длина дуги, как параметр. Характеризация функции длины дуги. Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Пространство путей. Существование кратчайшего пути. | 4 | 4 | 4 | 0 | 18 |
| 2. | Отображения метрических пространств и пространства с внутренней метрикой. Липшицевы отображения, подобия и изометрические отображения метрических пространств. Расстояние по Липшицу. Пространство с внутренней метрикой. Геодезическое пространство. Выпуклость метрического пространства по Менгеру. Геодезическая выпуклость и выпуклость по Менгеру. Произведения метрических пространств. Отображения, неувеличивающие длины кривых. Нерастягивающие отображения. Изометрии компактных пространств. Локальные изометрии. Метрика Буземана на группах подобий и изометрий. | 4 | 5 | 5 | 0 | 18 |

| | | | | | | |
|----|---|---|----|----|---|----|
| 3. | Конструкции метрических пространств. Фактор-пространство метрического пространства. Однородные метрические пространства. Верхний угол, угол, избыток. Пространство направлений. | 4 | 4 | 4 | 0 | 18 |
| 4. | Пространство ограниченных множеств метрического пространства и приложения метрической геометрии. Чебышевский центр ограниченного множества в метрическом пространстве. Отклонение и расстояние Хаусдорфа. Метрическая проекция и обобщенное квазирешение операторного уравнения первого рода. Расстояние по Громову-Хаусдорфу и его модификация. | 4 | 5 | 5 | 0 | 18 |
| | | | 18 | 18 | 0 | 72 |

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Теория кривых в метрическом пространстве. Кривая в метрическом пространстве. Свойства длины пути. Длина дуги, как параметр. Характеризация функции длины дуги. Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Пространство путей. Существование кратчайшего пути.

Тема 2. Отображения метрических пространств и пространства с внутренней метрикой. Липшицевы отображения, подобия и изометрические отображения метрических пространств. Расстояние по Липшицу. Пространство с внутренней метрикой. Геодезическое пространство. Выпуклость метрического пространства по Менгеру. Геодезическая выпуклость и выпуклость по Менгеру. Произведения метрических пространств. Отображения, неувеличивающие длины кривых. Нерастягивающие отображения. Изометрии компактных пространств. Локальные изометрии. Метрика Буземана на группах подобий и изометрий.

Тема 3. Конструкции метрических пространств. Фактор-пространство метрического пространства. Однородные метрические пространства. Верхний угол, угол, избыток. Пространство направлений.

Тема 4. Пространство ограниченных множеств метрического пространства и приложения метрической геометрии. Чебышевский центр ограниченного множества в метрическом пространстве. Отклонение и расстояние Хаусдорфа. Метрическая проекция и обобщенное квазирешение операторного уравнения первого рода. Расстояние по Громову-Хаусдорфу и его модификация.

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

На лекциях: в преподавании используются мультимедийные презентации, иллюстрации, таблицы, методические пособия.

На семинарах: в преподавании курса используются активные и интерактивные технологии проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Вопросы:

Тема 1. Свойства кривых в метрическом пространстве. Вычисление длины пути. Нахождение кратчайшего пути.

Тема 2. Свойства липшицевых отображений. Свойства подобий и изометрических отображений метрических пространств. Вычисление расстояния по Липшицу. Свойства пространства с внутренней метрикой и геодезического пространства. Установление выпуклости конкретных метрических пространств по Менгеру. Свойства геодезически выпуклых и выпуклых по Менгеру метрических пространств. Свойства произведений метрических пространств. Нахождение расстояний Буземана для различных групп подобий и изометрий.

Тема 3. Нахождение фактор-пространств различных метрических пространств. Свойства однородных метрических пространств. Верхний угол.

Тема 4. Нахождение чебышевского центра компактного множества в метрическом пространстве. Вычисление отклонения и расстояния Хаусдорфа. Нахождение метрических инвариантов. Вычисление расстояния по Громову-Хаусдорфу и его модификаций.

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

7.1. Регламент дисциплины

Зачет по курсу «Дополнительные главы метрической геометрии» выставляется аспиранту, успешно выступившему с докладом на практическом занятии, регулярно выполнявшему домашние задания, удовлетворительно решившему задания контрольной работы и продемонстрировавшему на зачете владение понятийным аппаратом и знание теоретического материала курса.

7.2. Оценочные средства текущего контроля

Темы для докладов на практических занятиях.

1. Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Кратчайшие пути на поверхностях.
2. Липшицевы отображения и подобия метрических пространств.
3. Геодезическое пространство. Выпуклость метрического пространства по Менгеру.
4. Метрика Буземана на группах подобий и изометрий.
5. Фактор-пространство метрического пространства.
6. Однородные метрические пространства.
7. Чебышевский центр ограниченного множества в метрическом пространстве.
8. Отклонение и расстояние Хаусдорфа.
9. Метрическая проекция и обобщенное квазирешение операторного уравнения первого рода.

Пример контрольной работы.

1. Доказать лемму о характеристике функции длины дуги.
2. Доказать, что собственное метрическое пространство является полным, сепарабельным, а замкнутое подпространство собственного метрического пространства является собственным метрическим пространством.
3. Доказать, что функция смещения K -липшицева отображения является $(K+1)$ -липшицевой функцией.

4. Доказать, что пополнение пространства с внутренней метрикой является пространством с внутренней метрикой.

7.3. Вопросы к зачету

1. Кривая в метрическом пространстве. Свойства длины пути.
2. Длина дуги, как параметр. Характеризация функции длины дуги.
3. Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Пространство путей.
4. Существование кратчайшего пути.
5. Липшицевы отображения, подобия и изометрические отображения метрических пространств.
6. Расстояние по Липшицу.
7. Пространство с внутренней метрикой. Геодезическое пространство.
8. Выпуклость метрического пространства по Менгеру.
9. Геодезическая выпуклость и выпуклость по Менгеру.
10. Произведения метрических пространств.
11. Нерастягивающие отображения. Изометрии компактных пространств.
12. Локальные изометрии.
13. Метрика Буземана на группах подобий и изометрий.
14. Фактор-пространство метрического пространства.
15. Однородные метрические пространства.
16. Верхний угол, угол, избыток. Пространство направлений.
17. Чебышевский центр ограниченного множества в метрическом пространстве.
18. Отклонение и расстояние Хаусдорфа.
19. Метрическая проекция и обобщенное квазирешение операторного уравнения первого рода.
20. Расстояние по Громову-Хаусдорфу и его модификация.

7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

| Индекс компетенции | Расшифровка компетенции | Показатель формирования компетенции для данной дисциплины | Оценочное средство |
|--------------------|---|---|--|
| УК-1 | Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях | Способность представлять место и роль изучаемой дисциплины в ряду других математических теорий. Способность устанавливать связи материала дисциплины с темой научного исследования и видеть возможности применения изучаемого материала в научных исследованиях. Способность к самостоятельной работе с научной литературой и решению теоретических задач домашних заданий. | Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, участие в дискуссии при обсуждении докладов на практических занятиях. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий. |

| | | | |
|-------|--|---|--|
| УК-3 | Готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач | Способность методически правильно организовать материал доклада на практическом занятии. Способность к самостоятельной работе с научной литературой и решению теоретических задач домашних заданий. | Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, участие в дискуссии при обсуждении докладов на практических занятиях. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий. |
| ОПК-1 | Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий | Способность к самостоятельной работе с научной литературой. Способность решать теоретические задачи, строить новые примеры известных конструкции или модифицировать имеющиеся примеры. | Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, участие в дискуссии при обсуждении докладов на практических занятиях. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий. |
| ПК-1 | Способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в области математики и механики, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов. | Способность к самостоятельной работе с научной литературой. Способность решать теоретические задачи, строить новые примеры известных конструкции или модифицировать имеющиеся примеры. | Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, участие в дискуссии при обсуждении докладов на практических занятиях. Нахождение методов решения теоретических задач из домашних заданий. |
| ПК-2 | Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях. | Способность методически правильно организовать материал доклада на практическом занятии. Способность в сжатой и математически строгой форме изложить решение решенной задачи. | Доклад по указанной преподавателем теме на практическом занятии, Изложение решений задач на практических занятиях, контрольной работе и зачете. |

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аспиранту необходимо изучить теоретический материал, изложенный на лекции. Особое внимание следует обратить на определения основных понятий и формулировки основных теорем, выделяя трудные для усвоения места для последующего обсуждения на практических занятиях. При подготовке к практическому занятию следует кроме лекций воспользоваться предложенной дополнительной литературой и электронными ресурсами. Эти источники следует также использовать при решении задач по изучаемой теме. При подготовке к докладу необходимо особое внимание обратить на организацию и изложение материала доклада. Выполненное домашнее задание должно быть сдано преподавателю перед началом следующего практического занятия.

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

9.1. Основная литература

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд. 3-е, перераб. и доп. Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 512 с.
2. Буземан, Герберт; Келли, Пол Дж. Проективная геометрия и проективные метрики, 2010ю
3. Сосов Е.Н. Введение в метрическую геометрию и ее приложения. Учебно-методическое пособие /Е.Н. Сосов — Казань: Казан. ун-т, 2015. - 98 с.
http://dspace.kpfu.ru/xmlui/bitstream/handle/net/20341/05_34_001093.pdf

9.2. Дополнительная литература

1. Берестовский В.Н., Никоноров Ю.Г. Римановы многообразия и однородные геодезические Пространства. - Владикавказ [ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А], 2012. - 412 с.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Геометрия и топология многообразий. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 2. Москва URSS [Либроком 2013] 295 с.

9.3. Интернет-ресурсы:

1. Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии: учебник / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко.- Изд. 3-е, перераб. и доп. - Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 512с.:
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=617
2. Бурого Д.Ю., Бурого Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии
<http://www.math.psu.edu/petrinin/papers/alexandrov/bbi.ru.pdf>
3. Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В.М. Элементарная топология.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=9313

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аудитория, оснащенная мультимедийным оборудованием вместимостью до 45 человек, компьютерный класс на 15 рабочих мест с выходом в интернет, принтер, проектор, экран, ноутбук.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и с учетом рекомендаций по направлению подготовки.

Автор: доц. каф. геометрии, доктор физ.-мат. наук Сосов Е.Н.

Рецензент: зав. каф. геометрии, доктор физ.-мат. наук Шурыгин В.В.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики и механики КФУ от 29 августа 2014 года, протокол № 7.