Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2018, №1, с. 10–20 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

С.С. ВОЛОСИВЕЦ, Б.И. ГОЛУБОВ

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМАМ ТИПА ХААРА

Аннотация. Для ортогональных систем типа Хаара, введенных Н.Я. Виленкиным в 1958 г., изучается абсолютная сходимость рядов из степеней коэффициентов Фурье с мультипликаторами из класса Гоголадзе–Месхиа. Условия сходимости рядов указанного вида выражены в терминах наилучших приближений функций в пространствах L^p полиномами по системам типа Хаара или дробного модуля непрерывности функций из пространств Винера V_p, $p>1$. Устанавливается точность полученных результатов.

Ключевые слова: система типа Хаара, коэффициенты Фурье, пространство L^p, функции ограниченной p-вариации, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

УДК: 517.518

Введение

Пусть $\mathbf{P}=\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2\le p_n\le N$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Положим по определению $m_k=p_1\dots p_k$ при $k\in\mathbb{N}$, $m_0=1$. Если A — множество чисел вида l/m_k, $l\in[0,m_k]\cap\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$, то любое число $t\in[0,1]\setminus A$ однозначно представимо в виде

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}j_k(t)/m_k,$$

где $j_k(t)\in[0,p_k)\cap\mathbb{Z}$. Каждое целое число $n\ge 2$ однозначно представимо в виде $n=m_k+r(p_{k+1}-1)+s$, где $k\in\mathbb{Z}_+$, $0\le r<m_k$, $1\le s<p_{k+1}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$. Пусть $\psi_1(t)=1$ на $[0,1]$, для $n\ge 2$ положим

$$\psi_n(t)=\psi_{k,r}^{(s)}(t)=m_k^{1/2}\exp(2\pi i s j_{k+1}(t)/p_{k+1})$$

при $t\in(r/m_k,(r+1)/m_k)\setminus A$ и $\psi_n(t)=0$ вне $[r/m_k,(r+1)/m_k]$. В точках $t\in A$, если они лежат в $(0,1)$, значение функции ψ_n полагаем равным полусумме пределов слева и справа по множеству $(0,1)\setminus A$. В концевых точках 0 и 1 значения функции ψ_n определяются по непрерывности. Для случая, когда все члены последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются простыми числами, это определение было введено Н.Я. Виленкиным ([1], дополнения, § 1) и является обобщением определения широко известной системы Хаара ([1], гл. 2, § 2), получающейся при $p_n=2$, $n\in\mathbb{N}$. Там же ([1], гл. 2, § 3 и гл. 4, § 4) показана полнота системы Хаара и возможность приближения непрерывной функции из $C[0,1]$ полиномами по системе Хаара с любой точностью в равномерной метрике. В статье [2] показано, что эти свойства

Поступила 26.08.2016

Благодарности. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00417).

системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ остаются справедливыми и в том случае, когда все члены последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $p_n \geq 2$, являются произвольными натуральными числами. Ряд интересных результатов о системе Хаара содержится в ([3], гл. 10). В работе [4] были получены оценки наилучших приближений и уклонений сумм Фурье по системам $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространствах $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $p \geq 1$, а также изучались вопросы абсолютной сходимости рядов из коэффициентов Фурье при условии принадлежности функций различным классам.

Для $f \in L^1[0,1)$ по определению положим

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\psi_n(t)}\,dt, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)\psi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для разбиения $\xi = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ отрезка $[0,1]$ определим p-вариационную сумму ($p \geq 1$) функции $f(x)$ по разбиению ξ формулой

$$\varkappa_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p}.$$

Модулем непрерывности $\omega_{1-1/p}(f,\delta)$ порядка $1-1/p$ функции f называется величина [5]

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup_{|\xi| \leq \delta} \varkappa_\xi^p(f),$$

где $|\xi| = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$. Будем писать $f \in V_p[0,1]$, $p \geq 1$, если $V_p(f,[0,1]) := \omega_{1-1/p}(f,1) < \infty$ и $f \in C_p[0,1]$, $p > 1$, если $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0$. Пространства $V_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, ввел Н. Винер [6], тогда как пространства $C_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, определил Л. Ч. Юнг [7]. При указанных выше значениях p эти пространства являются банаховыми относительно нормы

$$\|f\|_{V_p} = \max(\omega_{1-1/p}(f,1), \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|).$$

Пространство $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, как обычно, состоит из измеримых на $[0,1]$ функций, для которых $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} < \infty$.

Пусть $\mathcal{P}_n = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \psi_k(t) : a_k \in \mathbf{C} \right\}$. Тогда при $1 \leq p < \infty$ положим $E_n(f)_{V_p} = \inf\{\|f - t_n\|_{V_p} : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Наконец,

$$\omega(f,\delta)_p := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \right)^{1/p}.$$

Пусть $\alpha \geq 1$. Будем говорить, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $A(\alpha) = A(\mathbf{P},\alpha)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и

$$\left(\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \gamma_k^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq C m_n^{(1-\alpha)/\alpha} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \gamma_k =: C m_n^{(1-\alpha)/\alpha} \Gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Данное определение введено в работе Л. Гоголадзе [8] при $m_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, и стало широко известным после его совместной с Р. Месхиа работы [9]. Будем считать, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $A(\infty)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и

$$\max_{m_n < k \leq m_{n+1}} \gamma_k \leq C m_n^{-1} \Gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что $A(\alpha_1) \subset A(\alpha_2)$ при $\alpha_1 > \alpha_2$ и что класс $\overline{A}$ содержится в $A(\alpha)$ при всех $\alpha \geq 1$, где $\overline{A}$ — класс положительных последовательностей γ со свойством $\max\limits_{m_n \leq k < m_{n+1}} \gamma_k \leq C \min\limits_{m_{n-1} \leq k < m_n} \gamma_k$, $n \in \mathbb{N}$, при некоторой постоянной $C > 0$. Класс $\overline{A}$ был введен П.Л. Ульяновым [10] также при $m_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Функция $\omega(t)$, возрастающая и непрерывная на $[0,1]$, называется модулем непрерывности, если $\omega(0) = 0$ и $\omega(t)$ полуаддитивна, т.е. $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$ при $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in [0,1]$. Модуль непрерывности $\omega(t)$ принадлежит классу Бари B, если $\int\limits_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,1]$, и классу Бари–Стечкина B_α, $\alpha \in (0,1]$, если $\delta^\alpha \int_\delta^1 t^{-\alpha-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,1]$. Известно, что из условия $\omega \in B_\alpha$, $\alpha > 0$, следует $\omega(2t) \leq C\omega(t)$, $t \in [0,1/2]$, то ω удовлетворяет Δ_2-условию. Подробнее об этих классах см. в [11].

В [4] установлены следующие результаты, касающиеся сходимости рядов из коэффициентов Фурье со степенным весом по системе типа Хаара.

Теорема A. 1) *Пусть $f \in C[0,1]$ и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty n^{-1/2}\omega(f,1/n)$, где $\omega(f,t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0,1], |x-y| \leq t\}$ — модуль непрерывности f. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty |\widehat{f}(n)|$ сходится.*

2) *Пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности такой, что $\sum\limits_{n=1}^\infty n^{-1/2}\omega(1/n) = \infty$ и $\omega(t)/t$ не возрастает на $(0,1]$. Тогда существует функция $f_0 \in C[0,1]$ такая, что $\omega(f_0,t) \leq \omega(t)$, $t \in [0,1]$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty |\widehat{f}_0(n)|$ расходится.*

3) *Пусть $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, тогда для всякого $\beta > 2(2\alpha+1)^{-1}$ и любого $\gamma < \alpha$ сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^\infty |\widehat{f}(n)|^\beta$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty n^{\gamma-1/2}|\widehat{f}(n)|$.*

4) *При $\beta = 2(2\alpha+1)^{-1}$ и $\gamma = \alpha$ в общем случае утверждение п. 3) теряет силу.*

Теорема B. 1) *Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in V_p[0,1]$. Тогда для любого $\beta > 2p/(p+2)$ и любого $\gamma < 1/p$ сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^\infty |\widehat{f}(n)|^\beta$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty n^{\gamma-1/2}|\widehat{f}(n)|$.*

2) *При $\beta = 2p/(p+2)$ и $\gamma = 1/p$ в общем случае утверждение п. 1) теряет силу.*

В [12] установлен критерий сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty n^\alpha|\widehat{f}(n)|^\beta$ для функций f с заданной мажорантой p-вариационного модуля непрерывности $\omega_{1-1/p}(f,\delta)$.

Теорема C. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq \beta \leq p$, $\alpha - \beta/2 - \beta/p + 1 > 0$, $\beta > 2(\alpha+1)/3$ и $\omega(t)$ — модуль непрерывности такой, что $\omega(\lambda t) \leq \lambda^{1-1/p}\omega(t)$ при $\lambda \geq 1$ и $\lambda t \in [0,1]$. Для того чтобы в классе $H^\omega_{1-1/p} = \{f \in V_p[0,1] : \omega_{1-1/p}(f,t) = O(\omega(t))\}$ каждая функция f удовлетворяла соотношению $\sum\limits_{n=1}^\infty n^\alpha|\widehat{f}(n)|^\beta < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha-\beta/2-\beta/p}\omega^\beta(1/n).$$

В данной работе для систем типа Хаара изучаются условия сходимости рядов вида $\sum\limits_{n=1}^\infty \gamma_n|\widehat{f}(n)|^\beta$ с весовыми последовательностями $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ из классов Гоголадзе–Месхиа и функций f из пространств $L^p[0,1]$ и $V_p[0,1]$ при $p \geq 1$. Условия сходимости указанных рядов выражены в терминах наилучших приближений функций в соответствующих пространствах по системе типа Хаара. Устанавливается точность полученных результатов. При этом для доказательства неулучшаемости используется более простая конструкция, чем в [4] и [12]. Близкие результаты для системы Хаара были получены авторами раньше в [13].

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда*

$$E_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq 2E_{m_n}(f)_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. При доказательстве теоремы 3 из [4] установлено равенство $S_{m_n}(f)(x) = m_n \int\limits_{I_r^n} f(t)\,dt$ для п. в. $x \in I_r^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in [0, m_n - 1] \cap \mathbb{Z}$. Следуя доказательству теорем 10.2.1 и 10.2.5 из [3], последовательно получаем

$$\|S_{m_n}(f)\|_p \leq \|f\|_p \ \text{ и } \ \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq 2E_{m_n}(f)_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p[0,1)$. Тогда*

$$\left(\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |\widehat{f}(k)|^p\right)^{1/p} \leq C(N) m_n^{1/p-1/2} E_{m_n}(f)_p.$$

Доказательство. Пусть $k \geq 2$ и $k = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s$, где $r \in [0, m_n - 1]$, $s \in [1, p_{n+1} - 1]$, $r, s \in \mathbb{Z}$. Будем использовать обозначения $I_r^n = (r/m_n, (r+1)/m_n)$ и $I_{r,l}^n = (r/m_n + (l-1)/m_{n+1}, r/m_n + l/m_{n+1})$, $r \in [0, m_n - 1]$, $l \in [1, p_{n+1}]$. Ясно, что $I_{r,l}^n = I_{p_{n+1}r+l-1}^{n+1}$. По определению

$$\psi_k(t) = \psi_{nr}^{(s)}(t) = m_n^{1/2} \exp(2\pi i s(l-1)/p_{n+1}), \quad x \in I_{r,l}^n.$$

В силу ортогональности системы $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, постоянства ψ_k на $I_{r,l}^n$ и неравенства Гёльдера имеем

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \int_0^1 (f(t) - S_{m_n}(f)(t))\overline{\psi_{nr}^{(s)}(t)}\,dt \right| = \left| \int_{I_r^n} (f(t) - S_{m_n}(f)(t))\overline{\psi_{nr}^{(s)}(t)}\,dt \right| =$$

$$= m_n^{1/2} \left| \sum_{l=1}^{p_{n+1}} \int_{I_{r,l}^n} (f(t) - S_{m_n}(f)(t))\,dt \exp(-2\pi i s(l-1)/p_{n+1}) \right| \leq$$

$$\leq m_n^{1/2} p_{n+1} \int_{I_r^n} |f(t) - S_{m_n}(f)(t)|\,dt \leq m_n^{1/2} p_{n+1} \left(\int_{I_r^n} |f(t) - S_{m_n}(f)(t)|^p\,dt \right)^{1/p} (1/m_n)^{1-1/p},$$

откуда получаем

$$|a_k(f)|^p = |a_{nr}^{(s)}(f)|^p \leq m_n^{p(1/p-1/2)} p_{n+1}^p \int_{I_r^n} |f(t) - S_{m_n}(f)(t)|^p\,dt. \tag{1}$$

Суммируя неравенства (1), находим

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_k|^p = \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} \sum_{r=0}^{m_n-1} |a_{nr}^{(s)}(f)|^p \leq m_n^{1-p/2} p_{n+1}^{p+1} \int_0^1 |f(t) - S_{m_n}(f)(t)|^p\,dt,$$

откуда по лемме 1

$$\left(\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_k(f)|^p\right)^{1/p} \le p_{n+1}^{1+1/p} m_n^{1/p-1/2} \|f - S_{m_n}(f)\|_p \le 2p_{n+1}^{1+1/p} m_n^{1/p-1/2} E_{m_n}(f)_p.$$

Так как $p_{n+1} \le N$, получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $f \in V_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \delta \le 1/n$. *Тогда*

$$\omega_{1-1/p}(f, n\delta) \le n^{1-1/p} \omega_{1-1/p}(f, \delta).$$

Для $0 < \delta \le 1$ *справедливо неравенство*

$$\omega(f, \delta)_p \le \delta^{1/p} \omega_{1-1/p}(f, \delta).$$

Доказательство приведено А.П. Терехиным в [5] (см. также [15]). Из первого неравенства вытекает, что $\omega_{1-1/p}(f, \delta)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Лемма 4. *Если* $1 < p < \infty$, $f \in V_p[0,1]$, *то* $E_n(f)_p \le C n^{-1/p} E_n(f)_{V_p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $n \in (m_k, m_{k+1}]$ и $t_n \in \mathcal{P}_n$ таков, что $\|f - t_n\|_{V_p} = E_n(f)_{V_p}$. По лемме 3 и теореме 5 из [4] (прямой теореме приближения полиномами по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^p[0,1]$) имеем

$$\begin{aligned} E_n(f)_p = E_n(f - t_n)_p \le E_{m_k}(f - t_n)_p \le C_1 \omega(f - t_n, 1/m_k)_p \le \\ \le C_1 m_k^{-1/p} \omega_{1-1/p}(f - t_n, 1/m_k) \le C_2 n^{-1/p} \|f - t_n\|_{V_p} = C_2 n^{-1/p} E_n(f)_{V_p}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 5. 1) *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0,1]$. *Тогда*

$$\omega(f, 1/n)_p \le C(N, p) n^{-1/p} \sum_{k=1}^{n} k^{1/p-1} E_k(f)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p[0,1]$ *и сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1} E_n(f)_p$. *Тогда* f *эквивалентна* ($f(x) = f_0(x)$ *п. в. на* $[0,1]$) *некоторой функции* $f_0(x) \in V_p[0,1]$ *и справедливо неравенство*

$$E_n(f_0)_{V_p} \le C\left(n^{1/p} E_n(f)_p + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{1/p-1} E_k(f)_p\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство см. в ([12], теоремы 5 и 4). Для системы Хаара первое утверждение ранее установлено в [14] (см. также [3], гл. 10, теорема 10.2.8).

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\gamma \in A(p/(p-\beta))$ *при* $0 < \beta < p$ *и* $\gamma \in A(\infty)$ *при* $\beta = p$. *Если* $f \in L^p[0,1]$ *и выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k [k^{-1/2} E_k(f)_p]^{\beta} < \infty, \tag{2}$$

то сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |\widehat{f}(k)|^{\beta}. \tag{3}$$

Доказательство. Если $f \in L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, то для $n \in \mathbb{Z}_+$ по лемме 2 имеем

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |\widehat{f}(k)|^p \le C_1 m_n^{1-p/2} E^p_{m_n}(f)_p. \qquad (4)$$

Если $0 < \beta < p$, то по неравенству Гёльдера получаем

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \gamma_k |\widehat{f}(k)|^\beta \le \left(\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \gamma_k^{p/(p-\beta)} \right)^{1-\beta/p} \left(\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{\beta/p}. \qquad (5)$$

В случае $0 < \beta < p$, $\gamma \in A(p/(p-\beta))$ из (5) и (4), пользуясь определением класса $A(\alpha)$ при $\alpha = p/(p-\beta)$, выводим $(1/\alpha - 1 = -\beta/p)$

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \gamma_k |\widehat{f}(k)|^\beta \le C_2 m_n^{\beta(1/p-1/2)} E^\beta_{m_n}(f)_p m_n^{-\beta/p} \Gamma_n \le$$

$$\le C_3 \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \gamma_k k^{-\beta/2} E^\beta_k(f)_p, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (6)$$

Суммируя неравенства (6) для всех $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} \gamma_k |\widehat{f}(k)|^\beta \le C_3 \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k [k^{-1/2} E_k(f)_p]^\beta < \infty,$$

т. е. ряд (3) сходится.

Пусть теперь $\beta = p$, $1 \le p < \infty$, и $\gamma \in A(\infty)$. В силу определения $A(\infty)$ и неравенства (4) находим

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \gamma_k |\widehat{f}(k)|^p \le \max_{m_n < k \le m_{n+1}} \gamma_k \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |\widehat{f}(k)|^p \le$$

$$\le C_4 m_n^{-1} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \gamma_k m_n^{1-p/2} E^p_{m_n}(f)_p \le C_5 \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \gamma_k [k^{-1/2} E_k(f)_p]^p.$$

Суммируя эти неравенства по $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} \gamma_k |\widehat{f}(k)|^\beta \le C_5 \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k [k^{-1/2} E_k(f)_p]^p$$

и ряд (3) сходится. □

Из теоремы 1 и неравенства $E_n(f)_p \le C\omega(f, 1/n)_p$, $n \in \mathbb{N}$ (см. теорему 5 в [4]) получается

Теорема 2. *Утверждение теоремы* 1 *остается справедливым, если условие* (2) *заменить условием* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k [k^{-1/2} \omega(f, 1/k)_p]^\beta < \infty$.

Неулучшаемость теоремы 1 при не слишком ограничительном условии (7) на последовательность мажорант наилучших приближений показывает

Теорема 3. *Будем считать, что* $1 \le p < \infty$, $\gamma \in A(p/(p-\beta))$ *при* $0 < \beta < p$ *и* $\gamma \in A(\infty)$ *при* $\beta = p$. *Пусть последовательность* $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывает, стремится к нулю и удовлетворяет условию Бари*

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\varepsilon_k \le C\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

а также условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{-\beta/2}\varepsilon_k^{\beta} = \infty$. *Тогда существует функция* $f_0 \in L^p[0,1]$ *такая, что* $E_n(f_0)_p \le \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, *и ряд* (3) *расходится при* $f = f_0$.

Доказательство. Так как $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает и стремится к нулю, то

$$\varepsilon_{m_{k+1}} \le \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \frac{\varepsilon_i}{m_{k+1}-m_k} \le 2\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \frac{\varepsilon_i}{m_{k+1}} \le 2\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \frac{\varepsilon_i}{i},$$

откуда в силу (7)

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_{m_k} \le \varepsilon_{m_n} + 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{\varepsilon_i}{i} \le \varepsilon_{m_n} + 2\sum_{i=m_n}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{i} \le C_1\varepsilon_{m_n}. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{-1/2}\varepsilon_{m_{n+1}} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \psi_k(x), \quad x \in [0,1]. \tag{9}$$

Отметим, что у функций $\psi_{nr}^{(s)}$ при одинаковых n, r и разных s один и тот же носитель. Оценим

$$\Big|\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \psi_k(x)\Big| \le \Big|\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\sum_{r=0}^{m_n-1} \psi_{nr}^{(s)}(x)\Big| \le \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\Big|\sum_{r=0}^{m_n-1} \psi_{nr}^{(s)}(x)\Big|.$$

Во внутренней сумме последнего выражения носители $\psi_{nr}^{(s)}$ не пересекаются, поэтому модуль этой суммы равен $m_n^{1/2}$ п. в. на $[0,1]$. В результате получим

$$\Big\|\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \psi_k(x)\Big\|_p \le \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} m_n^{1/2} \le (N-1)m_n^{1/2},$$

где N — мажоранта последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$. Поэтому

$$\|f_1\|_p \le \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{-1/2}\varepsilon_{m_{n+1}} \Big\|\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \psi_k\Big\|_p \le (N-1)\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{m_{n+1}} < \infty,$$

т. е. $f_1 \in L^p[0,1]$, причем в силу (8) при $n \in \mathbb{Z}_+$

$$E_{m_n}(f_1)_p \le \sum_{k=n+1}^{\infty} m_{k-1}^{-1/2}\varepsilon_{m_k} \Big\|\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \psi_i\Big\|_p \le (N-1)\sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_{m_k} \le C_2\varepsilon_{m_{n+1}}.$$

Из этого неравенства выводим $E_j(f_1)_p \le C_2\varepsilon_j$, $j \in \mathbb{N}$. Полагая $f_0 = f_1/C_2$, т. е. принимая во внимание равенство $\widehat{f}_0(k) = C_2^{-1}\widehat{f}_1(k) = C_2^{-1}m_n^{-1/2}\varepsilon_{m_{n+1}}$, $m_n < k \le m_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, легко получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty}\gamma_k|\widehat{f}_0(k)|^\beta = C_2^{-\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n}\gamma_k\frac{\varepsilon_{m_n}^\beta}{m_{n-1}^{\beta/2}} = C_3\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\frac{\varepsilon_{m_n}^\beta}{m_{n-1}^{\beta/2}}. \qquad (10)$$

Поскольку $0<\beta\le p$, $\gamma\in A(p/(p-\beta))\subset A(1)$ (при $\beta=p$ $A(\infty)\subset A(1)$), то $\Gamma_n\ge C_4\Gamma_{n+1}$ для некоторой постоянной $C_4>0$. Следовательно, из (10) и условия теоремы получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty}\gamma_k|\widehat{f}_0(k)|^\beta \ge C_5\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_{n+1}\varepsilon_{m_n}^\beta m_n^{-\beta/2}\ge C_5\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}}\gamma_k\varepsilon_k^\beta k^{-\beta/2}=\infty. \qquad \square$$

В следующей теореме показывается окончательность условия теоремы 2 при дополнительном ограничении $\omega\in B\cap B_{1/p}$ на мажоранту L^p-модуля непрерывности функции.

Теорема 4. *Пусть* $1<p<\infty$, $\gamma\in A(p/(p-\beta))$ *при* $0<\beta<p$ *и* $\gamma\in A(\infty)$ *при* $\beta=p$. *Далее, пусть* $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности,* $\omega\in B\cap B_{1/p}$ *и* $\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i i^{-\beta/2}\omega^\beta(1/i)=\infty$. *Тогда существует* $f_0\in L^p[0,1]$ *такая, что* $\omega(f_0,t)_p\le\omega(t)$, $t\in[0,1]$, *и ряд* (3) *расходится для* $f=f_0$.

Доказательство. Рассмотрим снова функцию f_1, заданную равенством (9), где $\varepsilon_i=\omega(1/i)$, $i\in\mathbb{N}$. Из доказательства теоремы 3 следует, что выполняется неравенство $E_n(f_1)_p\le C_1\omega(1/n)$, $n\in\mathbb{N}$. Известно ([11], леммы 2 и 3), что условие $\omega\in B$ равносильно условию (7) для $\varepsilon_i=\omega(1/i)$ и что условие $\omega\in B_{1/p}$ равносильно неравенству

$$\sum_{k=1}^{n}k^{1/p-1}\omega(1/k)\le C_2 n^{1/p}\omega(1/n),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Используя лемму 5, выводим неравенство $\omega(f_1,1/n)_p\le C_3\omega(1/n)$, $n\in\mathbb{N}$. На основании свойств модуля непрерывности находим $\omega(f_1,t)_p\le C_4\omega(t)$, $t\in[0,1]$. В силу (10) для $f_0=f_1/C_4$ получаем утверждение теоремы. $\square$

Из теорем 1 и 2 с помощью лемм 3 и 4 выводится

Теорема 5. *Пусть* $1<p<\infty$, $f\in V_p[0,1]$, $0<\beta\le p$, $\gamma\in A(p/(p-\beta))$ *(т. е.* $\gamma\in A(\infty)$ *при* $p=\beta$*). Если выполняется одно из условий*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k[k^{-(1/2+1/p)}E_k(f)_{V_p}]^\beta<\infty, \qquad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k[k^{-(1/2+1/p)}\omega_{1-1/p}(f,1/k)]^\beta<\infty, \qquad (12)$$

то ряд (3) *сходится.*

Докажем окончательность условий (11) и (12) этой теоремы при некоторых ограничениях. Начнем с условия (11).

Теорема 6. *Пусть* $1<p<\infty$, $0<\beta<p$, $\gamma\in A(p/(p-\beta))$, *последовательность* $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ *убывает, стремится к нулю, удовлетворяет условию Бари* (7), *а также условию* $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k[k^{-(1/2+1/p)}\varepsilon_k]^\beta=\infty$. *Тогда существует функция* $f_0\in V_p[0,1]$ *такая, что* $E_k(f_0)_{V_p}\le\varepsilon_k$, $k\in\mathbb{N}$, *и ряд* (3) *расходится при* $f=f_0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-1/2-1/p} \varepsilon_{m_n} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \psi_k(x).$$

Аналогично доказательству теоремы 3 в силу (7) и (8) имеем

$$\|f_1\|_p \le \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-1/2-1/p} \varepsilon_{m_n} C_1 m_n^{1/2} \le C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m_n} < \infty$$

и

$$E_{m_n}(f_1)_p \le \sum_{j=n+1}^{\infty} m_j^{-1/2-1/p} \varepsilon_{m_j} \Big\| \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \psi_k(x) \Big\|_p \le$$

$$\le C_1 \sum_{j=n+1}^{\infty} m_j^{-1/p} \varepsilon_{m_j} \le C_1 m_{n+1}^{-1/p} \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon_{m_j} \le C_2 m_{n+1}^{-1/p} \varepsilon_{m_{n+1}}. \quad (13)$$

Из (13) при $i \in [m_n, m_{n+1})$ легко выводим неравенство

$$E_i(f_1)_p \le E_{m_n}(f)_p \le C_2 m_{n+1}^{-1/p} \varepsilon_{m_{n+1}} \le C_2 i^{-1/p} \varepsilon_i.$$

В силу леммы 5 и (7) находим

$$E_n(f_2)_{V_p} \le C_3 \left(n^{1/p} E_n(f)_p + \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/p-1} E_k(f)_p \right) \le C_3 C_2 \left(\varepsilon_n + \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1} \varepsilon_k \right) \le C_4 \varepsilon_n.$$

Здесь функция $f_2(x) \in V_p[0,1]$ равна $f_1(x)$ п. в. на $[0,1]$ (см. лемму 5). Полагая $f_0 = f_2/C_4$, получаем $E_n(f_0)_{V_p} \le \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, и из условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k [k^{-(1/2+1/p)} \varepsilon_k]^\beta = \infty$ выводим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |\widehat{f}_0(k)|^\beta \ge C_4^{-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \gamma_k (\varepsilon_{m_n} m_n^{-1/2-1/p})^\beta \ge$$

$$\ge C_5 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m_n}^\beta m_n^{-\beta(1/2+1/p)} \Gamma_{n+1} \ge C_5 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \gamma_k \varepsilon_k^\beta k^{-\beta(1/2+1/p)} \gamma_k = \infty.$$

Здесь использовано неравенство $\Gamma_n \ge C_6 \Gamma_{n+1}$ (см. доказательство теоремы 3). □

Окончательность условия (12) теоремы 5 показывает

Теорема 7. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \beta \le p$, $\omega \in B \cap B_{1-1/p}$ *и* γ *квази убывает, т. е.* $\gamma_m \ge A\gamma_n$ *при* $m \le n \le 2m$, $m, n \in \mathbb{N}$, *и некотором* $A > 0$. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k [k^{-(1/2+1/p)} \omega(1/k)]^\beta = \infty$, *то найдется функция* $g(t)$ *такая, что* $\omega_{1-1/p}(g, \delta) \le C\omega(\delta)$, $\delta \in [0,1]$, *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k |\widehat{g}(k)|^\beta = \infty$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} m_k^{-1/p} \omega(m_k^{-1}) \exp(2\pi i m_k t).$$

Аналогично ([12], теорема 6) с учетом $\omega \in B$ доказывается, что $E_n^*(g)_{V_p} \le C_1 \omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $E_n^*(g)_{V_p}$ — наилучшее приближение 1-периодической функции полиномами по системе

$\{\exp(2\pi ikt)\}_{k=-n}^{n}$ в пространстве функций ограниченной p-вариации. При этом в определении нормы берется точная верхняя грань p-вариаций на периодах. В силу обратной теоремы приближения в пространстве периодических функций ограниченной p-вариации ([15], лемма 2) и условия $\omega \in B_{1-1/p}$ имеем

$$\omega_{1-1/p}(g,1/n) \le C_2 n^{1/p-1}\sum_{k=1}^{n} k^{-1/p}E_k^*(f)_{V_p} \le C_3\omega(1/n), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{14}$$

Также в силу условия $\omega \in B_{1-1/p}$ заключаем, что $\omega_{1-1/p}(g,\delta)\le C_4\omega(\delta)$, $\delta\in[0,1]$. При этом в последнем неравенстве и в (14) можно брать модуль непрерывности $\omega_{1-1/p}(g,\delta)$, где g — функция на $[0,1]$, и такой же модуль непрерывности для 1-периодической функции (второй не меньше первого). Аналогично доказательству теоремы 6 в [12] (при этом важно, что $\beta\ge 1$) показывается, что

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |\widehat{g}(k)|^{\beta} \ge C_5 m_n^{1-\beta/2-\beta/p}\omega^{\beta}(1/m_n).$$

Если γ квазиубывает, то в силу ограниченности $m_n/m_{n-1}=p_n$ имеем

$$\sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \gamma_k|\widehat{g}(k)|^{\beta} \ge C_6\gamma_{m_n} m_{n-1}^{1-\beta/2-\beta/p}\omega^{\beta}(1/m_{n-1}) \ge C_7\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}}\gamma_k k^{-\beta/2-\beta/p}\omega^{\beta}(1/k).$$

Складывая эти неравенства по n от 1 до ∞, получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty}\gamma_k|\widehat{g}(k)|^{\beta} \ge C_7\sum_{k=m_1+1}^{\infty}\gamma_k k^{-\beta/2-\beta/p}\omega^{\beta}(1/k)=\infty. \qquad \square$$

Замечание. Из квазиубывания последовательности γ следует условие $\gamma\in\overline{A}$ (см. введение) и тем более $\gamma\in A(p/(p-\beta))$. Поэтому теорема 7 показывает неулучшаемость условия (12) при дополнительных условиях на γ и β.

Литература

[1] Качмаж С., Штейнгауз Г. *Теория ортогональных рядов* (Физматгиз, М., 1958).
[2] Голубов Б.И. *Об одном классе полных ортогональных систем*, Сиб. матем. журн. **9** (2), 297–314 (1968).
[3] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша* (Наука, М., 1987).
[4] Голубов Б.И., Рубинштейн А.И. *Об одном классе систем сходимости*, Матем. сб. **71** (1), 93–112 (1966).
[5] Терехин А.П. *Приближение функций ограниченной p-вариации*, Изв. вузов. Матем., № 2, 171–187 (1965).
[6] Wiener N. *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*, J. Math. and Phys. **3**, 72–94 (1924).
[7] Young L.C. *An inequality of the Hölder type, connected with Stielties integration*, Acta math. **67** (1), 251–282 (1936).
[8] Гоголадзе Л.Д. *Равномерная сильная суммируемость кратных тригонометрических рядов*, Докл. расшир. засед. семинара ин-та прикл. матем. им. И.Н. Векуа (Тбилиси) **1** (2), 48–51, 179 (1985).
[9] Gogoladze L., Meskhia R., *On the absolute convergence of trigonometric Fourier series*, Proc. Razmadze Math. Inst. **141**, 29–40 (2006).
[10] Ульянов П.Л. *О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **28** (4), 925–950 (1964).
[11] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Московск. матем. о-ва **5**, 483–522 (1956).
[12] Волосивец С.С., Скорынская О.С. *О приближении функций ограниченной p-вариации полиномами по системам Хаара–Виленкина*, Anal. Math. **31** (3), 195–215 (2005).
[13] Golubov B.I., Volosivets S.S. *Absolute convergence of the series of Fourier–Haar coefficients*, Sampl. Theory Signal Image Processing **13** (2), 125–150 (2014).

[14] Голубов Б.И. *Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша*, Матем. сб. **87** (2), 254–274 (1972).

[15] Volosivets S.S. *Convergence of series of Fourier coefficients of p-absolutely continuous functions*, Anal. Math. **26** (1), 63-80 (2000).

Сергей Сергеевич Волосивец

Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,

e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Борис Иванович Голубов

Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, Московская область, 141700, Россия,

e-mail: golubov@mail.mipt.ru

S.S. Volosivets and B.I. Golubov

Generalized absolute convergence of series from Fourier coeficients by systems of Haar type

Abstract. For orthogonal systems of Haar type introduced by N.Ya. Vilenkin in 1958 we study absolute convergence of series from Fourier coefficients raised to a positive power with multiplicators from Gogoladze–Meskhia class. The conditions for convergence of the series mentioned above are given in terms of best approximations of functions in L^p spaces by polynomials with respect to Haar type systems or in terms of fractional modulus of continuity of functions from Wiener spaces V_p, $p > 1$. We establish the sharpness of obtained results.

Keywords: Haar type system, Fourier coefficients, L^p space, functions of bounded p-variation, best approximation, modulus of continuity.

Sergei Sergeevich Volosivets

Saratov State University,
83 Astrakhanskya str., Saratov, 410012 Russia,

e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Boris Ivanovich Golubov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutskii Lane, Dolgoprudnyi, Moscow Region, 141700 Russia,

e-mail: golubov@mail.mipt.ru