Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.03.01 : МАТЕМАТИКА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ К ЗАДАЧАМ ГИДРОДИНАМИКИ

Работа завершена:
«____»_______________2015 г. ________________Р.И. Насыров

Работа проверена:
Научный руководитель
доктор физико-математических наук, доцент
«____»_______________2015 г. ________________И.Р. Каюмов

Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений
доктор физико-математических наук, профессор
« » 2015 г. ________________А. М. Елизаров

Казань 2015 г.

Содержание

Введение

Уравнения Навье-Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач. Названы по имени французского физика Анри Навье и британского математика Джорджа Стокса.

В анализе решений уравнений заключается суть одной из семи «проблем тысячелетия», за решение которых Математический институт Клэя назначил премию в 1 миллион долларов США. Необходимо доказать или опровергнуть существование глобального гладкого решения задачи Коши для трёхмерных уравнений Навье-Стокса. Нахождение общего аналитического решения системы Навье-Стокса для пространственного или плоского потока осложняется тем, что оно нелинейное и сильно зависит от начальных и граничных условий.

1. Уравнение для функции тока

Двумерные нестационарные уравнения вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta u_2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0,$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y},\ u_2 = -\dfrac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления (с помощью перекрестного дифференцирования) из первых двух уравнений сводятся к нелинейному уравнению четвертого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta w) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu \Delta\Delta w, \qquad (1)$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

2. Точные решения с обобщенным разделением переменных

Ниже описаны новые точные решения уравнения (1) с обобщенным (неполным) разделением переменных. Эти решения ищутся в виде конечных сумм

$$w(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y,t)$$

или

$$w(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x,t) g_k(y),$$

где функции $f_k(x)$ и $g_k(y,t)$ [или $f_k(x,t)$ и $g_k(y)$] подбираются так, чтобы удовлетворить рассматриваемому уравнению. Для нелинейных уравнений в отличие от нелинейных функции $g_k(y,t)$ при различных значениях k связаны друг с другом (и с функциями $f_m(x)$).

Рассмотрим простейший случай, когда одна система координатных функций, например $f_k(x)$, описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Наиболее распространенные решения таких уравнений вида

$$f_k(x) = x^k, \quad f_k(x) = e^{\lambda_k x},$$

$$f_k(x) = \sin(\alpha_k x), \quad f_k(x) = \cos(\beta_k x),$$

и их линейные комбинации используются в данной работе для поиска точных решений уравнения (1) ($\lambda_k, \alpha_k, \beta_k -$ свободные параметры). Вторая система функций $g_k(y,t)$ определяется путем решения соответствующих нелинейных уравнений.

Замечание. Решения с обобщенными разделением переменных иного вида указаны в разделе 3(п. 2^0) и раздел 4 (подпункты 2^0, 9^0).

3. Стационарные решения в декартовой и полярной системах координат

1^0. Точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = 6vx(y+\lambda)^{-1} + A(y+\lambda)^3 + B(y+\lambda)^{-1} + C(y+\lambda)^{-2} + D$$

$(v \neq 0)$,

$$w(x,y) = (Ax+B)e^{-\lambda y} + v\lambda x + C,$$

$$w(x,y) = A\exp(-\lambda x) + B\exp(-\lambda y) + v\lambda(x-y) + C,$$

$$w(x,y) = A\exp(\lambda x) + B\exp(-\lambda y) + v\lambda(x+y) + C,$$

$$w(x,y) = [Ash(\beta x) + Bch(\beta x)]e^{-\lambda y} + \frac{v}{\lambda}(\beta^2 + \lambda^2)x + C,$$

$$w(x,t) = [A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]e^{-\lambda y} + \frac{v}{\lambda}(\lambda^2 - \beta^2)x + C,$$

$$w(x,t) = Ae^{\lambda y + \beta x} + Be^{\gamma x} + v\gamma y + \frac{v}{\lambda}\gamma(\beta - \gamma)x + C,$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\lambda^2 + \beta^2},$$

где $A, B, C, D, \beta, \lambda -$ произвольные постоянные.

Полагая во втором решении $A = -\nu\lambda,\ \ B = C = 0,\ \lambda = \sqrt{\frac{k}{\nu}},$ получим

$$w = \sqrt{k\nu}\,x\left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{\nu}}y\right)\right].$$

Это решение описывает стационарное движение жидкости, вызванное движением точек поверхности $y = 0$ со скоростью $u_1\,|_{y=0} = kx.$

2^0. Точное решение с неполным разделением переменных более общего вида

$w(x, y) = F(z)x + G(z), z = y + kx,$

где функции $F = F(z)$ и $G = G(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$F'_z F''_z - FF'''_{zzz} = \nu(k^2+1)F''''_{zzzz}, \qquad (2)$$

$$G'_z F''_{zz} - FG'''_{zzz} = \nu(k^2+1)G''''_{zzzz} + 4k\nu F'''_{zzz} + \frac{2k}{(k^2+1)}FF''_{zz}. \qquad (3)$$

В результате интегрирования получим систему уравнений третьего порядка

$$(F'_z)^2 - FF''_{zz} = \nu(k^2+1)F'''_{zzz} + A, \qquad (4)$$

$$G'_z F'_z - FG''_{zz} = \nu(k^2+1)G'''_{zzz} + \psi(z) + B, \qquad (5)$$

где A и B - произвольные постоянные, а функция $\psi(z)$ определяется формулой

$$\psi(z) = 4k\nu F''_{zz} + \frac{2k}{(k^2+1)}\int FF''_{zz}dz.$$

Порядок автономного уравнения (4) может быть понижен на единицу. Уравнение (2) имеет частые решения ($a, b, \lambda -$ любые):

$$F(z) = az + b, \quad z = y + kx,$$

$$F(z) = 6v(k^2 + 1)(z + a)^{-1},$$

$$F(z) = ae^{-\lambda z} + \lambda v(k^2 + 1).$$

В общем случае уравнение (5) подстановкой $U = G'_z$ приводится к линейному неоднородному уравнению второго порядка, которое при $\psi = B = 0$ (т.е в однородном случае) имеет нетривиальное частное решение

$$U = \begin{cases} F''_{zz}, \text{если } F''_{zz} \neq 0, \\ F, \text{если } \ F''_{zz} = 0. \end{cases}$$

Поэтому его общее решение можно выразить в квадратурах.

3^0. Решение с обобщенным разделением переменных в полярной системе координат:

$$w(r, \theta) = f(r)\theta + g(r).$$

Здесь, $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$ а функции $f = f(r)$ и $g = g(r)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-f'_r L(f) + f[L(f)]'_r = vrL^2(f), \qquad (6)$$

$$-g'_r L(f) + f[L(g)]'_r = vrL^2(g), \qquad (7)$$

где $L(f) = r^{-1}(rf'_r)'_r$.

Точное решение системы (6), (7):

$$f(r) = C_1 \ln r + C_2,$$

$$g(r) = C_3 r^2 + C_4 \ln r + C_5 \int \left[\int r Q(r) dr \right] \frac{dr}{r} + C_6,$$

$$Q(r) = \int r^{(C_2/v)-1} \exp\left(\frac{C_1}{2v} \ln^2 r \right) dr,$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ - произвольные постоянные.

Таблица 1. Точные решения уравнений (9) и (11)

№	Функция $F = F(y,t)$ (или общий вид решения)	Функция $f_1(t)$ в уравнении (11)	Определяющие коэффициенты (или определяющее уравнение)
1	$F = \varphi(t) y + \psi(t)$	$f_1(t) = \varphi_t' + \varphi^2$	-
2	$F = \dfrac{6v}{y + \psi(t)} + \psi_t'(t)$	$f_1(t) = 0$	-
3	$F = A\exp[-\lambda y - \lambda\psi(t)] + \psi_t'(t) + v\lambda$	$f_1(t) = 0$	-
4	$F = Ae^{-\beta t}\sin[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi_t'(t)$	$f_1(t) = Be^{-2\beta t}$	$\beta = v\lambda^2, B = A^2\lambda^2 > 0$
5	$F = Ae^{-\beta t}\cos[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi_t'(t)$	$f_1(t) = Be^{-2\beta t}$	$\beta = v\lambda^2, B = A^2\lambda^2 > 0$
6	$F = Ae^{-\beta t} sh[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi_t'(t)$	$f_1(t) = Be^{2\beta t}$	$\beta = v\lambda^2, B = A^2\lambda^2 > 0$
7	$F = Ae^{-\beta t} ch[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi_t'(t)$	$f_1(t) = Be^{2\beta t}$	$\beta = v\lambda^2, B = A^2\lambda^2 < 0$
8	$F = F(\xi), \xi = y + \lambda t$	$f_1(t) = A$	$-A + \lambda F_{\xi\xi}'' + (F_\xi')^2 - FF_{\xi\xi}'' = vF_{\xi\xi\xi}'''$
9	$F = t^{1/2}[H(\xi) - \dfrac{1}{2}\xi], \xi = yt^{1/2}$	$f_1(t) = At^{-2}$	$\dfrac{3}{4} - A - 2H_\xi' + (H_\xi')^2 - HH_{\xi\xi}'' = vH_{\xi\xi\xi}'''$

Примечание. Здесь $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - произвольные функции; A, λ – произвольные постоянные.

4. Нестационарные решения в декартовой и полярной системах координат

1^0. Точное решение с неполным разделением переменных:

$$w(x,y,t) = F(y,t)x + G(y,t), \qquad (8)$$

где функции $F = F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из системы одномерных уравнений четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial F \partial^2 F}{\partial y \partial y^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \nu \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial G \partial^2 F}{\partial y \partial y^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} = \nu \frac{\partial^4 G}{\partial y^4}. \qquad (10)$$

Уравнение (9) решается независимо от уравнения (10). Интегрируя уравнения (9) и (10) по *y*, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + f_1(t), \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F \partial G}{\partial y \partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + f_2(t), \qquad (12)$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - произвольные функции. Уравнение (12) линейно относительно функции *G*. Замена

$$G = \int U dy - hF + h'_t y, \qquad (13)$$

$$U = U(y,t), \; F = F(y,t),$$

где функция $h = h(t)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$h''_{tt} - f_1(t)h = f_2(t), \qquad (14)$$

приводит (12) к линейному однородному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}U. \qquad (15)$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (9) или (11), то определение функции G сводится к решению линейных уравнений (14), (15) с последующим интегрированием по формуле (13).

Точные решения уравнения (9) приведены в таблице 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения в двух последних строках таблицы 1, определяющие решение типа бегущей волны и автомодельное решение, являются автономными и поэтому допускают понижение порядка.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (14) находится с помощью фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения при $f_2 \equiv 0$. Необходимые формулы и фундаментальные решения однородного уравнения (14), соответствующие всем указанным в таблице 1 точным решениям уравнения (9), имеются в справочниках.

Уравнение (15) для любой функции $F = F(y,t)$ имеет тривиальное решение. Выражения в таблице 1 и формула (13) при $U=0$ описывают некоторые точные решения вида (8). Более широкий класс точных решений можно получить, если рассмотреть нетривиальные решения уравнения (15).

Таблица 2. Преобразования уравнения (15) для соответствующих точных решений уравнения (11).

№	Преобразования уравнения (15)	Полученное уравнение
1	$U = \frac{1}{\Phi(t)} u(z,\tau), \tau = \int \Phi^2(t)dt,$ $z = y\Phi(t) + \int \psi(t)\Phi(t)dt, \Phi(t) = \exp[\int \varphi(t)dt]$	$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
2	$U = \zeta^{-3} u(\zeta, t), \zeta = y + \psi(t)$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$
3	$U = e^{\eta} Z(\eta, t), \eta = -\lambda y - \lambda \psi(t)$	$\frac{\partial Z}{\partial t} = \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} + (\nu\lambda^2 - A\lambda e^{\eta}) \frac{\partial Z}{\partial \eta}$
8	$U = u(\xi, t), \xi = y + \lambda t$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + [F(\xi) - \lambda] \frac{\partial u}{\partial \xi} - F'_{\xi}(\xi) u$
9	$U = t^{-1/2} u(\xi, \tau), \xi = yr^{-1/2}, \tau = \ln t$	$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + H(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} + [1 - H'_{\xi}(\xi)] u$

Примечание. Номер в первом столбце соответствует номеру точного решения $F = F(y,t)$ в таблице 1.

В таблице 2 приведены преобразования, упрощающие уравнение (15) для некоторых из указанных в таблице 1 решений уравнений (9) [или (11)]. Видно, что в первых двух случаях решения уравнения (15) выражаются через решения классического уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. В трех других случаях уравнение (15) приводится к уравнению с разделяющими переменными.

2^0. Точное решение с неполным разделением переменных более общего вида

$$w(x,y,t)=F(\xi,t)x+G(\xi,t),\xi=y+kx,$$

где функции $F(\xi,t)$ и $G=G(\xi,t)$ определяются из системы одномерных уравнений четвертого порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t\partial\xi^2}+\frac{\partial F\partial^2 F}{\partial\xi\partial\xi^2}-F\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3}=v(k^2+1)\frac{\partial^4 F}{\partial\xi^4}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t\partial\xi^2}+\frac{\partial G\partial^2 F}{\partial\xi\partial\xi^2}-F\frac{\partial^3 G}{\partial\xi^3}=v(k^2+1)\frac{\partial^4 G}{\partial\xi^4}+4vk\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3}+\frac{2k}{k^2+1}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}-F\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial\xi}\right).$$
(17)

Интегрируя уравнения (16) и (17) по ξ, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial\xi}+\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^2-F\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}=v(k^2+1)\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3}+f_1(t), \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial\xi}+\frac{\partial F\partial G}{\partial\xi\partial\xi}-F\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}=v(k^2+1)\frac{\partial^3 G}{\partial\xi^3}+Q(\xi,t), \quad (19)$$

где $f_1(t)$ -произвольная функция, а функция $Q(\xi,t)$ определяется по формуле

$$Q(\xi,t)=4vk\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}-\frac{2k}{k^2+1}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{2k}{k^2+1}\int F\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}d\xi+f_2(t)$$

($f_2(t)$ - любая).

Уравнение (19) линейно относительно функции G. Замена $U = \frac{\partial G}{\partial \xi}$ приводит его к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + F\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi}U + Q(\xi, t). \qquad (20)$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (16) или (18), то определение функции G сводится к линейному уравнению второго порядка (20). Уравнение (16) с помощью сжатия независимых переменных $\xi = (k^2+1)\zeta, t = (k^2+1)\tau$ приводится к уравнению (9), в котором y и t следует заменить на ζ и τ (точные решения уравнения (9) описаны в таблице 1).

3^0. Точное решение (частный случай решения вида (8)):

$$w(x, y, t) = e^{-\lambda y}[f(t)x + g(t)] + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

$$f(t) = C_1 E(t), \quad E(t) = \exp[\nu\lambda^2 t - \lambda\int\varphi(t)dt],$$

$$g(t) = C_2 E(t) - C_1 E(t)\int\psi(t)dt,$$

где $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ - произвольные функции, C_1, C_2, λ - произвольные параметры.

4^0. Точное решение:

$$w(x, y, t) = e^{-\lambda y}[A(t)e^{\beta x} + B(t)e^{-\beta x}] + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

$$A(t) = C_1\exp[\nu(\lambda^2+\beta^2)t - \beta\int\psi(t)dt - \lambda\int\varphi(t)dt],$$

$$B(t) = C_2\exp[\nu(\lambda^2+\beta^2)t + \beta\int\psi(t)dt - \lambda\int\varphi(t)dt],$$

где $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ - произвольные функции, C_1, C_2, λ, β - произвольные параметры.

5^0. Точное решение:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}[A(t)\sin(\beta x) + B(t)\cos(\beta x)] + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ - произвольные функции, $\lambda, \beta -$ произвольные параметры, а функции *A(t)* и *B(t)* удовлетворяют линейной неавтономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A_t' &= [v(\lambda^2 - \beta^2) - \lambda\varphi(t)]A + \beta\psi(t)B, \\ B_t' &= [v(\lambda^2 - \beta^2) - \lambda\varphi(t)]B - \beta\psi(t)A. \end{aligned} \qquad (21)$$

Общее решение системы (21) имеет вид

$$A(t) = \exp[v(\lambda^2 - \beta^2) - \lambda\int\varphi dt] \times [C_1\sin(\beta\int\psi dt) + C_2\cos(\beta\int\psi dt)],$$

$$B(t) = \exp[v(\lambda^2 - \beta^2) - \lambda\int\varphi dt] \times [C_1\cos(\beta\int\psi dt) - C_2\sin(\beta\int\psi dt)],$$

где $\varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t)$; C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

В частности, при $\varphi = \frac{v}{\lambda}(\lambda^2 - \beta^2)$, $\psi = a$ получим периодическое решение

$$A(t) = C_1\sin(a\beta t) + C_2\cos(a\beta t),$$

$$B(t) = C_1\cos(a\beta t) - C_2\sin(a\beta t).$$

6^0. Точные решения:

$$w(x,y,t) = A(t)\exp(k_1 x + \lambda_1 y) + B(t)\exp(k_2 x + \lambda_2 y) + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ - произвольные функции, $k_1, \lambda_1, k_2, \lambda_2$ – произвольные параметры, связанные одном из двух соотношений:

$k_1^2 + \lambda_1^2 = k_2^2 + \lambda_2^2$ (первое семейство решений),

$k_1\lambda_2 = k_2\lambda_1$ (второе семейство решений),

а функции *A(t)* и *B(t)* удовлетворяют линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$A_t' = [\nu(k_1^2 + \lambda_1^2) + \lambda_1\varphi(t) - k_1\psi(t)]A,$$

$$B_t' = [\nu(k_2^2 + \lambda_2^2) + \lambda_2\varphi(t) - k_2\psi(t)]B.$$

Эти уравнения легко интегрируются:

$$A(t) = C_1 \exp[\nu(k_1^2 + \lambda_1^2)t + \lambda_1 \int \varphi(t)dt - k_1 \int \psi(t)dt],$$

$$B(t) = C_2 \exp[\nu(k_2^2 + \lambda_2^2)t + \lambda_2 \int \varphi(t)dt - k_2 \int \psi(t)dt].$$

7^0. Точное решение:

$$w(x,y,t) = [C_1\sin(\lambda x) + C_2\cos(\lambda x)] \times [A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)] + \varphi(t)x + \chi(t),$$

где $\psi(t), \chi(t)$ - произвольные функции, C_1, C_2, λ, β - произвольные параметры, а функции *A(t)* и *B(t)* удовлетворяют линейной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_t' = -\nu(\lambda^2 + \beta^2)A - \beta\varphi(t)B,$$

$$(22)$$

$$B_t' = -\nu(\lambda^2 + \beta^2)B + \beta\varphi(t)A.$$

Общее решение системы (22) имеет вид

$$A(t) = \exp[-\nu(\lambda^2 + \beta^2)t] \times [C_3 \sin(\beta \int \varphi dt) + C_4 \cos(\beta \int \varphi dt)], \quad \varphi = \varphi(t),$$

$$B(t) = \exp[-\nu(\lambda^2 + \beta^2)t] \times [-C_3 \cos(\beta \int \varphi dt) + C_4 \sin(\beta \int \varphi dt)],$$

где C_3 и C_4 - произвольные постоянные.

8^0. Точное решение:

$$w(x, y, t) = [C_1 sh(\lambda x) + C_2 ch(\lambda x)] \times [A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)] + \varphi(t) + \chi(t),$$

где $\varphi(t), \chi(t)$ - произвольные функции, C_1, C_2, λ, β - произвольные параметры, а функции *A(t)* и *B(t)* удовлетворяют линейной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_t' = \nu(\lambda^2 - \beta^2)A - \beta\varphi(t)B,$$

$$(23)$$

$$B_t' = \nu(\lambda^2 - \beta^2)B + \beta\varphi(t)A.$$

Общее решение системы (23) имеет вид

$$A(t) = \exp[\nu(\lambda^2 - \beta^2)t] \times [C_3 \sin(\beta \int \varphi dt) + C_4 \cos(\beta \int \varphi dt)], \varphi = \varphi(t),$$

$$B(t) = \exp[\nu(\lambda^2 - \beta^2)t] \times [-C_3 \cos(\beta \int \varphi dt) + C_4 \sin(\beta \int \varphi dt)],$$

где C_3 и C_4 - произвольные постоянные.

9^0. Точное решение:

$$w(x,y,t)=u(z,t)+\varphi(t)x+\psi(t)y, z=kx+\lambda y$$

где $\varphi(t), \chi(t)$ - произвольные функции, k, λ - произвольные параметры, а функция $u(z,t)$ описывается линейным уравнением четвертого порядка:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}+[k\psi(t)-\lambda\varphi(t)]\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=\nu(k^2+\lambda^2)\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}.$$

Преобразованием

$$U(\xi,t)=\frac{\partial^3 u}{\partial z^2}, \xi=z-\int[k\psi(t)-\lambda\varphi(t)]dt,$$

приводим его к обычному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\nu(k^2+\lambda^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2},$$

$$a^2=\nu(k^2+\lambda^2),$$
$$a=\sqrt{\nu(k^2+\lambda^2)},$$

a - коэффициент теплопроводности,

$$U(\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\infty}^{-\infty} f(x)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}dx,$$

где *f(x)*-начальное условие в момент времени *t=0*.

Заключение

В работе описаны результаты по многопараметрическим семействам точных решений стационарных и нестационарных уравнений Навье-Стокса. Рассмотрены также решения более общего вида, зависящие от одной или нескольких произвольных функций. Для поиска точных решений использованы различные модификации метода обобщенного разделения переменных.

Список литературы

1. Полянин А.Д. // Доклады Академии Наук.-2001.- том.380.- №4.- с.491-496.
2. Полянин А.Д., Журов А.И. // Доклады Академии Наук.-2002.- том.382.- №5.- с.606-611.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. // Уравнения математической физики.// Издательство “НАУКА”-1964.
4. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф // Метод разделения переменных в математической физике. // Учебное издание.-2009.
5. www.wolframalpha.com