Известия вузов. Математика
2016, №10, с. 65–69

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Н.Р. АБУБАКИРОВ, Л.А. АКСЕНТЬЕВ

О КОНЕЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Аннотация. В статье выведен новый класс решений обратных задач логарифмического потенциала в виде логарифмической функции от отношения полиномов одинаковых степеней. Приведены примеры конечной разрешимости обратных задач.

Ключевые слова: логарифмический потенциал, интегральное уравнение, звездообразность.

УДК: 517.956

1. Напомним [1], что логарифмический потенциал в форме

$$\iint_D 2\mu \ln\,[1/R(z,z_1)]\,d\sigma(z_1),$$

где $R(z,z_1)=|z-z_1|$, $d\sigma(z_1)$ — элемент площади, содержащий точку $z_1\in D$, возникает для цилиндрических тел, заполненных однородной тяготеющей массой с плотностью $\mu\equiv\mathrm{const}$. Комплексный потенциал для той же области D имеет вид

$$w(z)=\iint_D 2\mu\ln\frac{1}{z-z_1}d\sigma(z_1). \tag{1}$$

Если тяготеющая масса распределена по поверхности цилиндра с направляющей линией $\partial D=L$, то комплексный потенциал вида (1) превратится в

$$w(z)=\int_L 2\mu\ln\frac{1}{z-z_1}ds(z_1). \tag{2}$$

Интегральные соотношения (1), (2) при переходе к кругу в плоскости ω получаются в двух вариантах

$$w[z(\omega)]=\iint_{|\omega|<1} 2\mu\ln\frac{1}{z(\omega)-z(\omega_1)}|z'(\omega_1)|^2 r_1 dr_1 d\theta_1, \tag{3}$$

$$w[z(\omega)]=\int_0^{2\pi} 2\mu\ln\frac{1}{z(\omega)-z(\omega_1)}|z'(\omega_1)| r_1 d\theta_1, \tag{4}$$

$z\,(|\omega<1|)=D$, $\omega_1=r_1e^{i\theta_1}$.

В обратных задачах нужно найти $z(\omega)$ по функции $w(z)$, заданной в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки. Для решения таких задач используются уравнения (3),

Поступила 15.03.2016

(4) или эквивалентные им уравнения. Функцию $w(z)$ можно взять в виде (1), причем вещественная потенциальная функция представится формулой

$$v(z) = \operatorname{Re} w(z) = \iint_D 2\mu \ln \frac{1}{|z - z_1|} d\sigma(z_1).$$

И.М. Рапопорт [1], [2] в обратной задаче логарифмического потенциала в качестве начальной функции берет $-v(z)$. В.К. Иванов [3], [4] обращается к функции $u(z)$, которая строится по $v(z)$ с дополнительным множителем $(-2/\pi)$. Именно,

$$u(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial v(z)}{\partial z} = -\frac{2}{\pi} \left(- \iint_D \frac{\mu d\sigma(z_1)}{z - z_1} \right) = \iint_D \frac{2\mu}{\pi} \frac{d\sigma(z_1)}{z - z_1}. \tag{5}$$

2. Следуя В.К. Иванову [3], [4], под обратной задачей логарифмического потенциала будем понимать задачу нахождения (с условиями (1) или (5)) плоской односвязной области $D \subset \mathbf{C}_z$ $(z = x+iy)$. Если граница искомой области D определяется конечным числом параметров, удовлетворяющих конечной системе уравнений (составленной по заданной функции $u(z)$ или $v(z)$), то такая задача называется разрешимой в конечном виде.

При записи соотношений (3) и (4) была введена функция $z(\omega)$, конформно отображающая единичный круг плоскости ω на область D плоскости z. С функцией $z(\omega)$ связана еще одна функция

$$z^*(\omega) = \overline{z(1/\overline{\omega})}.$$

В.К. Ивановым доказана

Теорема 1 ([4])**.** *Пусть $u(z)$ с представлением* (5) *является рациональной функцией, имеющей полюсы $z_1, z_2, \ldots, z_s$ порядков $k_1, k_2, \ldots, k_s$ с суммой $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$, и для нее существует решение обратной задачи с $\mu = 1/2$. Тогда*

$$z^*(\omega) = \frac{p(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{k_1} \ldots (\omega - \omega_s)^{k_s}},$$

где $p(\omega)$ — полином степени $(n - 1)$, а $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ — прообразы точек $z_1, z_2, \ldots, z_s$ при конформном отображении $z(\omega)$.

В случае постоянной плотности μ $(0 < \mu < \infty)$ представим следующий результат.

Теорема 2. *Критерием того, что решением обратной задачи логарифмического потенциала (с заданной плотностью μ) является круг $|z - z_0| < \sqrt{A/(2\mu)}$, состоит в представлении $u(z) = A/(z - z_0)$.*

Схема доказательства. Сдвигом на вектор $(-z_0)$ приведем общее положение к случаю с $z_0 = 0$.

1) Для обоснования импликации

$$u(z) = \frac{A}{z} \ \Rightarrow \ |z| < \sqrt{\frac{A}{2\mu}}$$

введем функцию $z(\omega) = z'(0)\omega + a_2\omega^2 + \cdots$, $\arg z'(0) = 0$, которая отображает круг $|\omega| < 1$ на искомую область. Применяя интегральное уравнение В.К. Иванова [4]

$$z^*(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{u(z(\tau))}{\tau - t} d\tau, \quad |t| > 1, \tag{6}$$

получим

$$u[z(\omega)] = \frac{A}{z'(0)\omega} + \Phi(\omega) \ \Rightarrow\ z^*(\zeta) = \frac{A}{2\mu z'(0)\zeta} \ \Rightarrow\ z(\omega) = \overline{z^*\left(1/\overline{\omega}\right)} = \frac{A}{2\mu z'(0)}\omega.$$

Отсюда

$$(z'(0))^2 = \frac{A}{2\mu} \ \text{ и поэтому } \ z(\omega) = \sqrt{\frac{A}{2\mu}}\omega.$$

2) Если круг $|z| < \sqrt{A/(2\mu)}$ заполнен массой с плотностью μ, то для получения $u(z)$ нужно вычислить интеграл

$$u(z) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{A/(2\mu)}} \mu\frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\rho e^{i\theta} - z} = \frac{2\mu}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\sqrt{A/(2\mu)}}\int_0^{2\pi} \rho^{k+1}e^{ik\theta}d\rho\,d\theta/z^{k+1} = \frac{A}{z},$$

так как

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}d\theta = \{0 \text{ при целом числе } m \neq 0 \text{ и } 2\pi \text{ при } m = 0\}.$$

Замечание 1. Если даны круги $|z - z_k| < \sqrt{A_k/(2\mu_k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, расположенные вне друг друга и заполненные тяготеющими массами с плотностями μ_k, то градиент внешнего потенциала (5) будет равен сумме градиентов потенциалов, связанных с каждым кругом, именно,

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z - z_k}. \tag{7}$$

Обратная задача с заданной функцией (7) будет иметь единственное решение при $\mu_k = \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, которое представляет собой совокупность точек $\{z_k\}_{k=1}^n$:

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z - z_k} \ \text{ при } \ \mu_k = \infty \ \Rightarrow\ D = \{z_k\}_{k=1}^n.$$

Замечание 2. Если линией L является окружность $|\zeta - z_0| = R$ с нанесенной на ней тяготеющей массой плотностью μ, то

$$u(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2\mu R}{z - z_0}, \ \text{ где } \ v(z) = \int_L 2\mu\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta).$$

Для нескольких окружностей, образующих границу n-связной области, содержащей ∞, комплексный потенциал представляет собой сумму соответствующих функций

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2R_k\mu_k}{z - z_k}.$$

3. Приведем новый класс решений обратной задачи логарифмического потенциала.

Теорема 3. *Пусть дана функция*

$$u(z) = A_0\ln\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = -\frac{\alpha_0}{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - b_k)}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{z - a_k}{z - b_k} \sim \frac{\alpha_0}{z} \quad \textit{при} \ \ z \to \infty$$

и для этой функции существует решение обратной задачи. Тогда $z^*(\zeta)$ *имеет вид* $A_0\ln[P_{n1}(\zeta)/Q_{n1}(\zeta)]$, *где* $P_{n1}(\zeta)$ *и* $Q_{n1}(\zeta)$ *— полиномы степени* n, *причем нулями этих полиномов являются прообразы точек* a_k, b_k, $k = 1, \ldots, n$, *при отображении* $z(\omega) = \overline{z^*(1/\overline{\omega})}$.

Метод доказательства основан на применении интегрального уравнения В.К. Иванова (6).

4. Рассмотрим примеры явных решений задач логарифмического потенциала, допускающих обращение. При известной области D градиент комплексного потенциала имеет вид (5)

$$u(z) = -\frac{2\mu}{\pi}\iint_D \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - z} = \frac{2\mu S_D}{\pi z} + \frac{2\mu}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z^{k+1}},$$

где S_D — площадь области D, $A_k = \iint\limits_D \tau^k d\sigma(\tau)$.

a) Пусть дан сектор $D = \{z : |z| < R,\ 0 < \arg z < \alpha\}$. Тогда

$$S_D = \frac{\alpha R^2}{2},\quad A_k = \frac{iR^{k+2}(1 - e^{ik\alpha})}{k(k+2)}$$

и после суммирования ряда

$$u(z) = \frac{\mu\alpha R^2}{\pi z} + \frac{i\mu}{\pi}\left[R - \frac{R}{e^{i\alpha}} + \left(z - \frac{R^2}{z}\right)\ln\left(1 - \frac{R}{z}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{z}{e^{i2\alpha}} - \frac{R^2}{z}\right)\ln\left(1 - \frac{Re^{i\alpha}}{z}\right)\right] = \frac{\mu\alpha R^2}{\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

В частном случае при $\alpha = 2\pi$ получим функцию из теоремы 2 $u(z) = 2\mu R^2/z$.

b) Для прямоугольника $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < a,\ 0 < \operatorname{Im} z < b\}$

$$S_D = ab,\quad A_k = \frac{i}{(k+1)(k+2)}\left[a^{k+2} + (ib)^{k+2} - (a+ib)^{k+2}\right]$$

и после суммирования ряда

$$u(z) = \frac{2i\mu}{\pi}\left[(z-a)\ln\left(1 - \frac{a}{z}\right) + (z - ib)\ln\left(1 - \frac{ib}{z}\right)(z - ib) - (z - (a+ib))\ln\left(1 - \frac{a+ib}{z}\right)\right] =$$
$$= \frac{2\mu ab}{\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Области D в прямых задачах a), b) являются звездобразными ([5], гл. IV, § 5), поэтому эти примеры допускают переход к обратной постановке с единственным решением в силу теоремы П.С. Новикова [6].

5. Отметим, что в работе над данной статьей вдохновляющим обстоятельством был мемориальный сборник [7], в котором содержатся достижения В.К. Иванова по задачам логарифмического потенциала с геофизическим истолкованием, и в который помещены статьи [3], [4].

Литература

[1] Рапопорт И.М. *О плоской обратной задаче теории потенциала*, ДАН СССР **28** (4), 305–307 (1940).

[2] Рапопорт И.М. *Об одной задаче теории потенциала*, Укр. матем. журнал **2** (2), 48–55 (1950).

[3] Иванов В.К. *Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала*, ДАН СССР **105** (3), 409–412 (1955).

[4] Иванов В.К. *О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде*, ДАН СССР **106** (4), 598–599 (1956).

[5] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).

[6] Новиков П.С. *О единственности решения обратной задачи теории потенциала*, ДАН СССР **18**, 165–168 (1938).

[7] Иванов В.К. *Избранные научные труды* (Физматлит, М., 2008).

Н.Р. Абубакиров

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Nail.Abubakirov@kpfu.ru

Л.А. Аксентьев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Leonid.Aksentev@kpfu.ru

N.R. Abubakirov and L.A. Aksent'ev

Finite solutions to inverse problem of logarithmic potential

Abstract. In this paper we deduce a new solutions set of inverse problems of logarithmic potential in the form of logarithmic function from fraction of identical degree polynomials and give examples of finite solvability of inverse problems.

Keywords: logarithmic potential, integral equation, starlikeness.

N.R. Abubakirov

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Nail.Abubakirov@kpfu.ru

L.A. Aksent'ev

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Leonid.Aksentev@kpfu.ru