Известия вузов. Математика
2016, №10, с. 3–7

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

СУММАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ ВНЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Аннотация. Исследуется линейное четырехэлементное функциональное уравнение в классе решений, голоморфных вне четырехугольника и исчезающих на бесконечности. Строится система целых функций вполне регулярного роста, биортогональная с кусочно экспоненциальным весом системе степеней на трех лучах.

Ключевые слова: равносильная регуляризация, задача Карлемана, проблема моментов для целых функций экспоненциального типа.

УДК: 517.547

Введение. Пусть D — четырехугольник с вершинами $\{t_j\}$, $j=\overline{1,4}$, и сторонами l_j, перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы $\Gamma=\partial D$ (l_1 — отрезок с концами t_1 и t_2). Займемся исследованием уравнения

$$(Vf)(z)\equiv\sum_{m=1}^{4}(-1)^{m+1}f[\sigma_m(z)]=g(z),\quad z\in D, \tag{1}$$

где свободный член $g(z)$ голоморфен в D и его граничное значение $g^+(t)\in H(\Gamma)$ [1]. Преобразование

$$\sigma_m(z)=t_m+t_{m+1}-z,\quad m=\overline{1,4}\ \ (t_5=t_1)$$

переводит $\overline{D}$ в четырехугольник, имеющий с исходным общую сторону. Решение ищем в классе функций $f(z)$, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности. Требуем, чтобы $f^-(t)\in H(l_j)\quad\forall j$, а в вершинах у нее могут быть только логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B (подробности во введении [1]). Отметим только, что нетривиальность уравнения (1) следует из несвязности множества $\mathbb{C}\setminus\bigcup\limits_{m=1}^{4}\sigma_m(D)$.

Работа состоит из трех частей. В п. 1 предложен метод регуляризации уравнения (1). В п. 2 проведено полное исследование уравнения (1) в одном частном случае, когда D — четырехугольник, один из углов которого развернутый. В п. 3 указано приложение к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.).

1. Будем искать решение задачи (1) в классе B в виде интеграла типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma(\tau-z)^{-1}\phi(\tau)d\tau,\quad z\notin\overline{D}, \tag{2}$$

с неизвестной плотностью $\phi(\tau)\in H(\overline{l_j})$. Ясно, что $\forall j\quad\sigma_j(t):\overline{l_j}\to\overline{l_j}$ с изменением ориентации, т. е. кусочно-линейная функция $\alpha(t)=\{\sigma_j(t),\,t\in l_j\}$ является на Γ обратным сдвигом Карлемана, разрывным в вершинах. Середины сторон — это неподвижные точки сдвига.

Поступила 01.02.2015

Введем кусочно-постоянную функцию $\theta_t = \{1,\ t \in l_1 \cup l_3;\ -1,\ t \in l_2 \cup l_4\}$ и инволютивный оператор $W : \phi(t) \to \theta_t \phi[\alpha(t)]$. Заметим, что плотность интеграла типа Коши (2) определена с точностью до аналитически продолжимого в D слагаемого $a^+(\tau)$. За счет подбора этой функции считаем, что

$$W\phi = \phi. \tag{3}$$

Действительно, соотношение (3) интерпретируем как задачу Карлемана $a^+ - Wa^+ = W\phi - \phi$. Она безусловно разрешима, что устанавливается сведéнием ее к задаче Римана методом локально конформного склеивания [2]. Тогда

$$(1) \Rightarrow (A\phi)(z) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma N(\tau + z)\phi(\tau)d\tau = g(z), \quad z \in D,$$

где $N(\lambda) = \sum_{m=1}^4 (-1)^{m+1}(\lambda + a_m)^{-1}$, $a_m = -(t_m + t_{m+1})$. Справедлив аналог формулы Сохоцкого–Племеля

$$(A^+\phi)(t) = -(W\phi)(t) + (A\phi)(t), t \in \Gamma, \tag{4}$$

причем особый интегральный оператор $(A\phi)(t)$ получается формальной заменой $z \in D$ на $t \in \Gamma$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Возьмем от обеих частей равенства (4) оператор W и заменим в особом интеграле переменную τ на $\alpha(\tau)$ с учетом (3), изменения ориентации и условия $\alpha'(\tau) = -1, \tau \neq t_k$, а затем сложим полученное соотношение с исходным. Пришли к уравнению

$$T\phi = g^+ + Wg^+, \tag{5}$$

где $T = -2I + A + WAW$, а I — тождественный оператор. Введем банахово пространство $\widetilde{C}(\Gamma)$ — множество функций $\phi(t) \in C(\bar{l}_j)$, $j = \overline{1, 4}$, с нормой

$$M = \max|\phi(t)|, \quad t \in \Gamma.$$

Лемма. *Операторы W и A с точностью до компактного слагаемого антикоммутируют в $\widetilde{C}(\Gamma)$, т. е. (5) — интегральное уравнение Фредгольма второго рода.*

Доказательство аналогично приведенному в [1] для случая равнобедренной трапеции.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет не более чем конечное число условий разрешимости, совпадающих с условиями разрешимости интегрального уравнения* (5).

Доказательство. Если уравнение (5) разрешимо, то (5) $\Rightarrow$ (1), поскольку однородная задача Карлемана $a^+ = -Wa^+$ в силу указанного принципа локально-конформного склеивания имеет лишь тривиальное решение. Заметим, что в случае разрешимости (5) обязательно имеет решение со свойством (3) ([3]).

2. Пусть D — четырехугольник с вершинами $t_1 = 2^{-1} - i$, $t_2 = 2^{-1}$, $t_3 = 2^{-1} + i$, $t_4 = -2^{-1}$. Оценим модуль интегрального слагаемого в однородном уравнении

$$T\phi = 0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Уравнение* (6) *имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство. Рассмотрим ядро уравнения (5)

$$K(t, \tau) = N(t + \tau) + \theta_t\theta_\tau N[\alpha(t) + \alpha(\tau)].$$

Введем для краткости обозначения $u = \tau + t$ и $b_j(t) = \left|\int\limits_{l_j} \phi(\tau)K(t, \tau)d\tau\right|$.

В силу симметрии контура и коэффициентов уравнения (1) достаточно рассмотреть всего два случая.

1) Равенство (6) достигается при $t \in l_1 \Rightarrow \alpha(t) = 1 - i - t$ и $\theta_t = 1$. Возможны четыре подслучая.

a) $\tau \in l_1 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 - i - \tau$, $\theta_\tau = 1$ и $K(t,\tau) = (u-i)^{-1} - (u-i-1)^{-1} - (u+i)^{-1} + (u-1+3i)^{-1} - (u-2+3i)^{-1} + (u-2+i)^{-1} \Rightarrow b_1(t) < 1.62M$,

b) $\tau \in l_2 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 + i - \tau, \theta_\tau = -1$ и $K(t,\tau) = (u-i)^{-1} - (u+i)^{-1} + (u-2+i)^{-1} - (u-2-i)^{-1} \Rightarrow b_2(t) < 1.6M$,

c) $\tau \in l_3 \Rightarrow \alpha(\tau) = i - \tau, \theta_t = 1$ и $b_3(t) = 0$,

d) $\tau \in l_4 \Rightarrow \alpha(\tau) = -i - \tau, \theta_\tau = -1$, т. е. $K(t,\tau) = (u-i)^{-1} - (u-1-i)^{-1} - (u+3i)^{-1} + (u-1+3i)^{-1} \Rightarrow b_4(t) < 2.15M$.

Итак,

$$\sum_{j=1}^{4} b_j(t) < 2\pi M \Rightarrow M = 0, \tag{7}$$

т. е. в данном случае $\phi(\tau) \equiv 0$.

2) Осталось рассмотреть случай, когда равенство (6) достигается при $t \in l_3 => \alpha(t) = i - t$ и $\theta_t = 1$. Возможны 4 подслучая.

a) $\tau \in l_1 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 - i - \tau, \theta_\tau = 1$ и $b_1(t) = 0$,

b) $\tau \in l_2 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 + i - \tau, \theta_\tau = -1$ и $K(t,\tau) = (u+i-1)^{-1} - (u+i)^{-1} + (u-3i)^{-1} - (u-1-3i)^{-1} \Rightarrow b_2(t) < 0.85M$,

c) $\tau \in l_3 \Rightarrow \alpha(\tau) = i - \tau, \theta_\tau = 1$ и $K(t,\tau) = (u+i-1)^{-1} - (u-i-1)^{-1} - (u+i)^{-1} - (u-3i+1)^{-1} + (u-i+1)^{-1} + (u-3i)^{-1} \Rightarrow b_3(t) < 2.42M$,

d) $\tau \in l_4 \Rightarrow \alpha(\tau) = -i - \tau, \theta_\tau = -1$ и $K(t,\tau) = (u+i-1)^{-1} - (u-i-1)^{-1} + (u-i+1)^{-1} - (u+i+1)^{-1} \Rightarrow b_4(t) < 2.27M$.

Оценка (7) выполнена и в этом случае, т. е. теорема 2 доказана.

3. Для четырехугольника D, рассмотренного в п. 2, суммарное уравнение (1) в классе B безусловно разрешимо. Укажем на приложение этого уравнения к проблеме моментов для ц. ф. э. т. на нескольких лучах. Запишем уравнение (1) с помощью преобразования Бореля ([4], § 1, п. 1) в виде

$$\sum_{m=1}^{4} (-1)^{m+1} \int_{L_m} F_m(t) \exp(-t\sigma_m(z))dt = g(z), \quad |z| < 0.5, \tag{8}$$

где L_1 и L_2 — луч $\arg t = 0$, L_3 — луч $\arg t = \frac{5\pi}{4}$, L_4 — луч $\arg t = \frac{3\pi}{4}$. Приравнивая коэффициенты Маклорена в левой и правой частях (8), имеем

$$E[F(t), t^k] \equiv \sum_{m=1}^{4} (-1)^{m+1} \int_{L_m} F(t) t^k \exp(a_m t)dt = g^{(k)}(0).$$

Последнюю задачу можно рассматривать как обобщение известных проблем Стильтьеса и Гамбургера на случай трех лучей.

Замечание 1. Здесь сопряженной индикаторной диаграммой ц. ф. э. т. $F(z)$ является именно D. Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой является некоторое выпуклое множество $D_1 \subset D$, не представляет особого интереса (задача (1) переопределена, поскольку условие (1) выполняется не только при $z \in D$, но и в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки). Тем не менее приведем те дополнительные ограничения на свободный член, при выполнении которых это имеет место. Во-первых, функция $g(z)$ должна быть аналитической на множестве $\mathbb{C} \setminus \cup\sigma_m(D_1)$, $m = \overline{1,4}$, и исчезать на ∞. Во-вторых, функция

$F(z) = G_1(z)/\sum\limits_{m=1}^{4}(-1)^{m+1}\exp(-a_m z)$ должна быть целой. Здесь $G_1(z)$ — ц. ф. э. т., ассоциированная по Борелю с нижней функцией $g(-z)$. Наконец, нижняя функция $f(z)$ должна быть функцией класса B, удовлетворяющей (1).

Теорема 3. *Степенна́я проблема моментов $E[F(t), t^k] = \beta_k$, $k = \overline{0,\infty}$, в классе ц. ф. э. т. $F(z)$, ассоциированных по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$, безусловно разрешима и имеет единственное решение при условии, что сумма ряда*

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_j}{j!} z^j \tag{9}$$

голоморфна в D и $g^+(t) \in H(\Gamma)$.

Замечание 2. Условия теоремы заведомо выполнены, если степенной ряд (9) имеет радиус сходимости $R > \sqrt{5}/2$, что легко проверяется.

Рассмотрим систему нижних функций $f_m(z) : (Vf_m)(z) = z^m/m!$, $m = \overline{0,\infty}$. Соответствующая система верхних функций $F_m(z)$ удовлетворяет условиям

$$E[F_m(t), t^k] = \delta_{m,k},$$

т. е. биортогональна с некоторым кусочно экспоненциальным весом системе степеней на трех лучах. Из свойств преобразования Бореля и замечания 1 следует, что ц. ф. э. т. $F_m(z)$ имеет индикатор $h(\theta) = \left\{2^{-1}\cos\theta + \sin\theta, \theta \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right]; -2^{-1}\cos\theta, \theta \in \left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]\right\}$, и $h(\theta) = h(-\theta)$. Покажем, что функции

$$F_m(z) = -\int_\Gamma f_m^-(\tau)\exp(z\tau)d\tau, \quad m = \overline{0,\infty},$$

суть целые функции вполне регулярного роста(в. р. р.) ([5], гл. III). Функции $f_m^-(z)$, аналитические вне Γ, аналитически продолжимы через стороны l_3 и l_4 в каждой из двух треугольников с вершинами t_4, t_2, t_1 и t_4, t_2, t_3. Тогда

$$F_m(z) = \sum_{j=1}^{2}\int_{S_j} \mu_j(\tau)\exp(z\tau)d\tau, \tag{10}$$

где $S_1 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $S_2 = l_1 \cup l_2$ и плотности $\mu_j(\tau) \in H(S_j)$, а в вершинах t_k у них возможны самое большее логарифмические особенности. Правая часть (10) является суммой двух целых функций в. р. р. ([6], с. 106). У первой из них индикатор $h_1(\theta) = 2^{-1}|\cos\theta|$, у второй $h_2(\theta) = 2^{-1}\cos\theta + |\sin\theta|$. В. р. р. суммы (10) очевиден для всех лучей, на которых эти индикаторы не равны. Что же касается конечного числа лучей, на которых индикаторы совпадают, то множество лучей в. р. р. целой функции замкнуто ([5], с. 186), откуда все и следует.

Вернемся к уравнению (1) в случае произвольного четырехугольника D. Если он выпуклый и каждый из его углов меньше развернутого, то получим, вообще говоря, проблему моментов для ц. ф. э. т. на четырех лучах (например, [1]). В противном случае возникает проблема моментов на трех лучах, как в п. 3 данной работы. В случае, когда D — параллелограмм, придем к проблеме моментов для ц. ф. э. т. на двух лучах (например, [7]).

Литература

[1] Гарифьянов Ф.Н., Модина С.А *О четырехэлементном уравнении для функций, аналитических вне трапеции, и его приложениях*, Сиб. матем. журн. **52** (2), 243–249 (2011).
[2] Зверович Э.И. *Метод локально-конформного склеивания*, ДАН СССР **205** (4), 767–770 (1972).
[3] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана*, Изв. вузов. Матем., №4, 43–51 (1983).
[4] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение* (Наука, М., 1967).
[5] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций* (ГИТТЛ, М., 1956).
[6] Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент* (Наука, М., 1976).
[7] Гарифьянов Ф.Н. *О проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа*, Изв. вузов. Матем., №6, 37–43 (2003).

Ф.Н. Гарифьянов

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

F.N. Garif'yanov

Summary equation for functions analytical outside a quadrangle

Abstract. We investigate a four-element functional equation in a class of functions holomorphic outside a quadrangle and vanishing at infinity. We construct a system of entire functions of complete regular growth, which is biorthogonal to a power system on three rays with piecewise-exponential weight.

Keywords: equivalent regularization, Carleman problem, moment problem for entire functions of exponential type.

F.N. Garif'yanov

Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru