УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2022, Т. 164, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 60–67 ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.18 doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.60-67

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СУММАРНОГО УРАВНЕНИЯ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПОРОЖДЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Ф.Н. Гарифьянов[1], *Е.В. Стрежнева*[2]

[1]*Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, 420066, Россия*

[2]*Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

Аннотация

Пусть D – треугольник с границей $\Gamma = \partial D$. Рассмотрено шестиэлементное линейное суммарное уравнение в классе функций, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности. Коэффициенты уравнения и свободный член голоморфны в D. Решение найдено в виде интеграла типа Коши по Γ с неизвестной плотностью. Его граничное значение удовлетворяет условию Гельдера на любом компакте из Γ, не содержащем вершины. В вершинах допускаются самое большее логарифмические особенности. Для регуляризации уравнения на Γ вводится кусочно-линейный сдвиг Карлемана. Он переводит каждую сторону в себя с изменением ориентации. При этом в вершинах у него находятся точки разрыва первого рода, а середины сторон являются неподвижными точками. Проведена регуляризация уравнения и показано, что она равносильная. Для этого использованы теория краевой задачи Карлемана и принцип локально-конформного склеивания. Указаны приложения к интерполяционным задачам для целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: суммарное уравнение, равносильная регуляризация, краевая задача Карлемана

Введение

Пусть D – треугольник с вершинами $t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_3\ (\operatorname{Im} t_3 \neq 0)$ и сторонами ℓ_j, пронумерованными в порядке положительного обхода его границы Γ $(t \in \ell_1 \Rightarrow \operatorname{Im} t = 0)$. Введем функции $\sigma_j(z) = t_j + t_{j+1} - z,\ j = 1,2,3\ (t_4 = t_1)$. Они переводят D в треугольники, имеющие с ним общую сторону. Кусочно-линейная функция $\alpha(t) = \{\sigma_j(t),\ t \in \ell_j\}$ переводит каждую сторону ℓ_j в себя с изменением ориентации, причем середины сторон τ_j являются неподвижными точками сдвига. Это инволютивный сдвиг Карлемана, разрывный в вершинах. Еще три преобразования $\sigma_4(z) = -z,\ \sigma_5(z) = 2 - z,\ \sigma_6(z) = 2t_3 - z$ переводят D в треугольники, имеющие с ним общую вершину.

Рассмотрим суммарное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{6} G_m(z) f[\sigma_m(z)] = g(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

при следующих предположениях.

1. Свободный член $g(z)$ и коэффициенты $G_m(z)$ голоморфны в D, а их граничные значения удовлетворяют условию Гельдера на Γ, $m = 1, 2, \ldots, 6$.

2. Решение $f(z)$ голоморфно вне D и исчезает на бесконечности. Его граничное значение $f^-(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом компакте из Γ, не содержащем вершин. В вершинах допускаются самое большее логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B.

Ранее в работах [1–2] были рассмотрены два частных случая уравнения (1). Предполагалось, что треугольник является правильным, а все коэффициенты – некоторыми постоянными, отличными от нуля. Нетривиальность задачи даже в этих простейших случаях обусловлена тем, что множество $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{3} \sigma_j(D)$ несвязно. Относительно регуляризации суммарного уравнения с переменными коэффициентами в случае произвольного четырехугольника см. [3], а также работу [4], где в библиографии приведен список работ авторов в случае различных многоугольников.

В общем случае наложим на коэффициенты дополнительные ограничения.

3. При $t \in \overline{\ell_j}$ имеем $G_j[\alpha(t)] = G_j(t)$ и $G_j(t) \neq 0$, $j = 1, 2, 3$. Кроме того, $G_j(t_m) = \lambda \neq 0$, для любых j, m $j = 1, 2, 3$, $m = 1, 2, \ldots, 6$.

В качестве такого набора коэффициентов можно взять, например, $G_1(t) = 1 + \sin(\pi t)$; $G_m(t) = 1$, $m > 1$.

В разд. 1 предложен метод равносильной регулиризации уравнения (1). В разд. 2 указаны приложения к интерполяционным задачам для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.)

1. Регуляризация уравнения

Будем искать решение уравнения (1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) \, (\tau - z)^{-1} \, d\tau, \quad z \notin \overline{D} \tag{2}$$

с неизвестной гельдеровской плотностью $\varphi(\tau) \in H_\mu\left(\overline{\ell_j}\right)$, $j = 1, 2, 3$, $\mu \in (0, 1]$. Введем инволютивный оператор сдвига $W : \varphi(t) \to \varphi\left[\alpha(t)\right]$. Плотность интеграла (2) определена с точностью до аналитически продолжимого в D слагаемого $a^+(\tau)$. За счет подбора этой функции считаем

$$W\varphi = \varphi. \tag{3}$$

Действительно, соотношение (3) интерпретируем как задачу Карлемана

$$a^+ - Wa^+ = W\varphi - \varphi.$$

Это задача не является переопределенной и безусловно разрешима [5]. Теперь запишем (1) как функциональное уравнение

$$\left(E\varphi\right)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\tau) A(z, \tau) d\tau = g(z), \quad z \in D, \tag{4}$$

где

$$A(z, \tau) = \sum_{m=1}^{6} G_m(z) \left[\tau - \sigma_m(z)\right]^{-1}. \tag{5}$$

Справедлив аналог формулы Сохоцкого – Племеля

$$\left(E^{+}\varphi\right)(t) \equiv -2^{-1}\gamma_t\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\phi(\tau)A(t,\tau)\,d\tau = g^{+}(t). \qquad (6)$$

Здесь $\gamma_t = \{G_j(t),\, t \in \ell_j;\, j = 1,2,3\}$, а особый интегральный оператор $(E\varphi)(t)$ получен из соотношения (4) формальной заменой $z \in D$ на $t \in \Gamma$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Заменим в соотношении (6) переменные τ и t на $\alpha(\tau)$ и $\alpha(t)$ соответственно и сложим полученное соотношение с исходным. В результате имеем

$$(T\varphi)(t) \equiv -\varphi(t) + \frac{\gamma_t^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi(\tau)K(t,\tau)\,d\tau = \gamma_t^{-1}\left[g^{+}(t) + g^{+}[\alpha(t)]\right], \qquad (7)$$

где

$$K(t,\tau) = A(t,\tau) + A\left[\alpha(t),\alpha(\tau)\right]. \qquad (8)$$

Лемма 1. *Интегральный оператор*

$$(B\varphi)(t) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \qquad (9)$$

вполне непрерывен в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Выясним характер особенностей ядра (8). Считаем, не ограничивая общности, что из $t \in \ell_1$ следует $\alpha(t) = 1 - t$. Договоримся впредь выписывать только те слагаемые из ядра, которые могут обратиться в бесконечность при данном расположении точек t и τ на сторонах треугольника. Возможны следующие варианты.

а) $\tau \in \ell_1 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 - \tau$. Тогда $K(t,\tau) = A_1(t,\tau) + A_2(t,\tau) + \cdots$, где

$$A_1(t,\tau) = \left[G_4^{+}(t) - G^{+}{}_5(1-t)\right](\tau + t)^{-1},$$

$$A_2(t,\tau) = \left[G_5^{+}(t) - G^{+}{}_4(1-t)\right](\tau + t - 2)^{-1}.$$

Поскольку

$$\left|G_4^{+}(t) - G_5^{+}(1-t)\right| = \left|\left(G_4^{+}(t) - G_4^{+}(0)\right) + \left(G^{+}{}_5(1) - G_5^{+}(1-t)\right)\right| \le \gamma t^{\mu},$$

где $\gamma > 0$ и μ – наименьший из показателей Гельдера функций $G_4^{+}(t)$ и $G_5^{+}(t)$, то $|A_1(t,\tau)| \le \gamma\,|\tau + t|^{\mu - 1}$. Последнее следует из очевидного неравенства $\tau + t > t$. Оценим $|A_2(t,\tau)|$. Имеем

$$\left|\left(G_5^{+}(t) - G_5^{+}(1)\right) + \left(G^{+}{}_4(0) - G_4(1-t)\right)\right| \le \gamma(1-t)^{\mu}.$$

Остается заметить, что $2 - \tau - t > 1 - t$, то есть $|A_2(t,\tau)| \le \gamma\,|\tau + t - 2|^{\mu - 1}$.

б) $\tau \in \ell_2 \Rightarrow \alpha(\tau) = 1 + t_3 - \tau$. Тогда $K(t,\tau) = \sum\limits_{j=3}^{6} A_j(t,\tau) + \cdots$, где

$$A_3(t,\tau) = [G^{+}{}_1(t) - G_2^{+}(1-t)](\tau + t - 1)^{-1},$$

$$A_4(t,\tau) = \left[G_2^{+}(t) - G_1^{+}(t)\right](\tau + t - 1 - t_3)^{-1};$$

$$A_5(t,\tau) = \left[G_3^{+}(t) - G_5^{+}(t)(1-t)\right](\tau + t - t_3)^{-1};$$

$$A_6(t,\tau) = \left[G_5^+(t) - G_3^+(t)(1-t)\right](\tau + t - 2)^{-1}.$$

Оценим модуль первого слагаемого в ядре. Имеем

$$\left|G_1^+(t) - G_2^+(1-t)\right| = \left|\left(G_1^+(t) - G_1^+(0)\right) + \left(G_2^+(1) - G_2^+(1-t)\right)\right| \le \gamma_1 t^\mu,$$

где $\gamma_1 > 0$ и μ – наименьший из показателей Гельдера для коэффициентов $G_1^+(t)$ и $G_2^+(t)$. Рассмотрим теперь треугольник с вершинами $-t, 0, \tau - 1$. По теореме синусов $|\tau - 1 + t| = t\sin\theta\,(\sin\beta)^{-1}$, где θ – угол при вершине 0, а β – угол при вершине $\tau-1$. Отсюда получим оценку $|A_3(t,\tau)| \le \gamma\,|\tau + t - 1|^{\mu-1}$. Аналогично подобные оценки можно получить для модулей остальных трех слагаемых, входящих в ядро (8), которые могут обращаться в бесконечность при данном расположении точек τ и t на сторонах треугольника.

в) $\tau \in \ell_3$. Доказательство идентично изложенному в п. б).

Из этих оценок следует, что оператор (9) вполне непрерывен в $L_2(\Gamma)$ [6, с. 128]. □

Следствие 1. *Если все коэффициенты удовлетворяют условию Липшица* $G^+{}_m(t) \in H_1(\Gamma)$, $m = 1,2,3$, *то ядро* (8) *ограничено. В общем случае у оператора* (9) *слабые полярные особенности в вершинах.*

Теорема 1. T *является каноническим оператором Фредгольма в* $L_2(\Gamma)$.

Простейшие свойства интегрального уравнения Фредгольма второго рода (7), ядро которого имеет структуру типа (8), достаточно хорошо известны (см., например, [7]). Перечислим некоторые из них.

A. Если уравнение (7) разрешимо, то существует его решение, удовлетворяющее условию (3).

B. Пусть фундаментальная система решений (ФСР) однородного уравнения

$$T\varphi = 0 \tag{10}$$

содержит n функций. Тогда m из них $(m \le n)$ можно считать удовлетворяющими условию (3), а остальные $n - m$ – условию

$$W\varphi = -\varphi. \tag{11}$$

Аналогичный результат справедлив и для ФСР союзного уравнения

$$T'\psi = 0. \tag{12}$$

C. Из (11) имеем $\displaystyle\int\limits_\Gamma \varphi(t)\,dt = 0$, поскольку сдвиг $\alpha(t)$ изменяет ориентацию контура и $\alpha'(t) \equiv -1$, $t \ne t_j$, $j = 1,2,3$).

Таким образом, уравнение (1) сведено к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (7), то есть проведена регуляризация. Покажем, что проведенная регуляризация является равносильной. Пусть интегральное уравнение (7) разрешимо и $\varphi(t)$ – его решение со свойством (3). Тогда из (7) следует $E^+\varphi + E^+\varphi = g^+ + Wg^+$, откуда $(E\varphi)(z) = g(z)$, $z \in D$, поскольку краевая задача Карлемана $a^+ = -Wa^+$ имеет лишь тривиальное решение в силу принципа локально-конформного склеивания [5].

Теорема 2. *Уравнение* (1) *имеет не более чем конечное число условий разрешимости. Все они являются условиями разрешимости интегрального уравнения* (7).

Доказательство. ФСР однородного уравнения (10) содержит постоянную, что проверяется непосредственно, поскольку все преобразования $\sigma_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, переводят точку z из $\operatorname{int} D$ в $\operatorname{ext} D$.

ФСР союзного уравнения (12) содержит γ_t^{-1} – решение со свойством (3). Действительно, для таких функций из (12) следует $\psi(t)+\Phi(t)+\Phi\left[\alpha(t)\right]=0$, где особый интеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} A(\tau,t)\gamma_\tau^{-1}\psi(\tau)\,d\tau$$

понимается в смысле главного значения по Коши. При $\psi(t) = \gamma_t$ этот интеграл вычисляется с помощью вычетов: $\Phi(t) = -2^{-1}\gamma_t$, то есть функция γ_t принадлежит ФСР уравнения (12). □

Замечание 1. Все решения союзного уравнения со свойством (11) автоматически ортогональны правой части интегрального уравнения (7) в силу **(C)**. Другими словами, их наличие или отсутствие не влияет на картину разрешимости этого уравнения. Если ФСР союзного уравнения содержит единственную функцию со свойством (3), то уравнение (1) разрешимо. Действительно,

$$\int\limits_{\Gamma} \gamma_\tau\gamma_\tau^{-1}\left[g^{+}(\tau)+g^{+}\left(\alpha(\tau)\right)\right]\,d\tau = 2\int\limits_{\Gamma} g^{+}(\tau)\,d\tau = 0.$$

Теорема 3. *Пусть ФСР уравнения* (12) *содержит ровно* m *функций со свойством* (3)*:* γ_t, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\ldots$, $\psi_{m-1}(t)$. *Тогда суммарное уравнение* (1) *имеет* $m-1$ *условие разрешимости.*

Доказательство. Предположим, что для любого $g(z) \in A[D]$ и некоторых функций $\psi_j(t)$, $1 \le j \le m$, выполняется условие

$$\int\limits_{\Gamma} \psi_j(t)\left[g^{+}(t)-g^{+}\left(\alpha(t)\right)\right]\psi_t^{-1}\,dt = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \int\limits_{\Gamma} \psi_j(\tau)g^{+}(\tau)\gamma_\tau^{-1}\,d\tau = 0.$$

Положим $g(z) = z^m$, то есть

$$\int\limits_{\Gamma} t^m\psi_j(t)\gamma_t^{-1}\,dt = 0, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

По теореме Рунге функция $\psi_j(t)\gamma_t^{-1}$ голоморфна в D, а с учетом условия (3) имеем $\psi_j(t)\gamma_t^{-1} = C$. Поэтому $\psi_j(t) = C\gamma_t$, и пришли к противоречию, так как обе функции $\psi_j(t)$ и γ_t из ФСР союзного уравнения, что и завершает доказательство. □

2. Приложения к теории моментов

Возьмем для определенности $t_3 = 1+i$. Пусть ц.ф.э.т. $F(z)$ – верхняя функция, ассоциированная по Борелю [8, § 1, п. 1] с нижней функцией $f(z) \in B$. Треугольник D является сопряженной индикаторной диаграммой. Введем три луча θ_1 : $\arg\tau = 0$, θ_2: $\arg\tau = 5\pi/4$, θ_3: $\arg\tau = \pi/2$ и степенной ряд

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k\left(z-z_0\right)^k}{k!}; \quad z_0 \in D, \tag{13}$$

причем его радиус сходимости $R > \max|z_0 - t_j|$, $j = 1, 2, 3$. Запишем уравнение (1) в терминах ц.ф.э.т., то есть

$$H(z) \equiv \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\theta_j} F(\tau) H_j(z,\tau)\, d\tau = g(z), \quad z \in D. \tag{14}$$

Здесь

$$H_1(z,\tau) = G_2(z) \exp\left[-\tau\sigma_2(\tau)\right] + G_6(z) \exp\left[-\tau\sigma_6(\tau)\right].$$

$$H_2(z,\tau) = G_3(z) \exp\left[-\tau\sigma_3(z)\right] + G_4(z) \exp\left[-\tau\sigma_4(z)\right],$$

$$H_3(z,\tau) = G_1(z) \exp\left[-\tau\sigma_1(\tau)\right] + G_5(z) \exp\left[-\tau\sigma_5(z)\right].$$

Приравняем коэффициенты Тейлора в точке z_0 левой и правой частей соотношения (14) в предположении, что уравнение (1) разрешимо. Тогда

$$\left.\frac{d^k H(z)}{dz^k}\right|_{z=z_0} = c_k. \tag{15}$$

Теорема 4. *Интерполяционная задача* (15) *имеет не более чем конечное число условий разрешимости.*

Заметим, что подобные задачи можно ставить и в случае произвольного треугольника.

Замечание 2. Сопряженной индикаторной диаграммой может быть и «меньшее» выпуклое множество $D' \subset D$. Для этого необходимо, но недостаточно, чтобы свободный член $g(z)$ был аналитически продолжим из D в некоторую окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g(\infty) = 0$. Такой случай возможен, но не представляет большого интереса. В частности, для уравнения (1) с постоянными коэффициентами это означает, что соотношение (1) выполняется не только при $z \in D$, но и в окрестности бесконечно удаленной точки, то есть оно переопределено. Тогда его решение и условие разрешимости с помощью преобразования Бореля можно найти в явном виде, то есть оно тривиально. Более подробно об этом можно посмотреть, например, в [2], где приведены необходимые выкладки.

Замечание 3. Предложенный метод регуляризации применим и к более общим уравнениям. Возьмем, например, функцию $b(z) \in A[D]$, причем $b\left(\overline{D}\right) \bigcap \overline{D} = \varnothing$. Тогда он применим к уравнению $(V, f)(z) = g(z)$, $z \in D$, где $(V, f)(z) = (Vf)(z) + f[b(z)]$.

Литература

1. *Гарифьянов Ф.Н.* Суммарное уравнение для функций, голоморфных вне треугольника // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 9. – С. 19–26.

2. *Garifyanov F.N., Strezhneva E.V.* About functional equation, generated by equilateral triangle // Lobachevskii J. Math. – 2018. – T. 39, No 2. – P. 204–208. – doi: 10.1134/S1995080218020129.

3. *Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В.* О регуляризации одного класса суммарных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 2021. – № 9. – С. 25–30.

4. *Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В.* Суммарно-разностное уравнение для аналитических функций, порожденное треугольником и его приложения // Уфим. матем. журн. – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 17–22.

5. *Зверович Э.И.* Метод локально-конформного склеивания // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 205, № 4. – С. 767–770.

6. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.

7. *Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н.* К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана // Изв. вузов. Матем. – 1983. – № 4. – С. 43–51.

8. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. – М.: Наука, 1967. – 240 с.

Поступила в редакцию
12.01.2021

Гарифьянов Фархат Нургаязович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *f.garifyanov@mail.ru*

Стрежнева Елена Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры специальных технологий в образовании

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *strezh@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2022, vol. 164, no. 1, pp. 60–67

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.60-67

On Regularization of a Summary Equation with Holomorphic Coefficients

F.N. Garifyanov[a*], *E.V. Strezhneva*[b**]

[a]*Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia*
[b]*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, 420111 Russia*

E-mail: [*]*f.garifyanov@mail.ru*, [**]*strezh@yandex.ru*

Received January 12, 2021

Abstract

Let D be a triangle with boundary $\Gamma = \partial D$. A six-element linear summary equation in the class of functions that are holomorphic outside D and vanish at infinity is considered. The coefficients of the equation and the free term are holomorphic in D. The solution is sought in the form of a Cauchy-type integral over Γ with unknown density. Its boundary value satisfies the Hölder condition on any compact set in Γ with no vertices. At the vertices, logarithmic singularities, at most, are allowed. To regularize the equation on Γ, a piecewise linear Carleman shift is introduced. It maps each side into itself with a change in the orientation. Moreover, at the vertices, it has discontinuity points of the first kind, and the midpoints of the sides are fixed points. The regularization of the equation is carried out, and its equivalence is shown. For this purpose, the theory of the Carleman boundary value problem and the principle of locally conformal gluing are used. Applications to interpolation problems for entire functions of the exponential type are indicated.

Keywords: summary equation, equivalent regularization, Carleman boundary value problem

References

1. Garif'yanov F.N. The summarized equation for functions which are holomorphic in the exterior of a triangle. *Russ. Math.*, 2008, vol. 52, no. 9, pp. 16–22. doi: 10.3103/S1066369X0809003X.
2. Garifyanov F.N., Strezhneva E.V. About functional equation, generated by equilateral triangle. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 2, pp. 204–208. doi: 10.1134/S1995080218020129.
3. Garif'yanov F.N., Sterzhneva E.V. Regularization of a class of summary equations. *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, no. 9, pp. 21–25. doi: 10.3103/S1066369X21090036.
4. Garif'yanov F.N., Sterzhneva E.V. Sum-difference equation for analytic functions generated by triangle and its applications. *Ufa Math. J.*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 17–22. doi: 10.13108/2021-13-4-17.
5. Zverovich E.I. A method of locally conformal gluing. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, vol. 205, no. 4, pp. 767–770. (In Russian)
6. Mikhlin S.G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam* [Lectures on Linear Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 232 p. (In Russian)
7. Aksent'eva E.P., Garif'yanov F.N. On the investigation of an integral equation with a Carleman kernel. *Russ. Math.*, 1983, vol. 27, no. 4, pp. 53–63.
8. Bieberbach L. *Analiticheskoe prodolzhenie* [Analytic Continuation]. Moscow, Nauka, 1967. 240 p. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Гарифьянов Ф.Н., Стрежнева Е.В.* О регуляризации суммарного уравнения с голоморфными коэффициентами, порожденного треугольником // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 1. – С. 60–67. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.60-67.

***For citation*:** Garifyanov F.N., Strezhneva E.V. On regularization of a summary equation with holomorphic coefficients. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 1, pp. 60–67. doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.60-67. (In Russian)