МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования**
**«Казанский (Приволжский) федеральный университет»**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

**Кафедра теории и технологий преподавания математики и информатики**

Направление: 050 201.65 математика и английский язык

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

# Методика изучения элементов математического анализа в школьном курсе математики

**Работа завершена:**

"___"_________ 201_ г. ______________________ (В.В. Трусенёв)

**Работа допущена к защите:**

Научный руководитель

Кандидат к.п.н., доцент

"___"_________ 201_ г. ______________________ (М.В. Фалилеева)

Заведующий кафедрой,

д.п.н., профессор

"___"_________ 201_ г. ______________________ (Л.Р. Шакирова)

Казань – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Введение элементов математического анализа в школьный курс математики до сих пор вызывает споры между методистами. Одни считают, что математический анализ достаточно изучать только в вузе, другие считают введение элементов анализа необходимым. Так, например, Мордкович А.Г. считает, что функциональная линия должна быть ведущей при обучении математике в школе. Вне зависимости от этих разногласий учитель стоит перед необходимостью учить детей элементам анализа. Пропедевтика математического анализа начинается в средней школе, а ключевые понятия математического анализа «производная», «первообразная» вводятся в курсе средней школы. В профильных классах элементы математического анализа рассматриваются намного глубже, здесь уровень знаний учащихся ближе к уровню 1 курса математических и технических специальностей вузов.

В нашей работе мы обращаемся к подготовке старшеклассников непрофильных классов, так называемого «базового» уровня. Все вышеизложенные противоречия между специалистами, в частности, связаны со сложностями учащихся в усвоении школьниками понятий математического анализа. Для того чтобы овладеть производной, первообразной и интегралом учащимся необходимо иметь хорошие представления о бесконечно малых и больших величинах, пределе, приращении функции, дифференцировании и др.

Наше исследование связано с изучением сложившихся тенденций в обучении элементам математического анализа в старшей школе и выработке методических материалов, способствующих помочь учащимся, учителю в сдаче Единого государственного экзамена.

Целью нашего исследования является создание системы задач, обеспечивающей различные направления подготовки учащихся 10-11 классов по математическому анализу для сдачи ЕГЭ.

Для реализации цели необходимо решить следующие задачи исследования:

- изучить учебную, учебно-методическую, педагогическую литературу, статьи учителей по обучению элементам математического анализа в старшей школе;
- определить систему методических методов и приемов, способствующих формированию понятий математического анализа;
- составить систему задач, обеспечивающую различные направления подготовки учащихся для подготовки ЕГЭ.

Предмет исследования — методические особенности задач математического анализа по подготовке к ЕГЭ.

Объект исследования — методика обучения элементам математического анализа в курсе средней общеобразовательной школы.

Структура данной работы состоит из введения, двух глав с параграфами, заключения, списка литературы, который включает в себя 21 источник.

# ГЛАВА 1. Методика изучения элементов математического анализа в курсе математики общеобразовательной школы

## 1.1. Анализ основных понятий начал анализа в базовом курсе математики

При изучении элементов анализа в школе основное внимание уделяется двум понятиям — производной и первообразной. Это связано с широким использованием этих понятий как в школьной математике, так и в физике. В математике производная активно используется при исследовании функции, первообразная при вычислении площадей криволинейных фигур.

Сначала перечислим все новые понятия анализа вводимые к курсе математики старшей общеобразовательной школы. В Большой Советской энциклопедии написано: «Математический анализ - наука работающая с исследованием функций; дифференциальное и интегральное исчисление - наука исследующая интервальные и дифференциальный функции, а также решающая дифференциальные и интегральные уравнения» [20]. С одной стороны, понятие функции является «ключевым», с другой стороны, есть требование дифференциальных и интегральных исчислений. Отсюда в основные понятия элементов математического анализа отнесем понятия, связанные с дифференциальными и интегральными исчислениями, а именно:

- предел последовательности;
- ограниченность последовательности;
- граница последовательности;
- предел последовательности;
- окрестность точки, радиус окрестности;
- сходящиеся последовательности;

- свойства пределов (предел суммы равен сумме пределов; предел произведения равен произведению пределов; предел частного равен частному пределов; постоянный множитель можно вынести за знак предела);

-предел функции на бесконечности;

-предел функции в точке;

-непрерывная функция;

-приращение аргумента и приращение функции;

-**производная**;

-формулы дифференцирования;

-привила дифференцирования (включает 5 теорем)

-уравнение касательной к графику функции;

-исследование функций на монотонность;

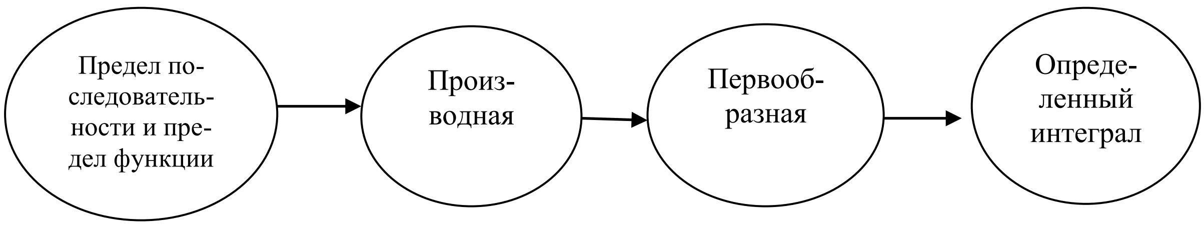
-точки экстремума функции и их нахождение;

-нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке;

-**первообразная**;

-**определенный интеграл**;

-формула Ньютона — Лейбница [19; с.142]




Последовательность представленная выше неизменима, так как без знания модели «производная» невозможно изучить «первообразную» или «определенный интеграл». Связь простая: интегрирование - операция обратная дифференцированию (производной). И наоборот, нахождение производной - действие обратное интегралу.

## 1.2. Представление элементов анализа в школьных учебниках математики

Проведем сравнительный анализ самых популярных в РТ учебников старшей общеобразовательной школы — это учебники авторов Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа. 10-11 классы» (учебник) [19] и Никольского С.М. и др. «Алгебра и начала анализа. 11 класс» [24]. Результаты анализа представлены в таблице 1.

Таблица 1. Сравнительный анализ учебников по темам «Производная», «Первообразная», «Интеграл»

| **Категории для сравнения** | **Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. Учебник. — 2009.** | **Никольский С.М. и др. Алгебра и начала анализа. 11 класс. — 2009.** |
|---|---|---|
| Место введения понятия производной (в 10 классе в начале курса или 11 классе, отсюда вывод о методическом значении темы. | Производная вводится во 2 полугодии 10 класса. | Производная вводится в 1 полугодии 11 класса, поэтому производная обобщает и систематизирует свойства различных функций – тригонометрических, логарифмических, степенных и др. |

| | | |
|---|---|---|
| Математические понятия, используемые для введения понятия производной | Для введения понятия производная вводятся понятия предела последовательности, геометрическая прогрессия, предел функции. Данные понятия очень тщательно разобраны и приводится множество примеров для отработки навыков решения задач. | Изучение темы «Производная» начинается с введения понятия приращения функции и формулировки правила его вычисления. Потом рассматриваются дифференцируемые функции. При помощи предела дается определение дифференцируемой функции в точке. На примере доказываются дифференцируемости функций. |
| Методические особенности введения определения «производной» | Рассматривают две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых как раз и приводит к возникновению новой математической модели. | Сначала рассматриваются задачи с решениями на приращение функции, основываясь на этом вводится определение производной. |
| Методические особенности введения геометрического смысла производной функции | Именно с геометрического смысла и начинается эта тема. Представлены графики и полное описание. Сформулировано в форме задач с решениями. | Все объяснение дается на наглядных примерах. |
| Методические особенности изучения применения производной при исследовании функции | В учебнике описан алгоритм исследования функций.<br><br>1. Найти производную функции.<br><br>2. Найти стационарные и критические точки. | В учебнике дается множество теорем по данной теме. Явный алгоритм не представлен. |

| | | |
|---|---|---|
| | 3. Определить знаки производной на получившихся промежутках.<br><br>4. Опираясь на теоремы сделать соответствующие выводы о монотонности функции и экстремумах. | |
| Место введения понятия первообразной (в 10 классе в начале курса или 11 классе, отсюда вывод о методическом значении темы. Например, если в конце курса 10-11 кл., то следовательно она является обобщающей и систематизирующей и др.) | Изучение «первообразной» вводится в 1 полугодии 11 класса. | Первообразная вводится во 2 полугодии 11 класса. |
| Математические понятия, используемые для введения понятия первообразной (последовательность изучения, уровень сформированности: общее представление, определение, хорошо сформированное понятие) | Для введения понятия первообразная вводятся понятия производная, угловой коэффициент касательно к графику, определение дифференцирования, определение интегрирования. | Для введения понятия первообразная используется только понятие производной. |
| Методические особенности введения определения первообразной | Первично вводится понятие на примере задачи на движение. Только потом дается понятие «первообразной» | Понятие вводится на примерах интервалов |
| Методические особенности введения геометрического смысла первообразной функции | Составляют таблицу нахождения первообразных | Вводят через площадь криволинейной трапеции |
| Методические особенности введения определения интеграла | При введении понятия "определенный интеграл" рассматриваются задачи, приводящие к данному понятию, а именно задача о вычис- | Рассмотрение задачи о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к понятию интегральных сумм и пределу |

| | | |
|---|---|---|
| | лении площади криволинейной трапеции, задача о вычислении массы стержня и задача о перемещении точки. | от них, после чего вводится определение определенного интеграл |
| Методические особенности введения геометрического смысла определенного интеграла | Геометрический смысл понятия вводится на наглядных примерах и графиках, что позволяет более глубоко понять смысл. | Геометрический смысл интеграла дается через площадь криволинейной трапеции. |

По нашему мнению, в учебнике Мордковича А.Г. теоретический материал по введению понятий математического анализа предложен на доступном уровне, ученики могут самостоятельно знакомиться с материалом, разбирать примеры, которые предложены в учебники, и опираясь на них решать задачи, предлагаемые в задачнике. Задачи предложены разноуровневые и в достаточно большом количестве, решать которые в полном объеме просто не хватает времени. С другой стороны, у учителя всегда есть возможность дополнительно позаниматься со школьниками или наиболее успешным по математике школьникам предложить дополнительную работу на уроке и в домашнем задании.

Учебник Никольского и др. рассчитан на обучение на базовом и профильном уровнях, что позволяет успешно организовать работу с учащимися различного уровня подготовки. Но существует вопрос: можно ли написать одинаково доступным языком для школьников как базового, так и профильного уровня? В целом, учебник написан доступным для учащихся языком, содержит большое количество примеров к изучаемым формулам и основным задачам. Учебник содержит материал для дополнительного повторения.

## 1.3. Методические аспекты обучения производной, первообразной и интегралу учащихся 10-11 классов

Обратимся к методическим рекомендациям методистов по изучению элементов анализа.

Так Мордкович А.Г. рекомендует перед изучением понятия производной необходимо выполнить следующие действия:

а) повторить вопросы, связанных с линейной функцией и элементарными функциями, что объясняется основной идеей дифференциального исчисления (представлением о линейной в малой окрестности некоторой точки функции);

б) отработать понятия приращения функции и приращения аргумента, что может быть иллюстрировано графиками функций;

в) выработать у обучающихся твердых навыков в их нахождении;

г) выяснить геометрический смысл отношения приращения функции к приращению аргумента, ввод понятия касательной к кривой как предельного положения секущей [16, с. 32]. После того как это будет отработано, можно переходить к введению понятия производной. Успешной будет связка понятия с основной проблемой дифференциального исчисления, т.к. с проблемой исследования процесса изменения функции. К тому же нужно знать правила, позволяющие данный процесс облегчить.

Для изучения геометрического смысла производной, нужно осуществить повтор материала по линейной функции, ее угловому коэффициенту, понятия производной, а также уже рассмотренные задачи про мгновенную скорость, касательную к графику функции. Для этого Мордкович А.Г. считает полезными задания следующих типов:

1. Найдите производную функции: $\boldsymbol{y = 7x + 4; y = x^2; y = -6x + 1}$.

2. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке с абсциссой $\boldsymbol{x_0}$: $\boldsymbol{f(x) = x^2, x_0 = 2; f(x) = \cos x, x_0 = \pi/3}$.

3. Найдите производную функции: $\boldsymbol{y = -3x^2 - 13x; y = x^5 + 9x^{20} + 1}$.

4. Вычислите скорость изменения функции $\boldsymbol{y = g\ (x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$:

$\boldsymbol{g\ (x) = x^3 + 2x, x_0 = 2; g\ (x) = 2x^3 - 4x + 3, x_0 = 2}$.

5. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $\boldsymbol{y = h\ (x)}$ в точке с абсциссой $\boldsymbol{x_0}$ и осью $\boldsymbol{x}$**:** $\boldsymbol{h\ (x) = x^6 - 4x, x_0 = 1}$.

Данные задачи покажут необходимость изучения нового понятия – понятия производной, а кроме того выполнят и дидактическую функцию по подготовке обучающихся к осознанию понятия производная.

Цукерман В. В. утверждает, что для изучения темы «Применение производной к исследованию функций» необходимы знания некоторых определений и теорем, изучавшихся раньше. По ходу решения задач обучающиеся должны будут находить производную функции, использовать известные графики с целью построения графиков других функций.

Исследование функций, особенно нахождение промежутков возрастания и убывания, является одним из основных способов применения производной в школьном курсе алгебры и начал анализа [21, с. 34]. С целью подготовки к осознанному усвоению признака возрастания и убывания функции рекомендовано рассмотреть обучающимися геометрические иллюстрации графиков функций с разным характером изменения и касательных в точках, принадлежащих к промежуткам возрастания и убывания. В ходе анализа расположения касательных по отношению к оси абсцисс (угол наклона) и определения таким образом знаков значений производной, обучающихся нужно подвести к самостоятельной формулировке необходимых признаков [2, с. 12]. Доказательство признаков осуществляется на основании формулы Лагранжа.

Башмаков Марк Иванович считал, что ученикам необходимо разъяснение наглядного смысла признаков. Пусть движущаяся по оси ординат точка в момент времени t имеет ординату $y = f(t)$. В данном случае скорость этой точки в момент времени t равна $f\,'(t)$. Если $f\,'(t) > 0$ в каждый момент времени из промежутка L, то точка движется в положительном направлении оси ординат, т.е. если $t_1 < t_2$, то $f(t_1) < f(t_2)$. Это значит, что функция f возрастает на промежутке L.

Материал по теории темы «Критические точки функции, ее максимумы и минимумы» – это основа для получения общего метода решения класса задач на нахождение экстремумов функций. Этап, на котором идет рассмотрение общей схемы исследования функции, отличается тем, что учащиеся еще не владеют методом нахождения точек экстремума. На уроке по данной теме идет рассмотрение необходимого признака экстремума (теорема Ферма) и достаточного признака максимума и минимума. В итоге изучения темы каждый ученик должен получить умение по нахождению экстремумов функций.

Доказательство признаков максимума и минимума функции необходимо проводить с привлечением учащихся. Внутренние точки области определения функции, где она будет равна нулю или не существует, называются критическими точками данной функции. Они выполняют важную роль в процессе построения графика функции, т.к. лишь они могут быть точками экстремума функции. При рассмотрении теоремы Ферма нужно отметить, когда теорема является лишь необходимым условием экстремума: производная в точке $x_0$ обращается в нуль, не следует, что в данной точке функция имеет экстремум. Например, производная функции $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке нет.

Для изучения критических точек, где производной не существует, будут успешны следующие условия. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. У нее нет производной в точке 0. Следовательно, 0 является критической точкой. Видно, что в точке 0 функция имеет минимум. Из теоремы Ферма следует: при нахождении точек экстремумов функции нужно в первую очередь найти ее критические точки. Для учащихся будет удобно использование упрощенной формулировки признака максимума функции: если в точке $x_0$ производная меняет знак с + на -, то $x_0$ есть точка максимума. Для учащихся будет удобно использование упрощенной формулировки признака минимума: если в точке $x_0$ производная меняет знак с - на +, то $x_0$ есть точка минимума [19, с. 86].

При рассмотрении темы по нахождению наибольшего и наименьшего значений функции, рекомендовано уделить внимание следующему факту:

наибольшее (наименьшее) значение функции не есть максимум (минимум) функции. Решение практических задач часто сведено к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсе анализа ученики доказывают теорему Вейерштрасса, утверждающую, что непрерывная на отрезке $[a, b]$функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение, т.е. существуют точки отрезка $[a, b]$, где $f$ принимает наибольшее и наименьшее на $[a, b]$значения. С целью нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, необходимо провести вычисление значения функции во всех ее критических точках и на концах отрезка, затем из полученных результатов выбрать наибольшее и наименьшее.

Для закрепления полученных знаний полезны следующие типы упражнений:

1. Используя данные о производной $f'(x)$ , приведенные в таблице,

| X | (- ∞, 5) | - 5 | (-5, -2) | -2 | (-2, 8) | 8 | (8, +∞) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | + |

укажите:

а) промежутки возрастания функции $y = f(x)$;

б) промежутки убывания функции $y = f(x)$;

в) точки максимума функции $y = f(x)$;

г) точки минимума функции $y = f(x)$.

2. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = 3x^2 – 4x + 5$;

$y = 3x^2 – x^3$;

$y = (x – 1)^2(x + 2)$.

3. Определите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

$y = x – \sin x$;

$y = x + 4 \cos x/2$.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что изучение применения производной к исследованию функций имеет огромное значение для многих классов функций, а также реализует связи между предметами (физика). Изложение вопросов, которые связаны с исследованием функции на экстремумы, обычно начинается с доказательства достаточных признаков возрастания и убывания функций, затем идет изучение теоремы Ферма (необходимое условие существования экстремума), затем – условий существования экстремума, общей схемы исследования функций и задач на наибольшее и наименьшее значения функции на интервале. Перед изучением обозначенных вопросов рекомендуется осуществить повтор понятий возрастающей и убывающей функций, определения производной, ее геометрического смысла, понятия касательной, углового коэффициента, условия параллельности прямых, графиков известных функций. Кроме того, обучающиеся должны иметь представление о непрерывных функциях.

Школьная практика «испытывала» разные варианты введения понятия интеграла. В первых изданиях учебного пособия под редакцией А.Н. Колмогорова интеграл определялся при помощи формулы Ньютона-Лейбница (как приращение первообразной), в изданиях более поздних редакций были приведено традиционное определение интеграла как предела интегральных сумм [5, с. 77]. Современная методика изучения первообразной представлена в следующей последовательности:

- рассмотреть примеры взаимно обратных операций;
- изучить понятие интегрирования как операции, обратной дифференцированию, а первообразной в качестве результата операции интегрирования;
- выполнить упражнение типа «доказать, что данная функция есть первообразная другой данной функции» или «решить задачи на отыскание первообразной для данной функции»;
- познакомить обучающихся с основным свойством первообразной;
- составить таблицы первообразных;
- познакомить обучающихся с правилами нахождения первообразных;
- решать задачи с применением первообразной.

В учебно-методической литературе, Виленкин Наум Яковлевич активно рассматривает следующие основные способы построения теории интегралов [4, с. 46]:

1. При решении задач происходит ввод понятий интегральной суммы и определенного интеграла, идет рассмотрение некоторых его свойств и теоремы существования. Затем доказывается: производная определенного интеграла с переменным верхним пределом равна значению подинтегральной функции от верхнего предела. Происходит введение понятий первообразной, неопределенного интеграла, получается формула Ньютона-Лейбница с целью вычисления определенного интеграла. Заканчивается изучение решением задач с применением интегрального исчисления.

2. Вначале вводится понятие первообразной функции, неопределенного интеграла, ученики изучают его свойства и теоремы существования (без доказательства), устанавливается связь между первообразной и площадью под графиком функции. Затем вводится понятие определенного интеграла (как предела интегральных сумм или как приращения первообразной). Затем – задачи с применением интеграла.

Школьный вариант представляет собой версию, близкую ко второму способу.

Достоинство способа № 1 в том, что в ходе изучения всесторонне выясняется идейный смысл определенного интеграла. Вначале обучающиеся овладевают переходом от равномерных процессов к неравномерным, составлением интегральных сумм, переходом от нее к интегралу. Недостаток же состоит в том, что есть неоправданно большой разрыв по времени меж введением понятия интеграла и его вычислением. Ученики вначале учатся решать задачи, которые приводят к понятию интеграла и его свойств. Лишь по окончании темы обучающиеся непосредственно занимаются интегрированием, что приводит к потере интереса у детей к изучению теории. Это сказывается на отработке навыков по решению задач.

Положительные стороны способа № 2:

- раннее знакомство учащихся с основной задачей интегрального исчисления, т.е. с нахождением по данной функции f (x) ее первообразной F(x) и овладением аппаратом для решения;

- возможность вычисления интегралов, следовательно, прививание школьникам навыков интегрирования;

- как итог – лучшая подготовленность к решению задач в курсах геометрии и физики.

Отрицательная сторона способа выражается в том, что определением определенного интеграла как приращения первообразной не раскрывается полно идейная сторона.

Виленкин Н.Я. при введении понятия первообразной использует аналогию с известными ученикам взаимно обратными операциями [4, с. 91]. Например, операция сложения позволяет по 2 числам найти 3-е – их сумму. Если известно только I слагаемое и сумма, то II слагаемое «восстанавливается» через операцию вычитания. Вычитание представляет собой операцию, обратную сложению, приводящую к единственному результату, но не всегда: возведение в квадрат числа 3 дает число 9. Пусть известно, что число 9 = квадрат некоторого числа: $x^2=9$. Выполнив обратную операцию – извлечение квадратного корня – получаем 2 значения: 3 и -3.

Дифференцирование функции $F(x) = x^3$ приводит к новой функции $f(x) = 3x^2$, являющейся производной функции $F(x) = x^3$. Пусть известно, что производная некоторой функции равна $3x^2$, т.е. $f(x) = F'(x) = 3x^2$; надо найти функцию F(x).

Интегрирование – это операция нахождения функции по ее производной. Выполняя интегрирование, можно получить такие результаты: $F(x)=x^3$; $F_1(x) = x^3 + 1$; $F(x) = x^3 - 2$ и т.д. Функция $F(x) = x^3 + c$ равно первообразная функции $f(x) = 3x^2$. Поэтому интегрирование есть операция, обратная дифференцированию; результат операции интегрирования носит название «первообразная». Потом учитель дает определение первообразной: функция называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$ [13, с. 66].

Перечисленные понятия рекомендовано вводить посредством дедукции в сопровождении иллюстрации использования определения основного понятия, его качеств на конкретных примерах. Задачи, иллюстрирующие вводимый теоретический материал, являются закрепляющим его способом.

Методисты рекомендуют обращать внимание обучающихся на следующий момент: запись $F(x) + c$ (общий вид первообразных для функции f(x) на заданном промежутке) связывается с произвольным значением постоянной $c$, но с другой стороны, учитывая условия предложенной для решения задачи, – с конкретным. Для этого можно вернуться к анализу результатов уже решенных задач. Для демонстрации учета условий задачи необходимо обращение к конкретно определенной первообразной. Решение такой задачи связывается с поиском первообразных заданных функций, удовлетворяющих данным вначале условиям.

Примерные задания:

1. Для данной функции найдите первообразную, график которой проходит через заданную точку $M$: $y = \sin x$, $M(\pi/3;\ 1/4)$;

$g(x) = 1 - 2\sin^2 x/2$, $M(\pi/2;\ 15)$;

2. Для заданной функции $y = f(x)$ найдите первообразную, график которой касается оси $x$: $f(x) = 2x + 3$; $f(x) = 12(3x - 1)^3$.

Решение таких задач доказывает ученикам: ответы на них связаны с выделением из множества первообразных этой функции конкретных определенных первообразных (это видно из задач практического содержания).

Изучение правил нахождения первообразных лучше связывать с пониманием двух взаимообратных операций – дифференцированием и интегрированием. Анализ решений соответствующих задач и приведет к формированию указанного правила нахождения первообразных, доказательство которого учитель может дать ученикам для самостоятельной работы.

На начальном этапе изучения понятия «интеграл» специалисты рекомендуют дать подводящую задачу, на следующем начать формулировать определение интеграла.

Семенко Е.А. приводит примеры в качестве задач, способных подвести к этому понятию-[7, с. 101]:

Задача 1. На отрезке $[a, b]$ задана непрерывная и неотрицательная функция $y = f(x)$. Укажите новый способ, который не будет связан с первообразной, нахождения площади $S$ криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции и прямых $x = a$ и $x = b$.

Чтобы решить данную задачу, в первую очередь, нужно построить ступенчатую фигуры и вычислить ее площадь: $[a, b]$ разбиваем на n равных частей: $x_1 = a < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$. Одна сторона прямоугольника – $[x_1, x_2]$, вторая – $f(x_1)$, поэтому $S_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x$.

Следующим шагом будет выражение площади S криволинейной трапеции через $S_n$. Далее нужно произвести деление [a; b] на более «мелкие» части и вычислить значение $S_n$. После сравнения получаем: $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ .

Задача 2. Пусть материальная точка движется прямолинейно с мгновенной скоростью V=V(t), где V=V(t) – непрерывная на отрезке $[T_1, T_2]$ функция. Найдите путь, который пройдет материальная точка за время от $T_1$ до $T_2$. При решении нужно помнить: в самом простом случае (когда мгновенная скорость постоянна) путь, пройденный телом, будет равен произведению его скорости на время движения. В общем случае (когда мгновенная скорость непостоянна): $[T_1, T_2] \Rightarrow t_1 = T_1, t_2, t_3, \ldots, t_a, t_{a+1} = T_2, \Delta = \frac{T_2 - T_2}{n} \Rightarrow S_a = v(t_1)\,\Delta T + v(t_2)\Delta T + \ldots + v(t_a)\Delta T \Rightarrow S = \lim_{a \to \infty} S_a$

При сравнении результатов решения представленных выше задач можно сформулировать общий метод их решения. Чтобы найти ответ, нужно выполнить следующие действия:

- разбить отрезок, на котором задана функция, на равные части;

- составить сумму вида $f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$, принимаемую как приближенное значение искомой величины;

- выполнить предельный переход: $\lim_{n\to\infty}(f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x)$ (такие пределы встречаются при решении многих задач из разных областей науки и техники, поэтому у них есть свое название – «интеграл функции f (x) от a до b» и обозначение $\int_a^b f(x)dx$). Так, по определению:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(f(x_1)\Delta x + f(x2)\Delta x + \cdots + f(xn)\Delta x)$ , где f (x) – непрерывная на [a, b] функция; $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ – точки, разбивающие отрезок [a, b] на равные части; $\Delta x$– длина каждой из этих частей.

Результаты решенных задач будут следующими. Площадь криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией f (x) на [a, b], $\int_a^b f(x)dx$).Путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $T_1$ до $T_2$ со скоростью V=V(t), где V=V(t) – непрерывная на отрезке $[T_1, T_2]$ функция, $S = \int_{T_1}^{T_2} V(t)dt$ . Сравнивая формулы площади криволинейной трапеции S=F(b)-F(a) и $S=\int_a^b f(x)dx$, получаем:$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , где F – первообразная для f на [a, b] – формула Ньютона-Лейбница, позволяющая вычислять интегралы.

Анализ материала учебных пособий, посвященных введению понятия «интеграл» и получению способа вычисления интегралов, приводит к важному в методическом плане выводу о том, что определение интеграла и формула Ньютона-Лейбница позволяют доказать ряд часто применяемых свойств интеграла [9, с. 56]. В процессе доказательства этих свойств понятие интеграла и его геометрический смысл глубже усваиваются. Учитель может предложить своим ученикам, например, установить верность следующих утверждений: $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, если функция f имеет на отрезке [a, b] первообразную, то $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ , где С – некоторая постоянная; доказать формулу вычисления производной от интеграла с переменным верхним пределом интегрирования: $\int_a^b f(t)dt = f(x)$где $f\ (x)$ – функция, непрерывная на интервале с точками a и x.

Приведенные выше задания к тому же полезны тем, что в процессе их решения в сознании школьников устанавливаются с целью дальнейшего использования связи между операциями дифференцирования и интегрирования, понятиями «производная», «первообразная», «интеграл» и их свойствами.

Понятие «интеграла» вводится для функции непрерывной на некотором отрезке (такая функция имеет на этом отрезке первообразную). Сознательному усвоению учащимися этого понятия (и понятия первообразной) будет способствовать специальное привлечение внимания школьников к этому факту [8, с. 112]. С этой целью могут быть использованы задачи, например, такие:

Можно ли вычислить $\int_{x14}^{2x13} \frac{dx}{\cos^2 x}$? (подинтегральная функция имеет точку разрыва x = $\frac{\pi}{2}$, принадлежащую отрезку $[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}]$ ).

Найдите ошибку в вычислении интеграла: $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)} \Big|_{-1}^{2} = -0{,}6$ (о том, что ошибка действительно допущена, свидетельствует результат: интеграл от положительной функции оказался отрицательным числом).

При каких значениях пределов интегрирования интеграл существует: $\int_a^b \frac{dx}{25-x^2}$?

В точках 5 и –5 подынтегральная функция терпит разрыв; поэтому можно говорить о следующих условиях, которым должны удовлетворять значения пределов интегрирования: a > -5; b < 5; a < b < -5; b > a >5.

Вычислите: а) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$) ; б) $\int_{-4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ ; в) $\int_{-3}^{-2} (\sqrt{(x+2)}^2 dx$ (в 2 последних случаях интегралы не могут быть вычислены, т.к. подынтегральная функция не определена в каждой точке отрезка, заданного проделами интегрирования).

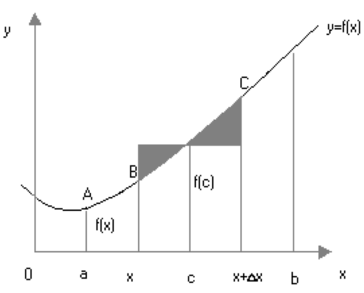
Установление связи понятий «интеграл» и «первообразная» происходит через обращения к площади соответствующей криволинейной трапеции. Уделяя внимание геометрическому смыслу интеграла, не следует ограничиваться только геометрической иллюстрацией в процессе решения задач на вычисление интегралов. Целесообразно специально подчеркнуть, что, опираясь на геометрический смысл интеграла, иногда получаем возможность: установить существование более простого по сравнению с рассмотренным способом вычисления интегралов (например, по симметричному относительно точки 0 промежутку от четной или нечетной функции). Сделать это можно, обратившись к задачам: не только вычислять площадь фигур, но и находить числовые значения интеграла, вычисление которых по известным учащимся формулам выполнить не удается.

Покажите, что если f – непрерывная, четная на отрезке [-a, a] функция, то: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$. Покажите, что если f – непрерывная, нечетная на отрезке [-a, a] функция, то:.$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Важным применением интеграла является вычисление площади криволинейной трапеции.

Центральное место в изучении этого вопроса занимает теорема о площади криволинейной трапеции: «Пусть f – непрерывная и неотрицательная на отрезке [a, b] функция, S – площадь соответствующей криволинейной трапеции. Если F есть первообразная для f на отрезке [a, b], то S = F (b) – F (a).»

С помощью этой теоремы можно обосновать формулу Ньютона-Лейбница. Изучение доказательства проведем методом подготовительных задач [13, с. 82].




1. Приращение аргумента, приращение функции.

Задача. На рисунке площадь криволинейной трапеции представлена как функция от *x*. Укажите на этом рисунке *S*(*x*); *S*(*x* + *Dx*); *DS* = *S*(*x* + *Dx*) – *S*(*x*).

$S(x) = S_{aABx}$; S (x + Dx) = $S_{aACx} + \Delta x$; DS = $S_{xBC(x + \Delta x)}$; (необходимо потому, что учащиеся встречаются с новой геометрической интерпретацией уже известных понятий ).

2. Определение производной.

Запишите определение производной функции применительно к функции S(x). В результате получим запись: $S'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$

3. Понятие функции, непрерывной в точке.

Пусть f (x) – функция, непрерывная в точке x (см. рисунок). Отметим на оси абсцисс точки x, x + Δx и точку c, лежащую между ними. Пусть $\Delta x \to 0$. К чему стремится f (c)? Из графических соображений получаем ответ, что если $\Delta x \to 0$, то $c \to x$, а $f(c) \to f(x)$.

4. Утверждение о том, что площадь криволинейной трапеции с основанием Δx можно заменить равной площадью прямоугольника с тем же основанием Δx и высотой f (c), где c – некоторая точка отрезка [x; x + Δx].

Существование точки c утверждается при помощи теоремы и может иллюстрироваться такими заданиями, как: «На рисунке дана криволинейная трапеция с основанием Δx. Построить прямоугольник, у которого основание было бы равно Δx, а площадь равнялась бы площади криволинейной трапеции». Задание выполняется «на глаз», от руки с целью интуитивного (на наглядно-геометрическом уровне) осознания рассматриваемого факта.

5. Определение первообразной. Пусть S (x) – первообразная f (x). Поясните, что это обозначает. Пусть S(x) – одна из первообразных для функции f (x). Запишите формулу для общего вида первообразных функции f (x) (привычное определение первообразной применяется в новых обозначениях).

Доказательство теоремы целесообразно разбить на три этапа:

1. Введем функцию S (x). Рассмотрим функцию S (x), определенную на отрезке [a, b], выражающую зависимость площади криволинейной трапеции от аргумента x. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, что $a \leq x + \Delta x \leq b$. Тогда

приращение функции $S'(x)$ в точке $x$: $\Delta S(x) = S(x+\Delta x) - S(x)$ ($\Delta x$ полагаем положительным).

2. Докажем, что функция S (x) – это первообразная для функции $f(x)$:$S'(x)=f(x)$ для всех $x\in[a,b]$. Согласно определению производной, $S'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$. Т.к. $\Delta S(x)$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $\Delta x$, то ее можно заменить равной площадью прямоугольника с основанием $\Delta x$ и высотой f(c), где $c\in[x,x+\Delta x]$ $\Delta S(x) = f(c)\cdot\Delta x$ Тогда:

$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c)$. Поскольку c лежит между x и $x + \Delta x$, то при $\Delta x \to 0$ точка c стремится к x, а $f(c) \to f(x)$. Эти рассуждения можно записать в одну строчку следующим образом: $S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x)$

Итак, $S'(x)=f(x)$.

3. Подведем итоги. Мы доказали, что S (x) – первообразная для f (x) на [a, b]. Но по условию F (x) – также первообразная для f (x) на этом отрезке. Следовательно, функции S (x) и F (x) отличаются друг от друга на некоторую константу C: $S(x)=F(x)+C$ (1). Пусть x = a равенство (1) примет вид: $\theta=F(a)+C$, откуда C = -F (a). При x = b равенство (1) запишется в виде: S = S (b) =F (b) + C = F (b) – F (a). Таким образом, S = F (b) – F (a).

Рассмотрим простейший случай криволинейной трапеции – обычную трапецию. Пусть также трапеция образована графиком функции y = x и прямыми: x = 1 и x = 2. По формуле площади трапеции, известной из курса планиметрии, $S=\frac{1+2}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$ . Первообразная данной функции $F(x)=\frac{x^2}{2}$ , а разность F(b)-F(a)$=\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Таким образом, этот пример подтверждает, что площадь трапеции может быть найдена как приращение первообразной: S=F(b)-F(a). Методика использования рассмотренного примера при ознакомлении учащихся с теоремой может быть такой: вначале ставится учебная проблема о нахождении связи между площадью криволинейной трапеции и первообразной; приводится пример, указывающий эту связь; формулируется теорема или сначала сообщается теорема, затем приводится примет, подтверждающий эту теорему.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о том, что изучение первообразной и интеграла позволяет обучающимся овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, развития умственных способностей, умения извлекать учебную информацию на основе сопоставительного анализа графиков, а также самостоятельно выполнять различные творческие работы. Главной задачей ученика при изучении тем будет обучение применению знания и умения по теме (уметь передавать информацию сжато, полно, выборочно; уметь объяснить изученные положения на самостоятельно подобранных конкретных примерах; уметь участвовать в диалоге, понимать точку зрения собеседника, признавать право на иное мнение). Основной целью учителя является формирование представлений о понятии первообразной, неопределенного интеграла, определенного интеграла. Важно выработать у учащихся умения применения первообразной функции при решении задачи вычисления площадей криволинейных трапеций и других плоских фигур.

# ГЛАВА 2. Составление системы задач для подготовки к ЕГЭ по математическому анализу

## 2.1. Требования к подготовке учащихся в соответствии с ФГОС и ЕГЭ. Анализ учебных пособий для подготовки к ЕГЭ

Для подготовки системы упражнений для подготовки к ЕГЭ, необходимо обратиться к вопросам ФГОС посредством реализации содержания тем «Производная» и «Первообразная». Для этого на сайте http://standart.edu.ru/ представлены Федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС) 2-го поколения для основной и общеобразовательной школы.

Поскольку данные стандарты на данный момент недавно начал реализоваться в учебных программах 5-9 классов, то на сайте предложены примерные программы по учебным предметам, в частности по математике. Анализ данной программы показал, что понятие функции остается одним из ключевых, «базовых» понятий курса математики в 7-9 классах. В требованиях к предметной подготовке учащихся написано, что в предметном направлении учащийся должен: овладеть системой функциональных понятий, функциональным языком и символикой; уметь использовать функционально графические представления для описания и анализа реальных зависимостей [21]. Исходя из этого перейдем к ФГОС старшей школы. Здесь ФГОС 2-го поколения еще не реализуется, но в ближайшее время это произойдет. Непосредственно к математическому анализу имеют отношения следующие требования к базовому уровню подготовки учащихся:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

2) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа [21].

Первый пункт обращает нас к исследованиям явлений окружающего мира с помощью математического анализа, в частности, использование производной, первообразной и интеграла в физике. Второй пункт показывает, что в соответствии с ним, ядром содержания математического анализ так и останутся производная, первообразная и интеграл, поскольку они и являются, как отмечено в пункте 1.1 данной работы основополагающими понятиями анализа. Многообразие возможно лишь в способе подачи данных понятий учащимся.

Обратимся к требованиям и содержанию ЕГЭ по началам математического анализа, для этого проанализируем демоверсии, спецификации, кодификаторы на официальный информационный портал Единого государственного экзамена http://ege.edu.ru/ . Задания ЕГЭ разделены на две части: 1) с В1 по В10 проверяют «наличие практических математических знаний и умений базового уровня»; 2) с В11 по В15, все задачи уровня С проверяют профильный уровень математической подготовки. Задачи по математическому анализу входят и в 1-ю, и во 2-ю части, которые направлены на проверку основных умений по исследованию функции, в частности, нахождения наибольший и наименьших значений производных; на проверку вычисления производных, первообразных элементарных функций; на решение прикладных задач.

В кодификаторе элементов содержания по математике ЕГЭ начала математического анализа представлены 3-мя пунктами: «Производная», «Исследование функций» и «Первообразная и интеграл». Приведем содержания этих пунктов:

### I. ПРОИЗВОДНАЯ

1. Понятие производной функции, геометрический смысл производной.
2. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.
3. Уравнение касательной к графику функции.
4. Производные суммы, разности, произведения, частного.
5. Производные основных элементарных функций.
6. Вторая производная и ее физический смысл.

## II. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков
2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.

## III. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

1. Первообразные элементарных функций.
2. Примеры применения интеграла в физике и геометрии.

В спецификации контрольно измерительных материалов (КИМ) ЕГЭ указано, что начала анализа должны присутствовать в 1 и 2 частях материалов ЕГЭ. В распределении заданий по содержательным блокам написано, что число заданий по началам анализа – 2, но данное разделение относительно, поскольку например при решении С5 в отдельных задачах с параметром при решении функционально-графическим методом так же можно использовать производную. Далее подготовка к ЕГЭ зависит обобщенного плана варианта КИМ, утвержденного для данного года. Так, например, в 2014 году, задачи В9, В15 связанны с нахождением производной и первообразной, В12 – прикладные задачи.

**Анализ учебных пособий для подготовки к ЕГЭ**

Рассмотрим учебное пособие под редакцией Семенова А.Л. и Ященко И.В.

Назначение пособия – предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов по математике, степени трудности заданий.

Данное пособие состоит из двух глав:

Первая глава пособия содержит 30 вариантов комплектов типовых тестовых заданий по математики, составленных с учетом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена.

Во второй главе пособия отдельно представлена качественная информация о заданиях части С и обширная подборка задач, скомпонованных по всем темам школьной математики.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов, приводятся решения всех заданий части С одного из вариантов, а так же ответы на все задания части С.

В данном пособие задачи на тему «Математического Анализа» представлены задачами В8 и В14, а также задачи из части С (С5).

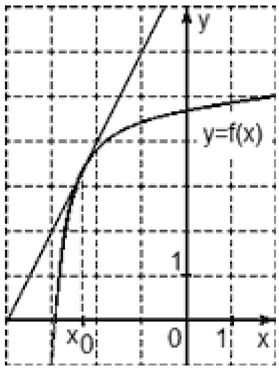
В задачи В8 требуется определить количество целых точек, в которых производная функции положительна или найти значение производной в точке.

В задачи В14 нужно найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке.

### 2.2. Диагностика основных видов задач уровня В на производную и первообразную в пособиях для подготовки к ЕГЭ

В заданиях ЕГЭ (В) учащиеся могут встретить следующие типы задач.

Задачи на вычисление производной по данным приводимого в условии рисунка, представляющего собой изображенные на клетчатой бумаге график функции и касательную к нему. Иногда на рисунке может быть изображен только график функции, а касательная задана описанием. Метод решения от этого не меняется и основывается на геометрическом смысле производной. Решение задачи состоит в вычислении углового коэффициента касательной, то есть тангенса угла, который она образует с положительным направление оси абсцисс. Для этого достаточно найти отрезок касательной с концами в вершинах клеток и, считая его гипотенузой прямоугольного треугольника, найти отношение катетов. «Подводный камень»: если угол тупой, то его тангенс отрицателен, поэтому ребенок должен не забыть написать в ответе знак минус.

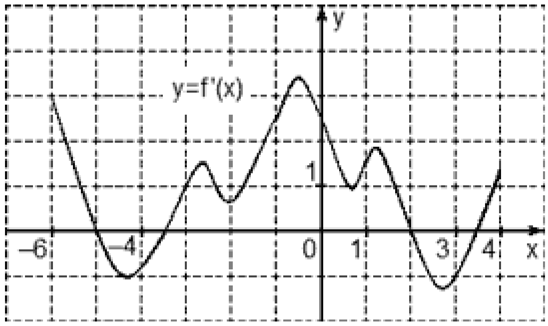



**Задача.** На рисунке изображен график функции y = f (x) и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции f (x) в точке $x_0$.

Рассмотрим точки A (-3; 2) и B (-1; 6) и найдем приращения: $\Delta x = x_2 - x_1 = -1 - (-3) = 2$;

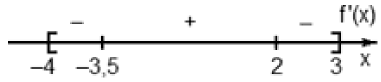
$\Delta y = y_2 - y_1 = 6 - 2 = 4$.

Найдем значение производной: D = Δy / Δx = 4 / 2 = 2. Ответ: 2.




Задачи на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке. Производная в некоторых задачах может быть задана графиком. Решение задания связано с нахождением при помощи производной точек минимума (максимума) заданной функции или ее наименьшего (наибольшего) значения на отрезке.

**Задача.** На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [-6; 4]. Найдите количество точек максимума функции f (x), принадлежащих отрезку [-4; 3].

Из условия задачи следует, что достаточно рассмотреть только часть графика, ограниченную отрезком [-4; 3]. Поэтому строим новый график, на котором отмечаем только границы [-4; 3] и нули производной внутри него. А именно, точки x = -3,5 и x = 2. Получаем: 

. На этом графике есть лишь одна точка максимума x = 2. Именно в ней знак производной меняется с плюса на минус. Ответ: 1.

В условии таких задач возможны два основных случая: производная задана графиком, следовательно, на тех промежутках, где он расположен выше оси абсцисс (т.е. производная положительна), функция возрастает; на тех же промежутках, где он расположен ниже оси абсцисс (т.е. производная отрицательна), функция убывает. Точки, в которых график производной пересекает ось абсцисс (т.е. точки, в которых производная меняет знак), является точками экстремума. Если функция задана формулой, то при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке можно использовать стандартный алгоритм.

Экзаменационные задания на первообразную и интеграл представляют собой в первую очередь задачи на вычисление площадей криволинейных фигур. Нужно знать табличные значения первообразных основных элементарных функций и помнить, что для заданной функции существует множество первообразных, отличающихся друг от друга на константу.

## 2.3. Система задач для подготовки учащихся к ЕГЭ по теме «Производная и первообразная»

Все вышеизложенное позволяет выделить некоторые задачи для подготовки к ЕГЭ. Чтобы не повторять желательно обратиться к тем задачам, которым мы уделили пристальное внимание в пунктах 1.3 и 2.2. В целом задач подготовки ЕГЭ мы делим на следующие группы:

1. **Производная**

- Нахождение производной для нахождение максимума и минимума функции на промежутке (на всем множестве действительных чисел).
- Применение производной в решении прикладных задач

2. **Первообразная**

- Нахождение первообразной для функций
- Применение первообразной в решение прикладных задач

Задача 1. Найдите наибольшее (наименьшее) значение функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[-3; -0{,}5]$.

*Комментарий к решению задачи* 1. Заметим, что функция $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ определена на всей числовой оси. Наибольшее свое значение на отрезке функция принимает в точке экстремума или на на концах отрезка.

Определим точки, подозрительные на экстремумы. Для этого найдем производную функции: $y' = 3x^2 + 4x + 1$. Решим уравнение $y' = 0$, т.е. $3x^2 + 4x + 1 = 0$ и $x_1 = -1$, $x_2 = -13$. Точка $x_2 = -13$ не принадлежит рассматриваемому отрезку $[-3; -0{,}5]$.

Вычислим значения функции в точке $x = -1$ и на концах отрезка.

При $x = -1$: $y = (-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 + (-1) + 3 = -1 + 2 - 1 + 3 = 3$.

При $x = -3$: $y = (-3)^3 + 2\cdot(-3)^2 + (-3) + 3 = -27 + 2 \cdot 9 = -9$.

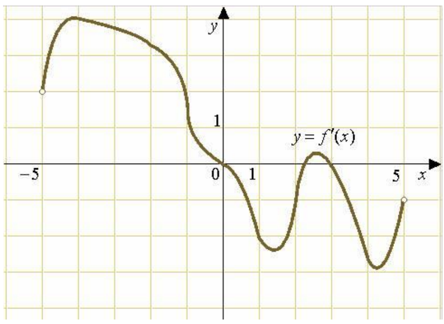
При $x = -0{,}5$: $y = (-0{,}5)^3 + 2\cdot(-0{,}5)^2 + (-0{,}5) + 3 = -0{,}125 + 2 \cdot 0{,}25 - 0{,}5 + 3 = 2{,}875$.

Наибольшим из полученных чисел является 3.

Аналогичные задачи отличаются видом заданной функции, они могут быть как тригонометрические, комбинированные. Например:

Задача 2. Найдите наименьшее значение функции $y=(x-1)e^x$ на отрезке [1;1].

Следующий вид задач направлен на понимание графической интерпретации производной функции.




Задача 3. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-5; 5). В какой точке отрезка [-4; -1] $f(x)$ принимает наибольшее значение.

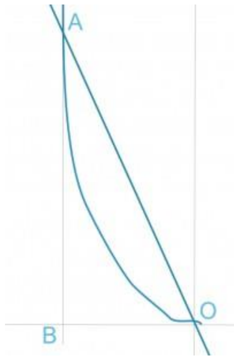
*Комментарий к решению задачи* 5: здесь важным является понимание свойств производной функции при ее исследовании.

Задание 4. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – 2 различные первообразные функции $f(x)$, причем $F_1(3)=8$; $F_2(5)=12$; $F_1(5)=14$. Найдите $F_2(3)$.

*Комментарий к решению задачи* 4: Все первообразные одной функции отличаются на константу, т.е. параллельны между собой. Мы можем найти эту константу, как разность в одной точке. Нам известно значение обеих первообразных в точке «5». Константа равна 14 – 12 = 2. Значит и $F_1(3) - F_2(3) = 2$. Отсюда $F_2(3) = 6$.

Задача 5. Найдите значение выражения $3S$, где $S$ – площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y= - 2x$.

*Комментарий к решению задачи* 5: Т.к. с помощью интеграла вычисляется площадь фигуры под графиком функции, то в этом задании нужно вычислить площадь треугольника AOB и вычесть из нее площадь, вычисленную с помощью интеграла. Одна из точек пересечения этих функций (0; 0) – это очевидно из уравнений функций. Вторая точка пересечения $x^2 = - 2x \Rightarrow x = -2$. Ордината этой точки 4. Площадь треугольника $AOB$ равна $\frac{1}{2}4 \cdot 2 = 4$ . Площадь нижней части (под параболой) .$S_1 = \int_{-2}^{0} x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_{-2}^{0} = 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$ Искомая площадь 4-$\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$. В ответе требуется указать 3S, т. е. 4.




Задача 6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ , $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. В ответ запишите 3$S$.

*Комментарий к решению задачи* 6: $x = 1$ и $x = 2$ – прямые, параллельные оси ординат (это пределы интегрирования), $y = 0$ – ось $OX$, и только сверху эта фигура ограничивается параболой. $S = \int_{1}^{2} x dx = \frac{x^3}{3}|_{1}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, 3S = 7. Ответ: 7.

Аналогичные, но отличающиеся идей решения можно рассматривать следующие задачи.

Задача 7. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{\pi}{3}$ , $x = \frac{\pi}{2}$ и графиком функции y = 2 sin $x$.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о том, что в изучении элементов математического анализа в школьном курсе математики весомая роль отводится учителю, деятельность которого должна строиться на следующих условиях, способствующих успешности обучения: теоретический материал тщательно отобран и сочетает научность и доступность в изложении; учтены общий уровень подготовки обучающихся, особенности их мышления и восприятия, а также выбор пути изложения материала; на уроках используется разнообразная наглядность (чертежи и т.д.); обучение систематично и последовательно.

Систему упражнений рекомендовано строить таким образом, чтобы она способствовала успешному усвоению основополагающих понятий, активизировала мыслительную деятельность обучающихся и постоянно поддерживала их интерес к учебным занятиям. Важно также показывать ученикам прикладную значимость изучаемого материала.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение элементов математического анализа на базовом уровне имеет несомненную важность в развитии представлений учащихся о структуре математики и ее приложений. Именно приложения производной, первообразной и интеграла  и являются принципиальными при формировании содержания задач ЕГЭ. Это вопросы применения производной в исследовании функций, в прикладных задачах и использование первообразной и интеграла в нахождении площадей различных криволинейных фигур.

Систему упражнений для подготовки к ЕГЭ рекомендовано строить так, чтобы она способствовала систематизации основополагающих понятий, давала новое видение изученного материала и к его качественное усвоение.

В нашей работе мы выделили основные вопросы математического анализа изучаемого в школе (пункт 1.1), обратили внимание на сложности в изучении элементов математического анализа (пункты 1.2 и 1.3), рассмотрели требования ФГОС и ЕГЭ  (2.1), провели нанализ учебных пособий и задач ЕГЭ по математическому анализу (2.1, 2.2), составили систему задач, дающую представление учащимся и учителю, о предлагаемых задачах на ЕГЭ (2.Т). Таким образом, задачи исследовательской работы выполнены.

## Список литературы


1. Алгебра и начала анализа. 10 – 11 классы: В 2 ч. Ч.2. Задачник для для общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 8-е изд., стер. – М., Мнемозина, 2007. – 315 с.: ил.
2. Алгебра и начала анализа: 10-11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. 15-е изд. – М., Просвещение, 2006. – 384 с.: ил.
3. Башмаков М.И. Определение основных понятий анализа в школьном курсе математики / М.И. Башмаков // Математика в школе, 1988. – № 3.–42 с.
4. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. для пед. ин-тов / В.М. Брадис; под ред. А.И. Маркушевича. – М., Учпедгиз, 1954. – 504 с.
5. Виленкин Н.Я. Производная и интеграл / Н.Я. Виленкин, А.Г. Мордкович. – М., Просвещение, 1976. – 150 с.
6. Гераськина Е.В. Интеграл и общее среднее образование: проблема и вариант ее решения / Е.В. Гераськина, В.В. Цукерман // Математическое образование, 2002. – № 4. – с. 76 – 89.
7. Задания для подготовки к выпускному экзамену по алгебре и началам анализа: Кн. для учащихся 11 кл. общеобразоват. учреждений / Е.А. Семенко и др. – М., Просвещение, 2001. – 190 с.
8. Звавич Л.И. Алгебра и начала анализа. 8 – 11 кл.: Пособие для школ и классов с углубл. изучением математики / Л.И. Звавич и др. – М., Дрофа, 1999. – 352 с.: ил.
9. Зив Б.Г. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса / Б.Г. Зив, В.А. Гольдич. – СПб., «ЧеРо-на-Неве», 2003. – 96 с.
10. Колмогоров А.Н. Современная математика и математика в современной школе / А.Н. Колмогоров // Математика в школе, 1971. – № 6 – с. 3 – 5.
11. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание / Л.Д. Кудрявцев. – М., Наука, 1985. – 170 с.

12. Кузнецова И.В. Элементы высшей алгебры и методика их изучения на факультативных занятиях в средней школе: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / И.В. Кузнецова. М., 2000. – 136 с.
13. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики: концептуальная методика, рекомендации, советы, замечания. Обучение через задачи / А.Г. Мордкович. – М., Школа-Пресс, 1999. – 272 с.
14. Мышкис А.Д. О прикладной направленности школьного курса элементов математического анализа / А.Д. Мышкис // Математика в школе, 1990. – № 6. – с. 7 – 11.
15. Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2-х т. / С.М. Никольский. – М., Наука, 1983. – Т. 1. – 484 с.
16. Ованесов Н.Г. Основные понятия математического анализа и методика их изучения в средней школе и педагогическом институте / Н.Г. Ованесов. – Астрахань, 1969. – 157 с.
17. Цукерман В.В. Математический анализ и общее среднее образование / В.В. Цукерман // Математика в школе. – 1996. – № 3 – с. 33 – 34.
18. Интернет ресурс ФИПИ http://old.fipi.ru/view/sections/228/docs/
19. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 – 11 классы. 10-е издание Москва 2009
20. Интернет ресурс http://sci-lib.com/mathematics
21. ФГОС: http://standart.edu.ru
22. Официальный информационный портал Единого государственного экзамена: http://ege.edu.ru/
23. Никольский и др. Алгебра и начала анализа: учебн. для 10 класса. / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: просвещение, 2007. – 432 с.
24. Никольский и др. Алгебра и начала анализа: учебн. для 11 класса. / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: просвещение, 2007. – 448 с.

Заключительный лист

Подпись автора_______________________

Дата_________________________________

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент: Лукоянова М.А., кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры математической лингвистики и информационных систем в филологии Института филологии и межкультурной коммуникации

Заведующий кафедрой ____________________

Дата ____________________________________

Защита в ГАК

с оценкой «__________________»

Дата _______________

Секретарь ГАК ________