КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Л. Ларионов

Электростатика и магнитостатика
Учебно-методическое пособие по электродинамике

КАЗАНЬ 2017

УДК 537.1 (072)
ББК 22.313я7
Л25

Принято на заседании Учебно-методической комиссии
Института физики КФУ.
Протокол №8 от 30 июня 2017 года.

Принято на заседании кафедры теоретической физики.
Протокол №8 от 12 апреля 2017 года.

Рецензент: зав. кафедрой высшей математики Казанского
научно-исследовательского технологического университета,
доктор физ.-мат. наук, проф. В.А. Жихарев

Научный редактор: зав. кафедрой теоретической физики КФУ,
доктор физ.-мат. наук, проф. Ю.Н. Прошин

Л25 **Ларионов А.Л.**
Электростатика и магнитостатика. Учебно-методическое пособие по электродинамике / А.Л. Ларионов. – Казань: Казан. ун-т, 2017. – 44 с.

Учебно-методическое пособие по электродинамике содержит условия задач по электростатике и магнитостатике и предназначено для студентов Института физики КФУ.

Введение

Существующие сборники задач по классической электродинамике (например, [1,2]) содержат задачи различной степени сложности, охватывающие все её разделы. Кроме этого, задачи по электродинамике с решениями приведены в соответствующих томах курса теоретической физики [3,4], а также в пособиях, подобных [5]. Однако при проведении практических занятий по электродинамике ощущается недостаток задач, которые могут быть предложены студентам в качестве контрольных заданий. Для достаточно объективной и справедливой оценки работы студентов в распоряжении преподавателя должен иметься достаточно широкий круг типичных задач, близких по тематике и сложности, образцы решений которых он может заранее представить на аудиторных занятиях.

Настоящее учебно-методическое пособие содержит, в частности, условия задач по микроскопической и макроскопической электростатике и магнитостатике, среди которых есть группы задач, однотипных и близких по сложности. Представленные в пособии задачи разделены на четыре части. В первой части пособия приведены условия математических заданий по векторному и тензорному анализу, активно использующемуся в классической электродинамике. Полученные в результате выполнения этих заданий соотношения необходимы для решения задач по собственно электродинамике и для понимания лекционного материала. Математические задания по векторному и тензорному анализу взяты в основном из [1]. Во второй части пособия приведены, в частности, условия нескольких групп однотипных задач по микроскопической электростатике, часть образцов которых заимствована из [1], как и условия задач третьей части пособия по макроскопической электростатике (электростатике диэлектриков и проводников). В четвёртой части пособия объединены задачи по микроскопической и макроскопической магнитостатике, поскольку в последней рассматриваются однородные и изотропные в магнитном отношении среды. В этой части также сгруппированы однотипные задачи, часть образцов которых заимствована из [1] и [2]. В значительной части задач по микроскопической электростатике и магнитостатике предлагается рассмотреть системы с наиболее высокой симметрией – сферической и аксиальной - с тем, чтобы при решении задач можно было использовать соображения симметрии.

1. Векторное и тензорное исчисление

1.1. Доказать, что набор частных производных от компонент одного вектора по компонентам другого вектора образует тензор второго ранга.

1.2. Доказать, что набор символов Кронекера, индексами у которых являются номера координатных осей, образует тензор второго ранга.

1.3. Доказать, что набор парных произведений компонент двух векторов образует тензор второго ранга.

1.4. Доказать, что сумма диагональных компонент тензора второго ранга (след тензора) инвариантна относительно поворотов координатных осей.

1.5. Показать, что антисимметричный тензор второго ранга дуален вектору, то есть компоненты антисимметричного тензора второго ранга при вращениях преобразуются, как компоненты вектора.

1.6. Доказать, что набор объёмных интегралов от парных произведений декартовых компонент радиуса-вектора образует тензор второго ранга.

1.7. Составить матрицу преобразований компонент вектора при повороте декартовой системы координат на угол α вокруг оси z.

1.8. Составить матрицы преобразований базисных ортов при переходе от декартовых координат к сферическим и от сферических координат к декартовым.

1.9. Составить матрицы преобразований базисных ортов при переходе от декартовых координат к цилиндрическим и от цилиндрических координат к декартовым.

1.10. Доказать, что при поворотах координатных осей или отражениях чётного числа координатных осей определитель матрицы преобразования равен $+1$, а при отражениях нечётного числа координатных осей этот определитель равен -1.

1.11. Показать, что матрица преобразования базиса координатной системы при отражении или повороте и матрица преобразования компонент вектора совпадают.

1.12. Доказать, что если в каждой системе координат справедливы равенства $A_i = \sum_j T_{ij} B_j$ и T_{ij} - компоненты тензора второго ранга, а B_j - компоненты вектора, то A_i - тоже компоненты вектора.

1.13. Для трёхмерного тензора второго ранга T_{ij} доказать теорему Остроградского-Гаусса: $\iiint\limits_V \sum_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dV = \oiint\limits_S \sum_i T_{ij} dS_i$. Воспользоваться теоремой Остроградского-Гаусса для вектора $A_i = \sum_j T_{ij} B_j$, где B_j - произвольный постоянный вектор.

1.14. Найти косинус угла между двумя единичными векторами $\vec{n}$ и $\vec{n}\,'$, определёнными в сферической системе координат углами ϑ, α и ϑ', α' соответственно.

1.15. Показать, что симметрия тензора второго ранга есть свойство, инвариантное относительно вращений. То есть тензор, симметричный (антисимметричный) в некоторой системе координат, остаётся симметричным (антисимметричным) во всех системах координат, повёрнутых относительно исходной системы координат.

1.16. Найти компоненты тензора T_{ij}^{-1}, обратного тензору T_{ij}. Рассмотреть, в частности, случай, когда T_{ij} является симметричным тензором, заданным в главных осях.

1.17. Во всех системах координат компоненты вектора A_i линейно выражаются через компоненты вектора B_j: $A_i = \sum_j T_{ij} B_j$. Доказать, что совокупность величин T_{ij} образует тензор второго ранга. Точнее, T_{ij} является тензором, если A_i и B_j - оба полярные векторы или аксиальные векторы (псевдовекторы), и псевдотензором, если один из векторов – полярный, а другой – аксиальный вектор (псевдовектор).

1.18. Доказать, что если $\hat{\alpha}$ - ортогональная матрица преобразования, то при её транспонировании получается матрица обратного преобразования.

1.19. Показать, что совокупность величин $\sum_{i,j=1}^{3} C_{ijk} T_{ij}$, где C_{ijk} - тензор третьего ранга, а T_{ij} - тензор второго ранга, является вектором.

1.20. Во всех декартовых системах координат задана совокупность величин e_{ijk}, обладающих следующими свойствами: при перестановке двух любых индексов e_{ijk} меняет знак, а $e_{123} = 1$. Показать, что эта совокупность e_{ijk} образует псевдотензор третьего ранга (совершенно или абсолютно антисимметричный псевдотензор третьего ранга).

1.21. Записать выражения для компонент векторного произведения двух векторов с помощью единичного антисимметричного тензора e_{ijk}.

1.22. Записать выражения для компонент ротора вектора с помощью единичного антисимметричного тензора e_{ijk}.

1.23. Доказать равенство $\sum\limits_{j,k=1}^{3} e_{ijk} e_{jkl} = 2\delta_{il}$.

1.24. Доказать равенство $\sum\limits_{,k=1}^{3} e_{ijk} e_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

1.25. Показать, что: единственным вектором, все компоненты которого одинаковы во всех системах координат, является нулевой вектор; всякий тензор второго ранга, все компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален δ_{ij}; всякий тензор третьего ранга, все компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален e_{ijk}; всякий тензор четвёртого ранга, все компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален $(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

1.26. Усреднить значения компонент единичного вектора $\vec{n}$ и их произведений ($\widetilde{n_i}$, $\widetilde{n_i n_j}$, $\widetilde{n_i n_j n_k}$, $\widetilde{n_i n_j n_k n_l}$) по всем направлениям вектора $\vec{n}$. Считать, что все направления вектора $\vec{n}$ в пространстве равновероятны. Использовать прямое вычисление соответствующих интегралов и трансформационные свойства искомых величин.

1.27. Найти усреднённые по всем направлениям вектора $\vec{n}$ значения следующих выражений: $\widetilde{(\vec{a}\cdot\vec{n})^2}$, $\widetilde{(\vec{a}\cdot\vec{n})(\vec{b}\cdot\vec{n})}$, $\widetilde{(\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}}$, $\widetilde{[\vec{a}\times\vec{n}]^2}$,

$\overline{([\vec{a}\times\vec{n}]\cdot[\vec{b}\times\vec{n}])}$, $\overline{(\vec{a}\vec{n})(\vec{b}\vec{n})(\vec{c}\vec{n})(\vec{d}\vec{n})}$ если $\vec{n}$ - единичный вектор, все направления которого в пространстве равновероятны, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ - постоянные векторы.

1.28. Воспользовавшись декартовыми, цилиндрическими и сферическими координатами, вычислить $\operatorname{div}\vec{r}$, $\operatorname{rot}\vec{r}$, $\operatorname{grad}(\vec{l}\cdot\vec{r})$, $(\vec{l}\nabla)\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор, $\vec{l}$ - постоянный вектор.

1.29. Выполняя вычисления в декартовых, цилиндрических и сферических координатах, найти $\operatorname{rot}[\vec{l}\times\vec{r}]$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор, $\vec{l}$ - постоянный вектор, направленный вдоль положительного направления оси z.

1.30. Доказать тождества:

а) $\operatorname{grad}(\varphi\cdot\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi$;

б) $\operatorname{div}(\varphi\vec{A})=\varphi\operatorname{div}\vec{A}+(\vec{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi)$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\vec{A})=\varphi\operatorname{rot}\vec{A}-[\vec{A}\times\operatorname{grad}\varphi]$;

г) $\operatorname{div}[\vec{A}\times\vec{B}]=(\vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A})-(\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B})$;

д) $\operatorname{rot}[\vec{A}\times\vec{B}]=\vec{A}\operatorname{div}\vec{B}-\vec{B}\operatorname{div}\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$;

е) $\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B})=[\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B}]+[\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}]+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$.

1.31. Доказать тождества:

а) $(\vec{C}\cdot\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}))=(\vec{A}\cdot(\vec{C}\cdot\nabla)\vec{B})+(\vec{B}\cdot(\vec{C}\cdot\nabla)\vec{A})$;

б) $(\vec{C}\cdot\nabla)[\vec{A}\times\vec{B}]=[\vec{A}\times(\vec{C}\cdot\nabla)\vec{B}]-[\vec{B}\times(\vec{C}\cdot\nabla)\vec{A}]$;

в) $(\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}\operatorname{div}\vec{A}$;

г) $([\vec{A}\times\vec{B}]\cdot\operatorname{rot}\vec{C})=(\vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{C})-(\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{C})$;

д) $[[\vec{A}\times\nabla]\times\vec{B}]=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+[\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B}]-\vec{A}\operatorname{div}\vec{B}$;

е) $[[\nabla\times\vec{A}]\times\vec{B}]=\vec{A}\operatorname{div}\vec{B}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}-[\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B}]-[\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}]$.

1.32. Вычислить $\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$, $\operatorname{div}\varphi(\vec{r})\vec{r}$, $\operatorname{rot}\varphi(\vec{r})\vec{r}$, $(\vec{l}\cdot\nabla)\varphi(\vec{r})\vec{r}$.

1.33. Вычислить дивергенции и роторы следующих векторов: $(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{b}$, $(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}$, $[\vec{a}\times\vec{r}]$, $\varphi(\vec{r})[\vec{a}\times\vec{r}]$, $[\vec{r}\times[\vec{a}\times\vec{r}]]$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы.

1.34. Вычислить $\operatorname{grad}(\vec{A}(r)\cdot\vec{r})$, $\operatorname{grad}(\vec{A}(r)\cdot\vec{B}(r))$, $\operatorname{div}\{\varphi(r)\vec{A}(r)\}$, $\operatorname{rot}\{\varphi(r)\vec{A}(r)\}$ и $(\vec{l}\nabla)\{\varphi(r)\vec{A}(r)\}$.

1.35. Найти функцию $\varphi(r)$, удовлетворяющую условию $\operatorname{div}\{\varphi(r)\vec{r}\}=0$.

1.36. Вычислить $\operatorname{rot}\left([\vec{m}\times\vec{r}]/r^3\right)$ и $-\operatorname{grad}\left((\vec{p}\cdot\vec{r})/r^3\right)$, где $\vec{p}$ и $\vec{m}$ - постоянные векторы. Найти векторные линии для полученных векторных полей.

1.37. Вычислить проекции вектора $\Delta\vec{A}$ на оси сферической системы координат, воспользовавшись тождеством $\Delta\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$.

1.38. Вычислить проекции вектора $\Delta\vec{A}$ на оси цилиндрической системы координат, воспользовавшись тождеством $\Delta\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$.

1.39. Интеграл по объёму $\iiint\limits_V(\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})\cdot\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}))dV$ преобразовать в интеграл по поверхности.

1.40. Вычислить интегралы $\oiint\limits_S \vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{n})dS$ и $\oiint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{n}dS$, где $\vec{a}$ - постоянный вектор, $\vec{n}$ - орт внешней нормали к замкнутой поверхности S.

1.41. Интегралы по замкнутой поверхности $\oiint\limits_S \varphi(\vec{r})\vec{n}dS$, $\oiint\limits_S [\vec{a}(\vec{r})\times\vec{n}]dS$, $\oiint\limits_S \vec{a}(\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{n})dS$, где $\vec{b}$ - постоянный вектор, $\vec{n}$ - орт внешней нормали к замкнутой поверхности S, преобразовать в интегралы по объёму, заключённому внутри поверхности S.

1.42. Воспользовавшись первым из тождеств, доказанным при решении предыдущей задачи, вывести закон Архимеда, суммируя давления, приложенные к элементам поверхности погруженного в жидкость тела.

1.43. Интеграл по контуру $\oint\limits_l \varphi(\vec{r})d\vec{l}$ преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур.

1.44. Внутри объёма V вектор $\vec{A}(\vec{r})$ удовлетворяет условию $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})=0$, а на границе объёма – замкнутой поверхности S – условию $(\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{n})=0$ ($\vec{n}$ - орт внешней нормали к замкнутой поверхности S). Доказать, что $\iiint\limits_V \vec{A}(\vec{r})dV=0$.

2. Микроскопическая электростатика

2.1. Бесконечный цилиндр с радиусом основания R заряжен равномерно по объёму, причём заряд единицы длины цилиндра равен

κ. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне цилиндра; представить результаты графически. Вычислить энергию электрического поля, локализованную внутри фрагмента цилиндра длины h, и энергию электрического поля вне цилиндра в слое толщины h. Вывести формулу для электрической энергии очень длинного цилиндра длины $h \gg R$ с логарифмической точностью.

2.2. Бесконечный цилиндр заряжен по объёму с плотностью $\rho(r_\perp) = \rho_0 \exp\left(r_\perp / a\right)$ ($r_\perp$ - расстояние от оси цилиндра). Радиус основания цилиндра R, заряд единицы длины цилиндра κ. Выразить ρ_0 через a, κ и R. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне цилиндра, а также энергию электрического поля, локализованную внутри фрагмента цилиндра длины h.

2.3. Бесконечный цилиндр заряжен по объёму с плотностью $\rho(r_\perp) = \alpha_n r_\perp^n$ ($r_\perp$ - расстояние от оси цилиндра). Радиус основания цилиндра R, заряд единицы длины цилиндра κ. Выразить a_n через κ, n и R. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне цилиндра, а также энергию электрического поля, локализованную внутри фрагмента цилиндра длины h.

2.4. Бесконечный цилиндр с радиусом основания R заряжен равномерно по поверхности, причём заряд единицы длины цилиндра равен κ. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне цилиндра; представить результаты графически. Используя граничное соотношение для нормальных компонент напряжённости электрического поля, получить поверхностную плотность заряда на боковой поверхности цилиндра. Вычислить энергию электрического поля, локализованную внутри фрагмента цилиндра длины h, и энергию электрического поля вне цилиндра в слое толщины h. Вывести формулу для электрической энергии очень длинного цилиндра длины $h \gg R$ с логарифмической точностью.

2.5. Шар радиуса R, полный заряд которого равен q, заряжен равномерно по объёму. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара; представить результаты графически. Найти электрическую энергию заряженного шара. Вычислить циклическую частоту малых колебаний точечного заряда $-q$ с массой M, помещённого внутрь шара.

2.6. Шар радиуса R, полный заряд которого равен q, заряжен по объёму с плотностью $\rho(r) = a_n r^n$ (r - расстояние от центра шара). Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, а также электрическую энергию шара, выразив a_n через q, n и R.

2.7. Шар радиуса R, полный заряд которого равен q, заряжен по объёму с плотностью $\rho(r) = \rho_0 \exp(-br)$ (r - расстояние от центра шара). Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, а также электрическую энергию шара, выразив ρ_0 через q, b и R.

2.8. Шар радиуса R, полный заряд которого равен q, заряжен равномерно по поверхности. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара; представить результаты графически. Найти электрическую энергию заряженного шара. Используя граничное соотношение для нормальных компонент напряжённости электрического поля, получить поверхностную плотность заряда на шаре.

2.9. Внутри шара радиуса R, равномерно заряженного по объёму с объёмной плотностью заряда ρ_0, имеется шарообразная незаряженная полость радиуса R_1, центр которой отстоит от центра шара на расстояние L $(L \le R + R_1)$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля в полости.

2.10. Бесконечная плоская плита толщиной $2a$ $(-a \le z \le +a)$ равномерно заряжена по объёму с объёмной плотностью ρ_0. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне плиты.

2.11. Заряд распределён в пространстве по периодическому закону $\rho(\vec{r}) = \rho_0 \cos(\alpha x)\cos(\beta y)\cos(\gamma z)$ $(-\infty < x, y, z < +\infty)$, где $\rho_0, \alpha, \beta, \gamma$ - постоянные, образуя бесконечную периодическую пространственную решётку. Найти потенциал и напряжённость электрического поля.

2.12. Плоскость $z = 0$ заряжена с поверхностной плотностью заряда, меняющейся по закону $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos(\alpha x)\cos(\beta y)$ $(-\infty < x, y < +\infty)$, где σ_0, α, β - постоянные. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого заряженной плоскостью во всём пространстве.

2.13. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженным прямолинейным отрезком длины $2L$, занимающим часть оси z $(-L \le z \le L)$ и имеющим заряд q.

2.14. Заряд распределён в пространстве сферически-симметричным образом с объёмной плотностью заряда $\rho(r)$, где r – расстояние от центра симметрии $(0 \le r < \infty)$. Разбив распределение заряда на сферические слои, записать через однократные интегралы по r

потенциал и напряжённость электрического поля во всём пространстве.

2.15. Заряд электрона распределён в атоме водорода, находящемся в основном состоянии – состоянии с наименьшей энергией, с объёмной плотностью $\rho(r) = -\left(e/\pi a_B^3\right)\exp\left(-2r/a_B\right)$, где $a_B = 0,529717 \times 10^{-8}$ см – радиус Бора, $(-e)$ - заряд электрона. Найти потенциалы и напряжённости полей, создаваемых электронным облаком и атомом водорода в целом.

2.16. Найти энергию взаимодействия электронного облака и ядра атома водорода. Атом водорода находится в основном состоянии - состоянии с наименьшей энергией, в котором электронная оболочка имеет объёмную плотность заряда $\rho(r) = -\left(e/\pi a_B^3\right)\exp\left(-2r/a_B\right)$, где $a_B = 0,529717 \times 10^{-8}$ см – радиус Бора, $(-e)$ - заряд электрона.

2.17. Вычислить электронную поляризуемость атома водорода, находящегося в слабом электрическом поле, пренебрегая деформацией электронного облака. Плотность заряда электронного облака атома водорода, находящегося в основном состоянии – состоянии с наименьшей энергией, равна $\rho(r) = -\left(e/\pi a_B^3\right)\exp\left(-2r/a_B\right)$, где $a_B = 0,529717 \times 10^{-8}$ см – радиус Бора, $(-e)$ - заряд электрона.

2.18. Вычислить электронную поляризуемость атома, находящегося в слабом электрическом поле, пренебрегая деформацией электронного облака из Z электронов и предполагая, что электронное облако имеет постоянную плотность внутри сферы радиуса a.

2.19. Предполагая, что плотности зарядов электронных облаков обоих электронов атома гелия имеют вид $\rho(r) = -\left(8e/\pi a_B^3\right)\exp\left(-4r/a_B\right)$, где $a_B = 0,529717 \times 10^{-8}$ см – радиус Бора, $(-e)$ - заряд электрона, найти энергии взаимодействия электронов друг с другом и с ядром в атоме гелия.

2.20. Найти силу и момент сил, приложенные к электрическому диполю с моментом $\vec{p}$ в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом q.

2.21. Диполь с моментом $\vec{p}_1$ находится в точке, совпадающей с концом радиуса–вектора $\vec{r}_1$, а диполь с моментом $\vec{p}_2$ находится в точке, совпадающей с концом радиуса–вектора $\vec{r}_2$. Найти энергию взаимодействия этих диполей и в векторном виде силу, действующую со стороны одного диполя на другой диполь.

2.22. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженным круглым тонким диском радиуса R на его оси. Заряд диска q. Рассмотреть потенциал и напряжённость поля на больших расстояниях от диска. Убедиться в том, что на поверхности диска нормальная компонента напряжённости электрического поля испытывает скачок, равный $4\pi \cdot \sigma = 4q / R^2$.

2.23. Тонкое круглое кольцо радиуса R состоит из двух равномерно и противоположно заряженных полуколец с зарядами q и $-q$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля на оси кольца и вблизи неё. Каков характер электрического поля на больших расстояниях от кольца?

2.24. Сфера радиуса R заряжена по закону $\sigma = \sigma_0 \cos\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне сферы, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.25. Сфера радиуса R заряжена по закону $\sigma = \sigma_0 \sin\vartheta \cos\alpha$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне сферы, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.26. Сфера радиуса R заряжена по закону $\sigma = \sigma_0 \sin\vartheta \sin\alpha$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне сферы, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.27. Сфера радиуса R заряжена по закону $\sigma = \sigma_0 \cos^2\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне сферы, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.28. Сфера радиуса R заряжена по закону $\sigma = \sigma_0 \sin^2\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне сферы, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.29. Сфера радиуса R заряжена по закону $\sigma = \sigma_0 (3\cos^2\vartheta - 1)$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне сферы, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.30. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \rho_0 \cos\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.31. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \rho_0 \sin\vartheta \cos\alpha$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.32. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \rho_0 \sin\vartheta \sin\alpha$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.33. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \rho_0 \cos^2\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.34. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \rho_0 \sin^2\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.35. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \rho_0 (3\cos^2\vartheta - 1)$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.36. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \alpha_n r^n \cos\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.37. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \alpha_n r^n \sin\vartheta \cos\alpha$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.38. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \alpha_n r^n \sin\vartheta \sin\alpha$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.39. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \alpha_n r^n \cos^2\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.40. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \alpha_n r^n \sin^2\vartheta$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.41. Шар радиуса R заряжен по закону $\rho = \alpha_n r^n (3\cos^2\vartheta - 1)$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара, используя разложение потенциала по мультиполям в сферических координатах.

2.42. Шар радиуса R равномерно поляризован, дипольный момент единицы объёма шара равен $\vec{P}$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля внутри и вне шара.

2.43. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$ заряжено по закону $\rho(r) = \alpha_n / r^n$, $(n > 0)$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля во всём пространстве, а также энергию электрического поля и полный заряд q пространства между сферами. Результаты выразить через q, R_1, R_2, n.

2.44. Эллипсоид с полуосями a, b, c равномерно заряжен по объёму. Полный заряд эллипсоида равен q. Найти потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого эллипсоидом на больших расстояниях r от его центра $(r \gg a, b, c)$ с точностью до квадрупольных вкладов. Рассмотреть частные случаи: сплюснутый $(a = b > c)$ и вытянутый $(a = b < c)$ эллипсоиды вращения, а также шар $(a = b = c)$.

2.45. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженным по объёму цилиндром радиуса R и высоты h. Полный заряд цилиндра q. Полярную ось направить вдоль оси цилиндра.

2.46. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженным только по боковой поверхности цилиндром радиуса R и высоты h. Полный заряд цилиндра q. Полярную ось направить вдоль оси цилиндра.

2.47. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженным по всей поверхности цилиндром радиуса R и высоты h.

Полный заряд цилиндра q. Полярную ось направить вдоль оси цилиндра.

2.48. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого цилиндром радиуса R и высоты h, заряженным по объёму с плотностью $\rho(r_\perp) = \alpha_n r_\perp^n$ ($r_\perp$ - расстояние от оси цилиндра). Полный заряд цилиндра q. Полярную ось направить вдоль оси цилиндра.

2.49. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженным кругом радиуса R, расположенным в плоскости $z = 0$. Начало координат находится в центре круга. Полный заряд круга равен q. Полярную ось направить вдоль оси z.

2.50. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого кругом радиуса R. Начало координат находится в центре круга. Круг расположен в плоскости $z = 0$ и заряжен по закону $\sigma(r_\perp) = \alpha_n r_\perp^n$ ($r_\perp$ - расстояние от центра круга). Полный заряд круга равен q.

2.51. Два электрических заряда находятся на оси z. Заряд q_1 находится в точке z_1, а заряд q_2 находится в точке z_2. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого зарядами на больших расстояниях от них, с точностью до квадрупольных вкладов.

2.52. Три электрических заряда находятся на оси z. Заряд q_1 находится в точке z_1, заряд q_2 находится в точке z_2, а заряд q_3 - в точке z_3. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого этой системой зарядов на больших расстояниях, с точностью до квадрупольных вкладов.

2.53. Пять электрических зарядов находятся на оси z. Заряд q_1 находится в точке $z_1 = 0$, два заряда $q_2 = q_3$ находятся в точках $z_{2,3} = \pm a$, и два заряда $q_4 = q_5$ - в точках $z_{4,5} = \pm(a+b)$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого этой системой зарядов на больших расстояниях, с точностью до квадрупольных вкладов.

2.54. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженным по объёму полушарием радиуса R. Полный заряд полушария равен q. Полярную ось (ось z) направить вдоль оси симметрии полушария.

2.55. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого заряженным по закону $\rho(\vartheta) = \rho_0 \cos\vartheta$ полушарием радиуса R. Полный заряд полушария q выразить через ρ_0. Полярную ось (ось z) направить вдоль оси симметрии полушария.

2.56. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого заряженным по закону $\rho(\vartheta) = \rho_0 \sin\vartheta$ полушарием радиуса R. Полный заряд полушария q выразить через ρ_0. Полярную ось (ось z) направить вдоль оси симметрии полушария.

2.57. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженной полусферой радиуса R, основание которой -

незаряженный круг - расположено в плоскости $z = 0$. Начало координат находится в центре круга. Полный заряд полусферы равен q.

2.58. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого заряженной полусферой радиуса R, основание которой – заряженный круг - расположено в плоскости $z = 0$. Начало координат находится в центре круга. Полный заряд q равномерно распределён по полусфере и кругу.

2.59. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого заряженной по закону $\sigma = \sigma_0 \cos\vartheta$ полусферой радиуса R, где угол ϑ отсчитывается от оси симметрии полусферы, основание которой – заряженный круг - расположено в плоскости $z = 0$. Начало координат находится в центре круга.

2.60. Вычислить с точностью до квадрупольных вкладов потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого заряженной по закону $\sigma = \sigma_0 \sin\vartheta$ полусферой радиуса R, где угол ϑ отсчитывается от оси симметрии полусферы, основание которой – заряженный круг - расположено в плоскости $z = 0$. Начало координат находится в центре круга.

2.61. Объёмная плотность заряда сферически-симметричного электронного облака атома имеет вид: $\rho(r) = -c_2 \exp(-\alpha_2 r^2)$ $(0 \le r < \infty)$. Вычислить поляризуемость атома, пренебрегая деформацией электронного облака, выразив константу c_2 через полный заряд электронного облака q и α_2.

2.62. Объёмная плотность заряда сферически-симметричного электронного облака атома имеет вид: $\rho(r) = -c_3 \exp(-\alpha_3 r^3)$ $(0 \le r < \infty)$. Вычислить поляризуемость атома, пренебрегая деформацией электронного облака, выразив константу c_3 через полный заряд электронного облака q и α_3.

2.63. В некотором приближении можно считать, что объёмные плотности зарядов каждого из обоих электронных облаков в атоме гелия равны $\rho(r) = -\left(ek^3 / \pi a_B^3\right)\exp\left(-2kr/a_B\right)$. Найти энергию атома гелия в этом приближении. Рассмотреть, в частности, вариант с $k = 2$.

2.64. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого на больших расстояниях плоским квадруполем – зарядами $\pm q$, расположенными в вершинах квадрата со стороной b так, что соседние заряды имеют разные знаки, причём в начале координат находится заряд $+q$, а стороны квадрата параллельны осям x и y.

2.65. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого на больших расстояниях плоским квадруполем – зарядами $\pm q$, расположенными в вершинах квадрата со стороной b и началом координат в его центре так, что соседние заряды имеют разные знаки, причём заряды $+q$ находятся в первом и третьем квадрантах, а стороны квадрата параллельны осям x и y.

2.66. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого на больших расстояниях плоским квадруполем – зарядами $\pm q$, расположенными в вершинах квадрата со стороной b и началом координат в его центре так, что соседние заряды имеют разные знаки, причём заряды $+q$ находятся во втором и четвёртом квадрантах, а стороны квадрата параллельны осям x и y.

2.67. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого на больших расстояниях плоским квадруполем – зарядами $\pm q$, расположенными в вершинах квадрата со стороной b и началом координат в его центре так, что соседние заряды имеют разные знаки, причём заряды $+q$ находятся на оси x, а заряды $-q$ находятся на оси y.

2.68. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, создаваемого на больших расстояниях плоским квадруполем – зарядами $\pm q$, расположенными в вершинах квадрата со стороной b и началом координат в его центре так, что соседние заряды имеют разные знаки, причём заряды $+q$ находятся на оси y, а заряды $-q$ находятся на оси x.

3. Электростатика диэлектриков и проводников

3.1. Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти потенциал, напряжённость и индукцию электрического поля во всём пространстве.

3.2. От прямой, на которой находится точечный заряд q, веерообразно расходятся три полуплоскости, образующие три двугранных угла $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi)$. Пространство внутри каждого из двугранных углов заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью соответственно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Найти потенциал, напряжённость и индукцию электрического поля во всём пространстве.

3.3. От прямой, на которой находится точечный заряд q, веерообразно расходятся N полуплоскостей, образующих N двугранных углов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ $(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 2\pi)$. Пространство внутри каждого из двугранных углов заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, соответственно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N$. Найти потенциал, напряжённость и индукцию электрического поля во всём пространстве.

3.4. Центр проводящего шара, заряд которого равен q, находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти потенциал и напряжённость электрического поля во всём пространстве, а также распределение поверхностных зарядов на шаре и в диэлектрике.

3.5. Пространство между обкладками сферического конденсатора частично заполнено диэлектриком, расположенным внутри телесного угла с вершиной в центре обкладок. Радиусы обкладок конденсатора равны a и b, диэлектрическая проницаемость диэлектрика равна ε. Найти ёмкость конденсатора.

3.6. Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b диэлектрическая проницаемость диэлектрика меняется по закону $\varepsilon(r) = \varepsilon_1 (a \le r \le c)$, $\varepsilon(r) = \varepsilon_2 (c < r \le b)$, где $a < c < b$. Найти ёмкость конденсатора, распределение связанных поверхностных зарядов на всех поверхностях диэлектрика, и полный связанный заряд диэлектрика.

3.7. Точечный заряд q находится в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε на расстоянии a от плоской границы бесконечно протяжённого проводника, занимающего полупространство $z \le 0$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля в диэлектрике, распределения свободных зарядов на поверхности проводника и связанных зарядов на поверхности диэлектрика, полный поверхностный заряд, а также энергию электростатического взаимодействия заряда q с поверхностным зарядом и силу, с которой поверхностный заряд действует на заряд q.

3.8. Точечный заряд q находится в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε_1 на расстоянии a от плоской границы с другим бесконечно протяжённым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_2, занимающим полупространство $z \le 0$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля в обоих диэлектриках, распределения свободных зарядов на их поверхностях, полный поверхностный заряд, а также энергию электростатического взаимодействия заряда q с поверхностным зарядом и силу, с которой поверхностный заряд действует на заряд q. Какой результат получится при $q_2 \to \infty$?

3.9. Два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 заполняют всё пространство, соприкасаясь вдоль бесконечной плоскости. Два заряда q_1 и q_2 находятся на прямой, перпендикулярной к этой плоскости, на равных расстояниях по разные стороны от неё. Найти силы, действующие на каждый из этих зарядов. Чем объясняется неравенство этих сил?

3.10. Двугранный угол между двумя заземлёнными проводящими полуплоскостями равен α_0. Внутри угла находится точечный заряд q. Методом электрических изображений найти потенциал электрического поля внутри двугранного угла α_0. Рассмотреть случаи $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$.

3.11. Электрический диполь с дипольным моментом $\vec{p}$ находится в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε вблизи плоской границы проводника, занимающего полупространство с $z \le 0$. Найти энергию электрического взаимодействия диполя с индуцированными им зарядами, силу и вращательный момент, приложенные к диполю.

3.12. Незаряженный проводящий шар радиуса R вносится в газообразный однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε, находящийся в электрическом поле. В отсутствие проводящего шара напряжённость однородного электрического поля в диэлектрике была равна $\vec{E}_0$. Найти потенциал и напряжённость результирующего электрического поля в диэлектрике, а также плотности свободных зарядов на поверхности шара и связанных зарядов на поверхности диэлектрика, окружающей шар.

3.13. Однородный диэлектрический шар радиуса R с диэлектрической проницаемостью ε_1 вносится в однородный неограниченный газообразный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_2, находящийся в электрическом поле. В отсутствие диэлектрического шара напряжённость однородного электрического поля в неограниченном диэлектрике была равна $\vec{E}_0$. Найти потенциал и напряжённость электрического поля во всём пространстве. Найти распределение связанных зарядов на поверхности диэлектрического шара и на поверхности окружающего его диэлектрика. Рассмотреть результаты при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

3.14. Проводящий шар радиуса R находится в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом q, расположенным на расстоянии a от центра шара $(a > R)$. Система погружена в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Найти потенциал и напряжённость электрического поля, распределение индуцированных свободных зарядов на поверхности шара и связанных зарядов на поверхности окружающего его диэлектрика, если задан:
а) потенциал на поверхности шара $\varphi(R)$ (на бесконечном расстоянии от центра шара потенциал $\varphi(\infty) = 0$);
б) заряд шара Q. Потенциал электрического поля системы представить в виде суммы потенциалов нескольких точечных зарядов-изображений.

3.15. Заземлённая проводящая плоскость имеет выступ в виде полусферы радиуса R, центр которой лежит на проводящей плоскости. На оси симметрии системы находится точечный электрический заряд q, отстоящий от плоскости на расстояние $a > R$. Используя метод изображений, найти потенциал и напряжённость электрического поля над плоскостью, а также заряд, индуцированный на выступе.

3.16. Изолированная металлическая сфера радиуса a находится внутри полой металлической сферы радиуса b. Расстояние между центрами сфер равно c, причём $c \ll a$, $c \ll b$. Полный заряд внутренней сферы равен q. Определить распределение поверхностного заряда на внутренней сфере и действующую на неё силу с точностью до линейных по c вкладов.

3.17. Сферический конденсатор образован двумя неконцентрическими сферами радиусов a и b, причём сфера радиуса a находится внутри сферы радиуса b. Расстояние между центрами сфер равно c, причём $c \ll a$, $c \ll b$. Вычислить поправку к ёмкости конденсатора, обусловленную отклонением от неконцентричности в первом неисчезающем приближении.

3.18. Точечный электрический заряд q находится на расстоянии a от центра заземлённого проводящего шара радиуса $R < a$. Система помещена в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Найти энергию электрического взаимодействия заряда с проводящим шаром и силу, с которой проводящий шар действует на заряд q.

3.19. Точечный электрический заряд q находится на расстоянии a от центра изолированного заземлённого проводящего шара радиуса $R < a$. Система помещена в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Заряд сферы равен Q. Найти энергию электрического взаимодействия заряда с проводящим шаром и силу, с которой проводящий шар действует на заряд q.

3.20. Найти потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом в однородной анизотропной среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости ε_{ij}.

3.21. С помощью соотношения взаимности Грина доказать симметричность матриц потенциальных и ёмкостных коэффициентов.

3.22. Выразить потенциальные коэффициенты через ёмкостные коэффициенты для системы из двух проводников.

3.23. Выразить потенциальные коэффициенты через ёмкостные коэффициенты для системы из трёх проводников.

3.24. Ёмкости двух уединенных проводников равны C_1 и C_2. Проводники находятся в вакууме на расстоянии r, большом по сравнению с их собственными линейными размерами. Определить потенциальные коэффициенты системы проводников с точностью до линейных вкладов по r^{-1} и ёмкостные коэффициенты с точностью до квадратичных вкладов по r^{-1}.

3.25. Ёмкостные коэффициенты системы из двух проводников равны c_{11}, $c_{12} = c_{21}$ и c_{22}. Найти ёмкость конденсатора, обкладками которого служат эти два проводника.

3.26. Ёмкости трёх уединенных проводников равны C_1, C_2 и C_3. Проводники находятся в вакууме на расстояниях r_{12}, r_{23} и r_{13} друг от друга, соответственно, больших по сравнению с их собственными линейными размерами. Определить потенциальные коэффициенты системы проводников с точностью до линейных вкладов по r_{12}^{-1}, r_{23}^{-1}, r_{13}^{-1} и ёмкостные коэффициенты с точностью до квадратичных вкладов по r_{12}^{-1}, r_{23}^{-1} и r_{13}^{-1}.

3.27. Центры четырёх одинаковых проводящих сфер радиуса R расположены в вершинах квадрата со стороной a. Одна из сфер имеет заряд q, остальные сферы не заряжены. Затем заряженная сфера соединяется тонкой проволочкой поочередно на время, достаточное для установления равновесия, с остальными сферами в циклическом порядке. Найти распределение заряда между проводящими сферами по окончании всех операций. Рассмотреть задачу со сферами, радиусы которых намного меньше сторон квадрата $R \ll a$.

3.28. Три одинаковые проводящие сферы с радиусами R находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной b $(b \gg R)$. Вначале все сферы имели одинаковые заряды q. Затем они по очереди заземлялись на время, достаточное для установления равновесия. Найти заряды, которые остаются на каждой сфере после окончания всех операций.

3.29. Ёмкости уединённых проводников, находящихся в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε, равны C_1 и C_2. Потенциалы проводников, расстояние r между которыми много больше их линейных размеров, равны соответственно φ_1 и φ_2. Найти силу, с которой проводники действуют друг на друга.

3.30. Замкнутая проводящая поверхность с потенциалом φ_1 содержит внутри себя проводник с потенциалом φ_0. При этом потенциал в некоторой точке P между проводящими поверхностями равен φ_P. Затем проводники заземляются, при этом их взаимное расположение не изменяется, а в точку P помещается заряд q. Найти величины зарядов, индуцированных на проводниках.

3.31. Проводник заряжается путём последовательных присоединений к разрядному шарику электрофора. Шарик электрофора после каждого присоединения вновь заряжается, приобретая при этом заряд Q. При первом присоединении на проводник с шарика переходит заряд q. Какой заряд получит проводник после очень большого количества присоединений?

4. Микроскопическая и макроскопическая магнитостатика

4.1. Внутри бесконечно длинной тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный провод радиуса a, магнитная проницаемость которого равна μ_a. Пространство между проводом и оболочкой заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ_b. По проводу и оболочке в противоположных направлениях текут постоянные токи одинаковой силы I. Найти напряжённость и индукцию магнитного поля во всём объёме. Вычислить магнитную энергию и коэффициент самоиндукции, приходящиеся на фрагмент длины h такой системы. Рассмотреть предельный случай $h = 2\pi b \to \infty$.

4.2. Линия состоит из двух тонких бесконечно длинных коаксиальных цилиндрических оболочек радиусов a и b $(a < b)$, пространство между которыми заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ. Найти магнитную энергию и коэффициент самоиндукции, приходящиеся на фрагмент длины h такой системы. Рассмотреть предельный случай $h = 2\pi b \to \infty$.

4.3. Бесконечно длинный прямой провод и прямоугольная рамка лежат в одной плоскости. Стороны рамки, параллельные проводу, равны a. Стороны рамки, перпендикулярные проводу, равны b. Расстояние от провода до ближайшей к нему стороне рамки равно d. Сила тока в проводе равна I_1, сила тока в рамке равна I_2. Найти взаимную магнитную энергию провода и рамки с токами и коэффициент их взаимной индукции. Вычислить силу, с которой ток в проводе действует на ток в рамке. Рассмотреть варианты задачи с различными направлениями тока в рамке.

4.4. Бесконечно длинный прямой провод и кольцо радиуса a лежат в одной плоскости. Расстояние от провода до центра кольца равно d.

Сила тока в проводе равна I_1, сила тока в кольце равна I_2. Найти взаимную магнитную энергию провода и кольца с токами и коэффициент их взаимной индукции. Вычислить силу, с которой ток в проводе действует на ток в кольце. Рассмотреть варианты задачи с различными направлениями тока в кольце.

4.5. Два тонких кольца радиусов a и b расположены так, что их плоскости перпендикулярны отрезку прямой линии длиной l, соединяющему центры колец. Силы токов в кольцах равны I_a и I_b, соответственно. Найти взаимную магнитную энергию колец с токами и коэффициент взаимной индукции колец. Рассмотреть варианты с различными направлениями токов в кольцах и, в частности, предельные случаи $a \approx b \gg l$ и $l \gg a, b$. Сравнить взаимную магнитную энергию колец с токами и потенциальную энергию взаимодействия параллельных и антипараллельных друг другу магнитных моментов, расположенных вдоль отрезка длины l на его концах. Найти силы, с которыми кольца с токами воздействуют друг на друга.

4.6. Используя граничные соотношения, найти напряжённость и индукцию магнитного поля внутри и вне бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой (виток к витку) и с произвольной (не обязательно круговой) формой сечения. Сила тока, текущего по обмотке, равна I. Площадь сечения соленоида равна S, число витков на единицу длины соленоида равно n, магнитная проницаемость сердечника соленоида равна μ_c. Найти также коэффициент самоиндукции соленоида, приходящийся на фрагмент его длины, равной h_s.

4.7. Найти отношение магнитных энергий и коэффициентов самоиндукции очень длинного соленоида длины h_s (с круговой формой сечения радиуса R и с густой намоткой, число витков которой на единицу длины соленоида равно n, магнитная проницаемость сердечника соленоида равна μ_c) и провода длины $h = 2\pi R n h_s$ и радиуса $a = 1/2n$, образующего круговую петлю радиуса $h/2\pi = R n h_s$. По проводу намотки соленоида и проводу круговой петли текут токи одинаковой силы.

4.8. Найти отношение магнитных энергий и коэффициентов самоиндукции очень длинного соленоида длины h_s (с формой сечения в виде квадрата со стороной b и с густой намоткой, число витков которой на единицу длины соленоида равно n, магнитная проницаемость сердечника соленоида равна μ_c) и провода длины $h = 4bnh_s$ и радиуса $a = 1/2n$, образующего круговую петлю радиуса $h/2\pi$. По проводу намотки соленоида и проводу круговой петли текут токи одинаковой силы I.

4.9. Найти отношение магнитных энергий и коэффициентов самоиндукции очень длинного соленоида длины h_s (с формой сечения в виде равностороннего треугольника со стороной b и с густой намоткой, число витков которой на единицу длины соленоида равно n, магнитная проницаемость сердечника соленоида равна μ_c) и провода длины $h = 3bnh_s$ и радиуса $a = 1/2n$, образующего круговую петлю радиуса $h/2\pi$. По проводу намотки соленоида и проводу круговой петли текут токи одинаковой силы I.

4.10. Найти отношение магнитных энергий и коэффициентов самоиндукции очень длинного соленоида длины h_s (с формой сечения в виде правильного шестиугольника со стороной b и с густой намоткой, число витков которой на единицу длины соленоида равно n, магнитная проницаемость сердечника соленоида равна μ_c) и провода длины $h = 6bnh_s$ и радиуса $a = 1/2n$, образующего круговую петлю радиуса $h/2\pi$. По проводу намотки соленоида и проводу круговой петли текут токи одинаковой силы I.

4.11. Найти коэффициент самоиндукции тороидального соленоида, радиус которого равен R, а сечение – круг радиуса a. Общее число витков соленоида равно N. Определить коэффициент самоиндукции на единицу длины соленоида в пределе $R \to \infty$ при $N/R = \mathrm{const}$.

4.12. Найти коэффициент самоиндукции тороидального соленоида, радиус которого равен R, а сечение – прямоугольник со сторонами a и b. Общее число витков соленоида равно N. Определить коэффициент самоиндукции на единицу длины соленоида в пределе $R \to \infty$ при $N/R = \mathrm{const}$.

4.13. Найти коэффициент самоиндукции двухпроводной линии, приходящийся на часть l её длины. Линия состоит из двух параллельных прямых проводов бесконечной длины, радиусы которых равны a и b, а расстояние между их осевыми линиями равно h. По проводам текут равные по величине, но противоположно направленные токи, силы которых равны I.

4.14. Показать, что коэффициент самоиндукции тонкого замкнутого проводника с круговой формой сечения можно приближённо представить в виде суммы внутренней и внешней самоиндукции и вычислить его по формуле $L = \mu_0 l/2 + L'$, в которой μ - магнитная проницаемость проводника, l - его длина, L' - коэффициент взаимной индукции двух линейных контуров. Один из контуров совпадает с осевой линией рассматриваемого квазилинейного проводника, а другой – с линией, по которой пересекается с поверхностью проводника произвольная незамкнутая поверхность, опирающаяся на его осевую линию.

4.15. Определить коэффициент самоиндукции тонкого проволочного кольца радиуса b. Радиус провода равен $a \ll b$.

4.16. Найти коэффициент взаимной индукции двух параллельных отрезков длины a, расположенных на расстоянии l друг от друга и совпадающих с двумя противоположными сторонами прямоугольника. Вычислить с помощью этого коэффициента силы, с которыми действуют друг на друга токи I, текущие по этим проводникам в одну сторону и в противоположные стороны.

4.17. Определить коэффициент самоиндукции проволочного квадрата со стороной b. Радиус провода равен a $(a \ll b)$. Магнитная проницаемость материала провода равна μ_1, магнитная проницаемость среды, окружающей провод, равна μ_2.

4.18. Вычислить магнитный момент шара радиуса R, равномерно заряженного по объёму и вращающегося вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд шара равен q.

4.19. Вычислить магнитный момент равномерно заряженной сферы радиуса R, вращающейся вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд сферы равен q.

4.20. Вычислить магнитный момент шара радиуса R, заряженного по объёму по закону $\rho(r) = \alpha_n r^n$ и вращающегося вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд шара равен q. Выразить α_n через q, R, n. Магнитный момент шара выразить через q, R, n, $\vec{\omega}$.

4.21. Вычислить магнитный момент шара радиуса R, заряженного по объёму по закону $\rho(\vec{r}) = \alpha_n r^n \cos^2 \vartheta$ и вращающегося вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд шара равен q. Выразить α_n через q, R, n. Магнитный момент шара выразить через q, R, n, $\vec{\omega}$.

4.22. Вычислить магнитный момент шара радиуса R, заряженного по объёму по закону $\rho(\vec{r}) = \alpha_n r^n \sin^2 \vartheta$ и вращающегося вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд шара равен q. Выразить α_n через q, R, n. Магнитный момент шара выразить через q, R, n, $\vec{\omega}$.

4.23. Вычислить магнитный момент шара радиуса R, заряженного по объёму по закону $\rho(\vec{r}) = \alpha_n r^n (3\cos^2 \vartheta - 1)$ и вращающегося вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд шара равен q. Выразить α_n через q, R, n. Магнитный момент шара выразить через q, R, n, $\vec{\omega}$. Найти связь между магнитным моментом вращающегося шара и его квадрупольным моментом.

4.24. Вычислить магнитный момент сферы радиуса R, заряженной по закону $\sigma(\vartheta) = \sigma_0 \cos^2 \vartheta$ и вращающейся вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд сферы равен q. Выразить σ_0 через q и R. Магнитный момент сферы выразить через q, R, $\vec{\omega}$.

4.25. Вычислить магнитный момент сферы радиуса R, заряженной по закону $\sigma(\vartheta) = \sigma_0 \sin^2 \vartheta$ и вращающейся вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд сферы равен q.

Выразить σ_0 через q и R. Магнитный момент сферы выразить через q, R, $\vec{\omega}$.

4.26. Вычислить магнитный момент сферы радиуса R, заряженной по закону $\sigma(\vartheta) = \sigma_0 (3\cos^2\vartheta - 1)$ и вращающейся вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд сферы равен q. Выразить σ_0 через q и R. Магнитный момент сферы выразить через q, R, $\vec{\omega}$. Найти связь между магнитным моментом вращающейся сферы и её квадрупольным моментом.

4.27. Вычислить магнитный момент полусферы $(0 \le \vartheta \le \pi/2)$ радиуса R, заряженной по закону $\sigma(\vartheta) = \sigma_0 \cos\vartheta$ и вращающейся вокруг полярной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд полусферы равен q. Выразить σ_0 через q и R. Магнитный момент полусферы выразить через q, R, $\vec{\omega}$.

4.28. Вычислить магнитный момент полусферы $(0 \le \vartheta \le \pi/2)$ радиуса R, заряженной по закону $\sigma(\vartheta) = \sigma_0 \sin\vartheta$ и вращающейся вокруг полярной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд полусферы равен q. Выразить σ_0 через q и R. Магнитный момент полусферы выразить через q, R, $\vec{\omega}$.

4.29. Вычислить магнитный момент полусферы $(0 \le \vartheta \le \pi/2)$ радиуса R, заряженной по закону $\sigma(\vartheta) = \sigma_0 \cos^2\vartheta$ и вращающейся вокруг полярной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд полусферы равен q. Выразить σ_0 через q и R. Магнитный момент полусферы выразить через q, R, $\vec{\omega}$.

4.30. Вычислить магнитный момент полусферы $(0 \le \vartheta \le \pi/2)$ радиуса R, заряженной по закону $\sigma(\vartheta) = \sigma_0 \sin^2 \vartheta$ и вращающейся вокруг полярной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд полусферы равен q. Выразить σ_0 через q и R. Магнитный момент полусферы выразить через q, R, $\vec{\omega}$.

4.31. Вычислить магнитный момент цилиндра радиуса R и высоты h, равномерно заряженного по объёму и вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд цилиндра равен q.

4.32. Вычислить магнитный момент цилиндра радиуса R и высоты h, равномерно заряженного по боковой поверхности и вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд цилиндра равен q.

4.33. Вычислить магнитный момент цилиндра радиуса R и высоты h, равномерно заряженного по всей своей поверхности (боковой поверхности и основаниям) и вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд цилиндра равен q.

4.34. Вычислить магнитный момент цилиндра радиуса R и высоты h, заряженного по объёму по закону $\rho(r_\perp) = \alpha_n r_\perp^n$ ($r_\perp$ - расстояние от оси цилиндра) и вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд цилиндра равен q. Выразить α_n через R, h, q, n. Магнитный момент вращающегося цилиндра выразить через R, h, q, n, $\vec{\omega}$.

4.35. Вычислить магнитный момент конуса с радиусом основания R и высотой h, равномерно заряженного по объёму и вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд конуса равен q.

4.36. Вычислить магнитный момент конуса с радиусом основания R и высотой h, равномерно заряженного по боковой поверхности и вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд конуса равен q.

4.37. Вычислить магнитный момент конуса с радиусом основания R и высотой h, равномерно заряженного по всей поверхности (боковой поверхности и основанию) и вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Полный заряд конуса равен q.

4.38. Найти напряжённость магнитного поля в цилиндрической полости, вырезанной в бесконечно длинном цилиндрическом проводнике. Радиусы проводника и полости равны, соответственно, b и a. Расстояние между осями проводника и полости равно d $(b > a + d)$. Ток I равномерно распределён по сечению проводника с полостью.

4.39. Определить напряжённость магнитного поля на оси соленоида с густой намоткой, имеющего форму цилиндра. Радиус цилиндра R, высота цилиндра h, число витков на единицу длины n. Сила тока в проводе I.

4.40. Заряд q равномерно распределён по сфере радиуса R, которая вращается вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найти напряжённость магнитного поля внутри и вне сферы. Выразить напряжённость магнитного поля вне сферы через магнитный момент вращающейся сферы.

4.41. Плотность тока, создаваемого спиновым магнитным моментом электрона в атоме водорода, находящемся в основном состоянии со сферически симметричным распределением электронного заряда, описывается функцией $\vec{j}(\vec{r}) = c\,\mathrm{rot}[\rho(r)\vec{a}]$, где $\vec{a}$ - постоянный вектор, c – электродинамическая постоянная; $\vec{r}$ - радиус-вектор, начало которого находится на ядре атома, $\rho(r)$ - объёмная плотность электронного заряда в атоме водорода, обращающаяся в нуль на бесконечном расстоянии от его ядра. Показать, что напряжённость магнитного поля на ядре атома водорода равна $\vec{H} = (8\pi/3)\rho(0)\vec{a}$. Получить численное значение модуля напряжённости магнитного поля на ядре атома водорода.

4.42. Атом со сферически симметричным распределением электронного заряда помещён в однородное магнитное поле с напряжённостью $\vec{H}$. Показать, что напряжённость добавочного магнитного поля, обусловленного диамагнитным током, равна на ядре атома $\Delta\vec{H} = \left(e\vec{H}/3mc^2\right)\varphi(0)$, где $\varphi(0)$ - потенциал электростатического поля, создаваемого на ядре атомными электронами, $(-e)$ и m - заряд и масса электрона. Пользуясь значением потенциала электрического поля на ядре, создаваемого электроном атома водорода в основном состоянии, получить численное значение коэффициента, определяющего отношение напряжённости результирующего магнитного поля на его ядре и напряжённости внешнего однородного магнитного поля $\vec{H}$.

Литература

1. Батыгин, В.В. Сборник задач по электродинамике / В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. – СПб.: Лань, 2010. – 480 с. {http://e.lanbook.com/view/book/544}
2. Алексеев, А.И. Сборник задач по классической электродинамике / А.И. Алексеев. – СПб.: Лань. 2008. – 320 с. {http://e.lanbook.com/view/book/100}
3. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М Лифшиц. – М.: Физматлит, 2005. - 651 с. {http://e.lanbook.com/view/book/2234}
4. Ландау, Л.Д. Теория поля. Главы 1-9 / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Физматлит. 2006. - 504 с. {http://e.lanbook.com/view/book/2236}
5. Векштейн, Г.Е. Физика сплошных сред в задачах / Г.Е. Векштейн. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 208 с.

Содержание