Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. Лобачевского

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
Направление: 01.03.01 математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Бакалаврская работа)

ТРОПИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Работа завершена:

Студент IV курса, группа 05-103
«____»____________ 2015 г. ________________ (Лукашенко А. Г.)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
«____»____________ 2015 г. ________________ (Насрутдинов М. Ф.)

Заведующий кафедрой
док. физ.-мат. наук, профессор
«____»____________ 2015 г. ________________ (Арсланов М. М.)

Казань 2015

Содержание

Введение 3
Глава 1. ПОЛУКОЛЬЦА. **5**
1.1 Основные определения 5
1.2 Примеры полуколец. 7
1.3 Изоморфизмы полуколец 11
Глава 2. ТРОПИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА. **15**
2.1 Тропические многочлены 15
2.2 Тропические прямые 22
Глава 3. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ. **24**
3.1 Построение графиков 24
3.2 Построение многочленов по заданным точкам 26
Заключение **29**
Литература **30**

Введение

Интересуясь приложениями математики в экономике я нашел статью английского математика и экономиста П. Клемперера [2]. В работе автор описывал свое участие в моделировании аукционов по выделению средств центральным банком Англии коммерческим банкам, нуждавшимся в помощи. События происходили в 2007 году, когда мировой экономический кризис только набирал свою силу. Задача была действительно сложной: центральному банку предстояло распределить различные по своей структуре финансовые продукты между большим числом участников аукциона, требовалось учесть предпочтения самого Банка Англии, а также исключить возможность сговора между коммерческими банками (сговор участников является одной из основных проблем всех аукционов). Тогда для решения проблем предложили подключиться Клемпереру. Для решения поставленных задач ученый посоветовал задействовать инструменты тропической алгебры. В итоге с его помощью центральный банк успешно провел аукционы, что помогло избежать сильных потрясений в экономике.

Меня удивило то, на сколько эффективно работает столь молодая область математики, как тропическая алгебра и мы решили заняться подробным изучением этого раздела.

В тропической алгебре, в отличие от классической, многообразия рассматриваются над полукольцами. Впервые термин "полукольцо"появился в 1934 году в статье Г. С. Вандивера [3], однако фактически полукольца изучались с конца XIX века в работах, связанных с идеалами колец и с вопросами аксиоматики натуральных и неотрицательных рациональных чисел.

Комплексное изучение полуколец началось в 1950-х годах в работах А. А. Косты, С. Берна, М. Хенриксена, В. Завадовского и др. Повышенное внимание к полукольцам с конца 1980-х годов обусловливается не только внутренними потребностями теории, но и большой ее ролью, как эффективного инструмента для решения практических задач в экономике, технике, управлении и других областях.

Тропическая математика представляет собой область прикладной математики, связанную с изучением полуколец с идемпотентным сложением. За последние десятилетия эта область превратилась в один из наиболее быстро развивающихся разделов математики. Описание в терминах идемпотентной математики позволяет целый ряд нелинейных в обычном смысле задач превращать в линейные, что во многих случаях приводит к упрощению анализа и решения задачи, а также облегчает представление и интерпретацию результатов.

Целью работы является написание программ для работы с объектами тропической математики (построение графиков многочленов от одной и двух переменных и другие). Поставлена задача ознакомиться с существующей теорией [1], [4], [6], [5], выявить нерешенные проблемы, ознакомиться с существующим программным обеспечением, предназначенным для работы в рамках тропической математики.

Работа разделена на три части. В первой части рассматриваются общие вопросы из теории полуколец, приводятся определения, важные теоремы и их доказательства. Во второй части мы знакомимся с основными понятиями тропической алгебры, разбираются примеры, свойства операций. В третьей части будут получены практические результаты работы, описан процесс разработки программ.

1 ПОЛУКОЛЬЦА.

1.1 Основные определения

В этой части приведены такие понятия, как полукольцо, изоморфизм, идеал и др. Даны определения различным видам полуколец, рассмотрена конструкция присоединения единицы, приведены примеры некоторых алгебраических систем и доказано, что они являются полукольцами. Особое внимание уделено полукольцам $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$, $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$.

Для построения определения полукольца введем вспомогательные определения.

Определение 1 *Полугруппа* $(S, \cdot)$ *- множество* S*, на котором задана ассоциативная бинарная операция (*$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*, для любых* $a, b, c \in S$*).*

Определение 2 *Моноид* $(M, \cdot)$ *- полугруппа, в которой существует такой элемент* e*, что* $ex = x = xe$ *для любого* $x \in M$*.*

Определение 3 *Моноид называется коммутативным, если бинарная операция в нем коммутативна:* $a \cdot b = b \cdot a$ *для любых* $a, b \in M$*.*

Приведем понятие полукольца.

Определение 4 *Полукольцо* $(R, +, \cdot)$ *- непустое множество* R*, на котором определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие следующим условиям:*

1). $(R, +)$ *- коммутативный моноид с нейтральным элементом 0.*

2). $(R, \cdot)$ *- полугруппа;*

3). $a(b+c) = ab + ac$ и $(a+b)c = ac + bc$ для любых $a, b, c \in R$;

4). $0a = 0 = a0$ для любого $a \in R$.

Определение 5 *В полукольце $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ результатом выполнения первой операции является число - максимум из двух чисел, вторая операция - обычное арифметическое сложение. Первая операция обладает свойством идемпотентности. Нулем является $-\infty$, единицей - число 0. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ существует обратный элемент x^{-1}, равный $-x$ в обычной арифметике. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ определена степень x^y, значение которой соответствует арифметическому произведению xy. Частичный порядок совпадает с обычным линейным порядком. Максимальным элементом служит $+\infty$.*

Определение 6 *В полукольце $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$, $(\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\})$ результатом выполнения первой операции является число - максимум из двух чисел, вторая операция - обычное арифметическое умножение. Первая операция обладает свойством идемпотентности. Нулем является 0, единицей - число 1. Обратный элемент по умножению и степень имеют обычный смысл. Частичный порядок совпадает с обычным линейным порядком. Максимальным элементом служит $+\infty$*

Определение 7 *В полукольце $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ результатом выполнения первой операции является число - минимум из двух чисел, вторая операция - обычное арифметическое сложение. Первая операция обладает свойством идемпотентности. Нулем является $+\infty$, единицей - число 0. Для любого $\in R$ существует обратный элемент x^{-1}, равный $-x$ в обычной арифметике. Для любых $x, y \in R$ определена степень x^y, значение которой соответствует арифметическому произведению xy. Частичный порядок обратный обычному линейному порядку в $\mathbb{R}$. Максимальный элемент $-\infty$.*

Определение 8 *В полукольце $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$, $(\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\})$ результатом выполнения первой операции является число - минимум из двух чисел, вторая операция - обычное арифметическое умножение. Нулем является $+\infty$, единицей - число 1. Частичный порядок обратный обычному линейному порядку в $\mathbb{R}$. Роль элемента ∞ играет число 0.*

1.2 Примеры полуколец

В этой части мы рассмотрим примеры полуколец, приведем некоторые доказательства.

Определение 9 *Полукольцо называется коммутативным, если операция умножения в нем коммутативна:* $a \cdot b = b \cdot a$ *для любых* $a, b \in R$.

Пример 1 *Множество всех неотрицательных действительных чисел* $\mathbb{R}_+$ *с обычными операциями сложения и умножения является коммутативным полукольцом.*

Доказательство.
1). Покажем, что $(\mathbb{R}, +)$ - коммутативный моноид.
Обычная операция сложения является ассоциативной и коммутативной. Нейтральным элементом является 0.
2). Покажем, что $(\mathbb{R}, \cdot)$ - полугруппа.
Обычная операция умножения является ассоциативной.
3). Закон дистрибутивности выполняется для обычных операций сложения и умножения.
4). Выполняется мультипликативное свойство 0: $0a = 0 = a0$ для любого $a \in \mathbb{R}_+$.
$\blacksquare$

Рассмотрим конструкцию присоединения единицы к полукольцу. В книге [4] автор приводит пример такой конструкции.

Определение 10 *Полукольцо называется полукольцом с единицей, если в нем существует нейтральный элемент по умножению (называемый единицей):* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *для любого* $a \in R$.

Предложение 1 *Для произвольно полукольца* $(R, +, \cdot)$ *возьмем прямое произведение множеств* $R \times \mathbb{N}$ *с покоординатным сложением и умножением, заданным формулой:* $(s, m)(t, n) = (st + ns + mt, mn)$, *где* ns *- это сумма* n

элементов s. Получаем полукольцо с единицей (0, 1), содержащее подполукольцо $R \times \{0\}$, изоморфное R. Следовательно, любое полукольцо можно вложить (с сохранением операций) в полукольцо с единицей.

Приведем строгое обоснование этому построению.

Доказательство. Покажем, что $(R \times \mathbb{N}, +, \times)$ является полукольцом с единицей.

1). $(R \times \mathbb{N}, +)$ - коммутативный моноид с нейтральным элементом (0, 0). Коммутативность и ассоциативность достигаются за счет выполнения этих свойств сложения в полукольце $(R, +, \cdot)$ и в натуральных числах. Нейтральность (0, 0) также очевидна.

2). $(R \times \mathbb{N}, \times)$ - моноид с нейтральным элементом (0, 1).

Покажем ассоциативность:

$$(a, b) \times ((c, d) \times (m, n)) = (a, b) \times (cm + nc + dm, dn) =$$

$$= (acm + anc + adm + dna + bcm + bnc + bdm, bdn)$$

$$((a, b) \times (c, d)) \times (m, n) = (ac + da + bc, bd) \times (m, n) =$$

$$= (acm + dam + bcm + nac + nda + nbc + bdm, bdn)$$

Покажем нейтральность (0, 1).

$$(a, b) \times (0, 1) = (a0 + a + b0, b) = (a, b)$$

$$(0, 1) \times (a, b) = (0a + b0 + a, b) = (a, b)$$

3). Докажем левую дистрибутивность:

$$(a, b) \times ((c, d) + (m, n)) = (a, b) \times (c + m, d + n) =$$

$$= (ac + am + da + na + bc + bm, bd + bn)$$

$$(a, b) \times (c, d) + (a, b) \times (m, n) =$$

$$(ac + da + bc, bd) + (am + na + bm, bn) = (ac + da + bc + am + na + bm, bd + bn)$$

Левая дистрибутивность доказана, докажем правую дистрибутивность:

$$((c, d) + (m, n)) \times (a, b) = (c + m, d + n) \times (a, b) =$$

$$(ca + ma + bc + bm + da + na, db + nb)$$

$$(c, d) \times (a, b) + (m, n) \times (a, b) = (ca + bc + da, db) + (ma + bm + na, nb) =$$

$$(ca + bc + da + ma + bm + na, db + nb)$$

4). Мультипликативное свойство нуля выполняется. $\forall (a, b) \in R \times \mathbb{R}(0, 0) \times (a, b) = (a, b) \times (0, 0) = (0, 0)$. ■

Определение 11 *Непустое подмножество I полукольца R называется левым идеалом полукольца R, если для любых элементов $a, b \in I$, $s \in R$ элементы $a + b$ и $s \cdot a$ принадлежат I. Симметричным образом определяется правый идеал. Непустое подмножество, являющееся одновременно левым и правым идеалом, называется двусторонним идеалом или просто идеалом полукольца R.*

Определение 12 *Сумма идеалов A и B - идеал вида $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.*

Определение 13 *Произведение идеалов A и B - идеал вида $\{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$.*

Пример 2 *Имеется полукольцо $(R, +, \cdot)$. Пусть $ideal(R)$ - множество всех двусторонних идеалов R, включая и само R. Доказать, что $(ideal(R), +, \times)$ - является полукольцом, к которому применяются обычные операции сложения и умножения идеалов, в котором аддитивной единицей является идеал $\{0_R\}$, а мультипликативной единицей является R.*

Доказательство.

1). Покажем, что $(ideal(R), +)$ - коммутативный моноид с нейтральным элементом $\{0_R\}$:

Покажем, что сложение идеалов ассоциативно:

$$(A + B) + C = \{(a + b) + c \mid a \in A, b \in B, c \in C\} =$$

$$= \{a + (b + c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} = A + (B + C)$$

Выполняется из-за ассоциативность сложения в R. На тех же основаниях выполняется свойство коммутативности. Также очевидно, что $\{0_R\} + A = A + \{0_R\} =$

$A \quad \forall A \in ideal(R)$.
2). $(ideal(R), \times)$ - моноид с нейтральным элементом R:
Покажем, что умножение идеалов ассоциативно:

$$(A \times B) \times C = \{(ab)c \mid a \in A, b \in B, c \in C\} =$$
$$= \{a(bc) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} = A \times (B \times C)$$

Выполняется из-за ассоциативности умножения в R. Также очевидно, что $R \times A = A \times R = A \quad \forall A \in ideal(R)$.
3). Левая и правая дистрибутивность выполняется из-за выполнения этих свойств для $(R, +, \cdot)$.
4). Мультипликативное свойство нуля: $\{0_R\} \times A = A \times \{0_R\} = \{0_R\} \quad \forall A \in ideal(R)$. ■

Определение 14 *Полукольцо называется идемпотентным, если для любого $a \in R$ выполняется равенство $a + a = a$.*

Рассмотрим следующую алгебраическую систему и докажем, что она является полукольцом.

Пример 3 *($\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, \min$) - идемпотентное полукольцо.*

Доказательство.
1). Покажем, что $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max)$ - идемпотентный коммутативный моноид с нейтральным элементом $-\infty$. Коммутативность очевидна. Ассоциативность также очевидна. Кроме того для любого $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max)$, $\max(-\infty, a) = a$. Идемпотентность выполняется: $\max(a, a) = a, \quad \forall a \in (\mathbb{R} \cup$ $\cup \{-\infty, +\infty\}, \max)$.
2). Для $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min)$ докажем более сильное утверждение, чем то, что оно является полугруппой. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min)$ - коммутативный моноид с нейтральным элементом $+\infty$. Ассоциативность и коммутативность очевидны. Также для любого $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min), \quad \min(-\infty, a) = a$.
3). Докажем, что выполняется правая дистрибутивность, тогда левая дистрибутивность будет выполняться за счет коммутативности операций. Рассмотрим 3 случая:
1. $a \leq b \leq c$

$$\min(a, \max(b, c)) = a, \max(\min(a, b), \min(a, c)) = a$$

2. $b \leq a \leq c$

$$\min(a, \max(b, c)) = a, \max(\min(a, b), \min(a, c)) = a$$

3. $c \leq b \leq a$

$$\min(a, \max(b, c)) = b, \max(min(a, b), \min(a, c)) = b$$

Выполнение дистрибутивности для этих трех случаев достаточно для доказательства дистрибутивности для любых $a, b, c \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, \min)$.
4). $\min(-\infty, a) = -\infty, \quad \forall a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, \min)$ - мультипликативное свойство нуля. ■

1.3 Изоморфизмы полуколец

Много приложений имеют следующие полукольца: $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$, $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$. Рассмотрим подробнее эти полукольца и приведем доказательство следующего утверждения:

Лемма 1 *Полукольца $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$, $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$ изоморфны.*

Определение 15 *Отображение $f : X \to Y$ называется биекцией, если оно:*
1). $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X \quad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
2). $\forall y \in Y, \exists x \in X \quad f(x) = y$

Определение 16 *Гомоморфизм полуколец - отображение $h : R_1 \to R_2$ ($\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$, $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ - полукольца), при котором:*

$$\forall x, y \in R_1 \quad h(x +_1 y) = h(x) +_2 h(y), \quad h(x \cdot_1 y) = h(x) \cdot_2 h(y).$$

Определение 17 *Изоморфизм полуколец - биективное отображение, являющееся гомоморфизмом.*

Доказательство.

Схема отображений представленна на рисунке 1. 1). Отображением изоморфиз-

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{\max,+} \arrow[r, shift left, "y=-x"] \arrow[d, shift left, "y=e^x"] & \mathbb{R}_{\min,+} \arrow[l, shift left, "y=-x"] \arrow[d, shift left, "y=e^x"] \\
\mathbb{R}_{\max,\times} \arrow[r, shift left, "y=1/x"] \arrow[u, shift left, "y=\ln x"] & \mathbb{R}_{\min,\times} \arrow[l, shift left, "y=1/x"] \arrow[u, shift left, "y=\ln x"]
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Изоморфизм полуколец

ма из $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\}, \max, +)$ в $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}, \min, +)$ является функция $y = -x, \quad x \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$.

Покажем, что это отображение является отображением гомоморфизма.

Пусть для определенности $a \leq b, \quad a, b \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, тогда:

$$-(\max(a, b)) = -b, \quad \min(-a, -b) = -b$$

Отображение гомоморфно для первой операции.

Гомоморфность отображения для второй операции(обычное сложение в R) очевидна.

Теперь покажем, что отображение $y = -x, \quad x \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ является биекцией. Для этого найдем такое отображение f, что функция $f \circ y$ является тождественной. Очевидно, что $f = -x, \quad x \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$. $f \circ y = -(-x) = x$.

2). Отображением изоморфизма из $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ в $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$ является функция $y = e^x, \quad x \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$.

Покажем, что это отображение является отображением гомоморфизма.
Пусть для определенности $a \leq b, \quad a, b \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, тогда:

$$e^{\min(a,b)} = e^a, \quad \min(e^a, e^b) = e^a$$

Отображение гомоморфно для первой операции.
Покажем гомоморфность отображения для второй операции:

$$e^{(a+b)} = e^a \cdot e^b$$

Теперь покажем, что отображение $y = e^x, \quad x \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ является биекцией. Для этого найдем такое отображение f, что функция $f \circ y$ является тождественной. Очевидно, что $f = \ln x, \quad x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$. $f \circ y = \ln(e^x) = x$.
3). Отображением изоморфизма из $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$ в $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$ является функция $y = \frac{1}{x}, \quad x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$.
Покажем, что это отображение является отображением гомоморфизма.
Пусть для определенности $a \leq b, \quad a, b \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$, тогда:

$$\frac{1}{\min(a,b)} = \frac{1}{a}, \quad \max(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = \frac{1}{a}$$

Отображение гомоморфно для первой операции.
Гомоморфность отображения для второй операции(обычное умножение в R) очевидна.
Теперь покажем, что отображение $y = \frac{1}{x}, \quad x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$ является биекцией. Для этого найдем такое отображение f, что функция $f \circ y$ является тождественной. Очевидно, что $f = \frac{1}{x}, \quad x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$. $f \circ y = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.
4). Отображением изоморфизма из $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$ в $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ является функция $y = \ln x, \quad x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$.
Покажем, что это отображение является отображением гомоморфизма.
Пусть для определенности $a \leq b, \quad a, b \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$, тогда:

$$e^{\max(a,b)} = e^b, \quad \max(e^a, e^b) = e^b$$

Отображение гомоморфно для первой операции.
Покажем гомоморфность отображения для второй операции:

$$\ln{(a \cdot b)} = \ln a + \ln b$$

Теперь покажем, что отображение $y = \ln x, \quad x \in (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$ является биекцией. Для этого найдем такое отображение f, что функция $f \circ y$ является тождественной. Очевидно, что $f = e^x, \quad x \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$. $f \circ y = e^{\ln x} = x$. ■

Полученные нами результаты понадобятся нам в дальнейшей работе.

2 ТРОПИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА.

2.1 Тропические многочлены

Перейдем к изучению тропической геометрии. Эта область математики получила свое название по месту работы бразильского профессора Имре Саймона, исследовавшего тропическое полукольцо в связи с вопросами информатики и теории оптимизации.

Мы будем работать с полукольцом $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, но из-за доказанного выше изоморфизма этого полукольца и других часто используемых полуколец, полученные нами результаты распространяются и на них. Обозначать операции сложения и умножения будем следующим образом:

$$\oplus = \min, \quad 7 \oplus 5 = \min(7, 5) = 5$$

$$\odot = +, \quad 7 \odot 5 = 7 + 5 = 12$$

Возведение в степень $n \in \mathbb{N}$ элемента $a \in \mathbb{R} \cup +\infty$ равно умножению в обычном смысле элемента a на n:

$$a^n = \underbrace{a \odot a \ldots a}_{n} = \underbrace{a + a + \ldots a}_{n} = n \cdot a$$

Докажем свойство данных операций.

Лемма 2

$$x^n \oplus y^n = (x \oplus y)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in (\mathbb{R} \cup +\infty, min, +)$$

Доказательство. Доказательство будем вести по индукции. Базой индукции будет равенство при $n = 1$, не требующее доказательства. Докажем равенство при $n = 2$. Имеем:

$$(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus x \odot y \oplus y \odot x \oplus y^2$$

Так как операция $\oplus$ или $min()$ идемпотентная то:

$$x \odot y \oplus y \odot x = x \odot y$$

Это означает, что биномиальные коэффициенты равны нулю(0 - мультипликативная единица в $(\mathbb{R} \cup +\infty, min, +)$). Таким образом мы получаем следующее равенство:

$$(x \oplus y)^2 = min(2 \cdot x, x + y, 2 \cdot y)$$

Теперь докажем, что член $x \odot y$ не существенен при любых $x, \quad y$ и его можно исключить. Нам надо показать, что $x+y \geq 2 \cdot x \vee x+y \geq 2 \cdot y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \cup +\infty$. Пусть для определенности $x \geq y$. Тогда $x + y \geq 2 \cdot x$. Следовательно член $x \odot y$ можно исключить и мы получаем следующее равенство:

$$(x \oplus y)^2 = min(2 \cdot x, x + y, 2 \cdot y) = min(2 \cdot x, 2 \cdot y) = x^2 \oplus y^2$$

Делаем шаг индукции. Пусть равенство доказано для степени $n - 1$. Докажем, что равенство выполняется для степени n.

$$(x \oplus y)^n = (x \oplus y)^{n-1} \odot (x \oplus y) = (x^{n-1} \oplus y^{n-1}) \odot (x \oplus y) = x^n \oplus x^{n-1} \odot y \oplus y^{n-1} \odot x \oplus y^n$$

Запишем получившийся результат в более привычной форме:

$$x^n \oplus x^{n-1} \odot y \oplus y^{n-1} \odot x \oplus y^n = min(n \cdot x, (n-1) \cdot x + y, (n-1) \cdot y + x, n \cdot y)$$

Докажем, что члены $(n-1) \cdot x + y, (n-1) \cdot y + x$ можно исключить. Пусть для определенности $x \geq y$. Тогда $(n-1) \cdot x + y \geq n \cdot y \wedge (n-1) \cdot y + x \geq n \cdot y$. Исключаем $(n-1) \cdot x + y, (n-1) \cdot y + x$ и получаем равенство:

$$x^n \oplus y^n = min(n \cdot x, n \cdot y) = (x \oplus y)^n \qquad \blacksquare$$

Далее рассмотрим, что из себя представляют полиномы от одной переменной в рамках тропической алгебры. Начнем с полинома первой степени. Общий вид многочлена:

$$f(x) = a \odot x \oplus b$$

График полинома первой степени представлен на рисунке 2.

Общий вид многочлена второй степени:

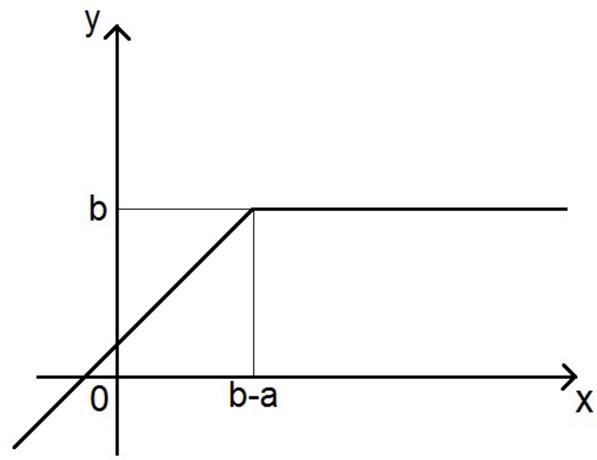

Рис. 2: График полинома $f(x) = a \odot x \oplus b$

$$f(x) = a \odot x^2 \oplus b \odot x \oplus c$$

Но что значит найти корень тропического многочлена? Если мы приравняем к $+\infty$ многочлен $p(x)$ ($+\infty$ - ноль в $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$), то решением уравнения $p(x) = +\infty$ всегда будет только $+\infty$. Такое определение корня нам не подходит. Мы будем считать, что c - корень многочлена, если $p(x) = (x \oplus c) \odot g(x)$, где $g(x)$ - многочлен степени на единицу меньшей, чем $p(x)$.
Заметим, что различные полиномы могут давать одинаковые значения на всей области определения.

Пример 4 *Возьмем два разных тропических полинома:* $f(x) = 2 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \oplus 4$ *и* $g(x) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 4$
Графики этих полиномов совпадают и представлены на рисунке 3.

Следовательно мы можем говорить об эквивалентности двух полиномов в следующем смысле:

Определение 18 *Полиномы эквивалентны ($f \sim g$), если они равны при любом* x $(f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R})$.

Приведем понятие полиномов с наименьшими коэффициентами:

Определение 19 *Полином* $f(x) = a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$ *называется полиномом с наименьшими коэффициентами, если* $\forall i \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}, \quad k < i < n, \quad b < a_i$, *то* $f(x) \neq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, *где* $g(x) = a_n \odot x^n \oplus \ldots \oplus a_{i+1} \odot x^{i+1} \oplus b \odot x^i \oplus a_{i-1} \odot x^{i-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$.

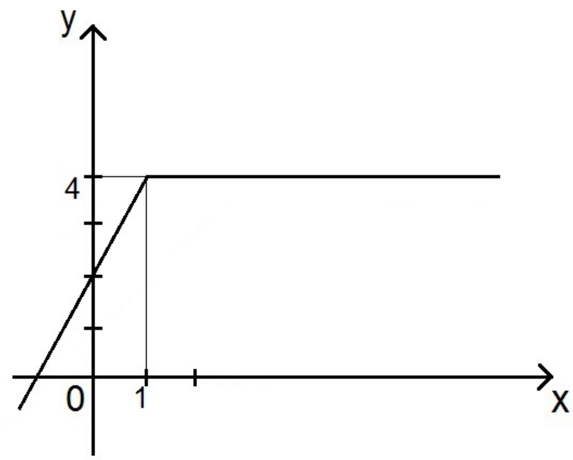

Рис. 3: График полиномов $f(x) = 2 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \oplus 4$ и $g(x) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot x \oplus 4$

Замечание 1 *Если в полиноме* $f(x) = a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$, *коэффициенты* $a_n \neq +\infty, \quad a_k \neq +\infty$, *то они наименьшие.*

Сформулируем правило для нахождения полинома с наименьшими коэффициентами, эквивалентного данному.

Лемма 3 *Дан полином* $f(x) = a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$, $a_n \neq +\infty, \quad a_k \neq +\infty$. *Ему соответствует полином с наименьшими коэффициентами* $g(x) = b_n \odot x^n \oplus b_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \ldots \oplus b_k \odot x^k$, $f \sim g$. *Коэффициенты* b_i *находятся по следующей формуле:*

$$b_i = \min(\{a_i\} \cup \{\frac{a_j \cdot (l-i) + a_l \cdot (i-j)}{l-j} | k \leq j < i < l \leq n\}).$$

Замечание 2 *Если в полиноме* $f(x) = a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$, $a_n \neq +\infty, \quad a_k \neq +\infty$ *для некоторого* $k < i < n$, $a_i = +\infty$, *то* $\exists b < a_i$ *и* $f \sim g$, *где* $g(x) = a_n \odot x^n \oplus \ldots \oplus a_{i+1} \odot x^{i+1} \oplus b \odot x^i \oplus a_{i-1} \odot x^{i-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$.

Теорема 1. ***Фундаментальная теорема тропической алгебры.*** *Дан тропический полином с наименьшими коэффициентами* $f(x) = a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$. *Его можно разложить в произведение линейных полиномов* $x \oplus c_i$ *следующим образом:*

$$f(x) = a_n \odot x^k \odot (x \oplus c_n) \odot (x \oplus c_{n-1}) \odot \ldots \odot (x \oplus c_{k+1}), \tag{1}$$

где $c_i = a_{i-1} - a_i$.

Замечание 3 *Так как* $c_i = a_{i-1} - a_i$ *и* $f(x) = a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$ *- полином с наименьшими коэффициентами, то, при приведении* $f(x)$ *к виду (1), выполняются следующие неравенства:*

$$c_n \leq c_{n-1} \leq \ldots \leq c_{k+2} \leq c_{k+1} \qquad (2).$$

Далее докажем теорему имеющую важное практическое значение.

Теорема 2. *Дан полином с наименьшими коэффициентами степени* n, $f(x) = a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_k \odot x^k$. *Корнем полинома* $f(x)$ *является число* $c \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда при подстановке с в полином* $f(x)$ *минимум достигается хотя бы в двух мономах.*

Доказательство. Необходимость. Пусть с - корень полинома $f(x)$. Согласно фундаментальной теореме тропической алгебры полином $f(x)$ можно представить в виде (1). Тогда $c = c_i$, для некоторого i. Для всех $j < i$ выполняется следующее:

$$a_i + i \cdot c_i = a_i + (i - j) \cdot c_i + j \cdot c_i \leq a_i + c_i + c_{i-1} + \ldots + c_{j+1} + j \cdot c_i \qquad (3)$$

Неравенство выполняется ввиду (2). Перепишем сумму $c_i + c_{i-1} + \ldots + c_{j+1}$ в следующем виде:

$$c_i + c_{i-1} + \ldots + c_{j+1} = a_{i-1} - a_i + a_{i-2} - a_{i-1} + \ldots + a_{j+1} - a_{j+2} + a_j - a_{j+1} = a_j - a_i$$

Возвращаясь к (3), получаем:

$$a_i + i \cdot c_i \leq a_j + j \cdot c_i$$

Посчитаем для $j > i$:

$$a_i + i \cdot c_i = a_i - (j - i) \cdot c_i + j \cdot c_i \leq a_i - c_j - c_{j-1} - \ldots - c_{i+1} + j \cdot c_i \qquad (4)$$

Неравенство выполняется ввиду (2). Перепишем $-c_j - c_{j-1} - \ldots - c_{i+1}$ в следующем виде:

$$-c_j - c_{j-1} - \ldots - c_{i+1} = -a_{j-1} + a_j - a_{j-2} + a_{j+1} - \ldots - a_{i+1} + a_{i+2} - a_i + a_{i+1} = a_j - a_i$$

Возвращаясь к (4), получаем:

$$a_i + i \cdot c_i \leq a_j + j \cdot c_i$$

Тогда $f(c_i) = a_i \odot c_i^i$. С другой стороны $a_i \odot c_i^i = a_n \odot c_n \odot c_{n-1} \odot \ldots \odot c_{i+1} \odot c_i^i =$ $a_n \odot c_n \odot c_{n-1} \odot \ldots \odot c_i \odot c_i^{i-1} = a_{i-1} \odot c_i^{i-1}$. Получается, при подстановке с в $f(x)$, минимум достигается на двух мономах $a_i \odot x^i$ и $a_{i-1} \odot x^{i-1}$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть, при подстановке с в $f(x)$, минимум достигается в двух мономах. Будем доказывать от противного. Пусть эти мономы расположены не подряд, то есть $a_i \odot c^i = a_j \odot c^j < a_l \odot c^l$, $i < l < j$. Если $x \leq c$, то:

$$a_j + j \cdot x = a_j + l \cdot x + (j - l) \cdot x \leq a_j + l \cdot x + (j - l) \cdot c =$$

$$= a_j + j \cdot c + l \cdot (x - c) < a_l + l \cdot c + l \cdot (x - c) = a_l + l \cdot x$$

Аналогично, если $x \geq c$, то $a_i \odot x^i < a_l \odot x^l$. Тогда нет такого х, что $f(x) = a_l \odot x^l$. Следовательно a_l - не минимальный коэффициент, противоречие. Следовательно есть некоторое i, такое, что $a_i \odot c^i = a_{i-1} \odot c^{i-1}$. Мы имеем:

$$a_i + i \cdot c = a_{i-1} + (i - 1) \cdot c$$

или $c = a_{i-1} - a_i$. Следовательно с - разница между двумя последовательными коэффициентами и по фундаментальной теореме тропической алгебры с -корень многочлена $f(x)$. ■

Запишем общее правило для разложения полинома второй степени на линейные полиномы:

$$a \odot x^2 \oplus b \odot x \oplus c = \min(a + 2 \cdot x, b + x, c) = a + \min(2 \cdot x, b - a + x, c - a) =$$

$$= \begin{cases} a \odot (x \oplus \frac{c-a}{2})^2, & 2 \cdot (b - a) > c - a \\ a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b)), & 2 \cdot (b - a) \leq c - a \end{cases}$$

Пример 5 $f(x) = 3 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 7$
$\min(3 + 2 \cdot x, 4 + x, 7) = 3 + \min(2 \cdot x, 1 + x, 4) = 3 \odot (x \oplus 1) \odot (x \oplus 3)$. *График функции изображен на рисунке 4.*

Разложив полином на линейные многочлены, мы сразу видим в каких точках происходит "излом"графика, что позволяет с легкостью построить график этой функции. Теперь рассмотрим полином степени 3. Общий вид такой:

$$f(x) = f(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$$

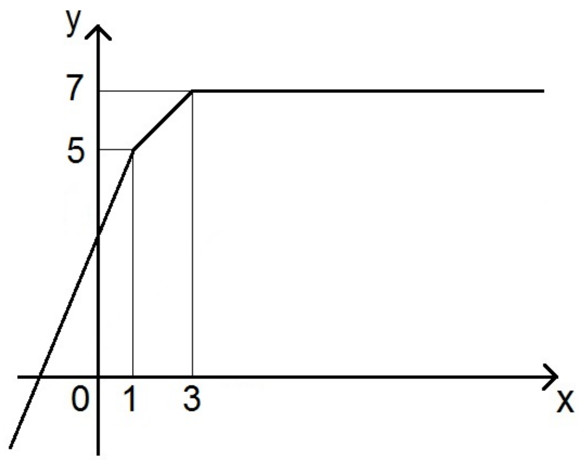

Рис. 4: График функции $f(x) = 3 \odot x^2 \oplus 4 \odot x \oplus 7$

Это кусочно-линейная функция, она имеет 3 точки "излома"графика, если:

$$b - a \leq c - b \leq d - c$$

При невыполнении этих условий точек "излома"будет меньше трех. Полином третьей степени раскладывается на линейные полиномы следующим образом:

$$a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d = a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b)) \odot (x \oplus (d - c))$$

График полинома третьей степени изображен на рисунке 5.

Мы видим, что нелинейные функции при переходе к их тропическим аналогам становятся кусочно-линейными. Это позволяет в различных задачах упростить анализ и их решение.

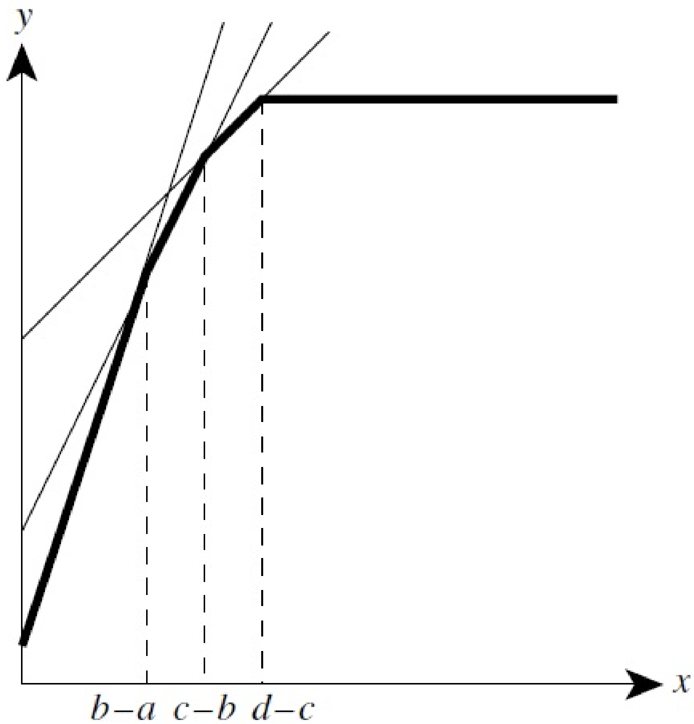

Рис. 5: График функции $y = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$

2.2 Тропические прямые

Простейшим объектом тропической геометрии является тропическая прямая. Для начала дадим несколько определений.

Определение 20 *$A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ являются точками общего положения, если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$*

Термин "прямая"обосновывается следующим образом:

• любые две тропические прямые общего положения пересекаются в един- ственной точке;

• через любые две точки общего положения на плоскости проходит един- ственная тропическая прямая.

Общий вид тропической прямой:

$$f(x,y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c = \min(a+x, b+y, c)$$

Точки (x,y) на плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие следующему условию, составляют график тропической прямой: минимум из чисел a+x, b+y, c должен достигаться по крайней мере в двух из них. Информация о том, почему так происходит и про связь комплексной и тропической прямых, есть в книге Казаряна М. Э. [6].

График прямой $f(x,y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$ на плоскости можно построить следующим образом: из точки $(c-a, c-b)$ исходит три луча. Один необходимо направить вниз, другой влево, третий вверх и вправо под углом 45°. График тропической прямой представлен на рисунке 6.

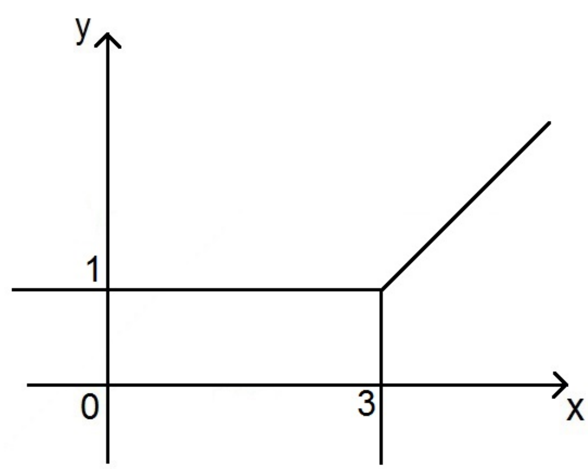

Рис. 6: График полинома $x \oplus 2 \odot y \oplus 3$ над $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$

3 РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ.

3.1 Построение графиков

Далее началась работа по написанию программы для построения графиков. Встал вопрос о выборе языка программирования. Мы некоторое время работали в системе компьютерной алгебры SageMath. Это открытый проект, каждый может добавлять свои библиотеки. Система работает на языке Python. Когда программа будет обладать необходимым функционалом библиотеки будут встроены в систему SageMath, что позволит любому с легкостью пользоваться полученными результатами.

Программа должна строить графики от одной переменной в тех полукольцах, с которыми мы работали: $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times)$, $(\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times)$. Для переопределения операций сложения и умножения были созданы четыре класса (Приложение 1), что позволило упростить написание программы и работу самого пользователя. Для удобства пользователя был разработан графический интерфейс(см. Рис. 7). Программа позволяет пользователю выбирать то полукольцо, в котором он хочет работать, выбирать область в которой будет строиться график.

Графики многочленов строятся поточечно: на оси Ox задается шаг дискретизации, после чего в каждой точке с помощью введенных классов Rmaxplus, Rminplus, Rmaxmul, Rminmul вычисляется значение функции, заданной пользователем, и это значение откладывается на оси Oy(Приложение 2).

Дальнейшим шагом стало написание программы для построения графиков полиномов от двух переменных (Приложение 3). Это более сложная задача, чем

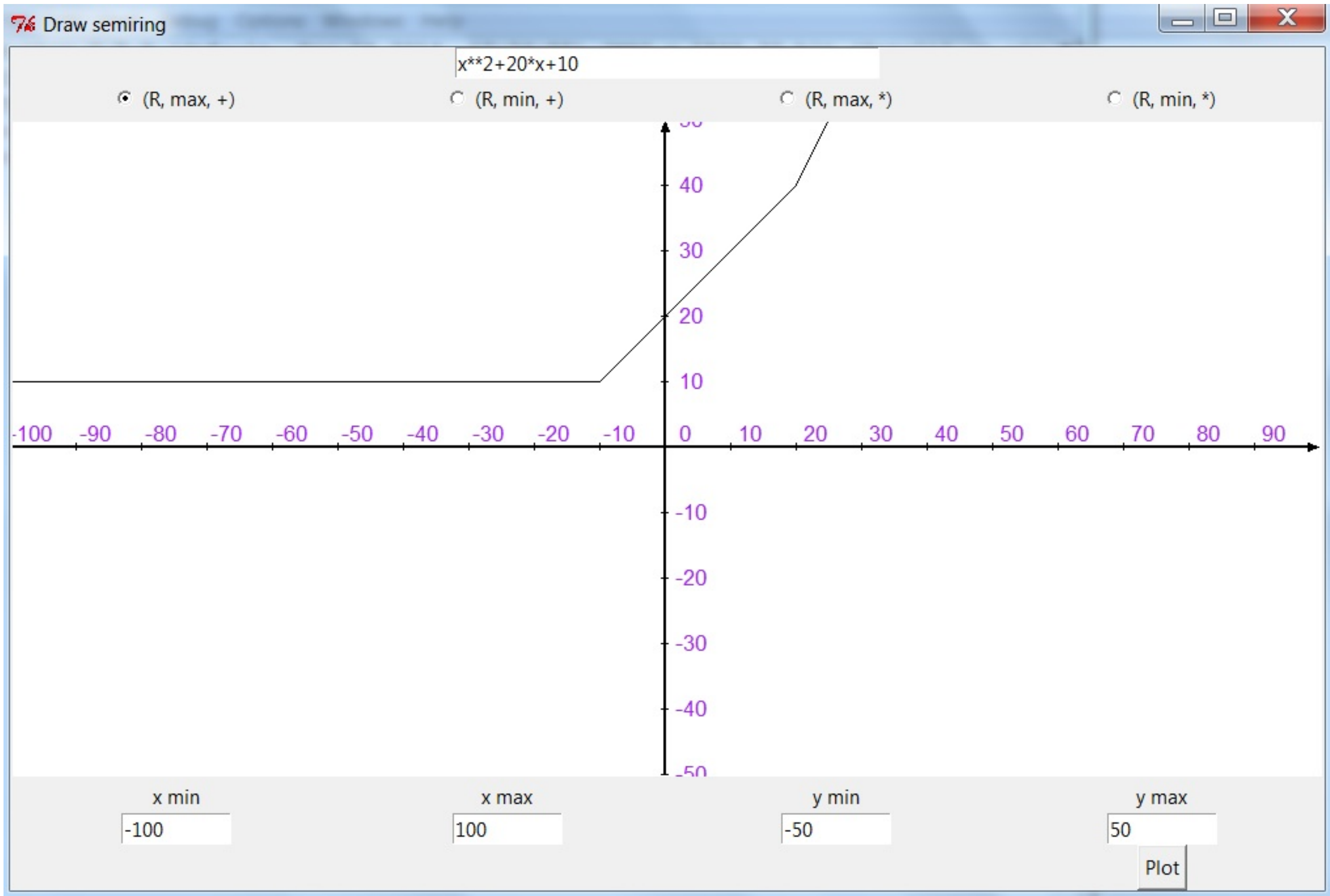

Рис. 7: Работа программы GIGraf.py

в случае с одной переменной. Пользователю необходимо задать точность вычислений, область, в которой будут происходить вычисления, а также выбрать то полукольцо в котором он будет работать. Данный функционал позволяет пользователю удобно и эффективно работать с программой (см. Рис. 8). Так как программа строит графики функции поточечно, ей необходимо проверить в зависимости от точности и области заданны пользователем большое количество точек. Например, при точности вычислений 0.1 и области $[-100, 100] \times [-100, 100]$ необходимо проверить 4000000 точек, при этом, в зависимости от заданного многочлена, для каждой точки необходимо проверить $C_k^2 = \frac{k!}{2 \cdot (k-2)!}$ условий, где k - количество мономов (условие, что максимум для $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ или минимум для $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ достигается в двух мономах). Следовательно программе необходимо сделать достаточно большое количество итераций и на это, в зависимости от мощности вычислительной системы, потребуется некоторое время (порядка 10 секунд для многочлена из 6 мономов и среднего по мощности компьютера).

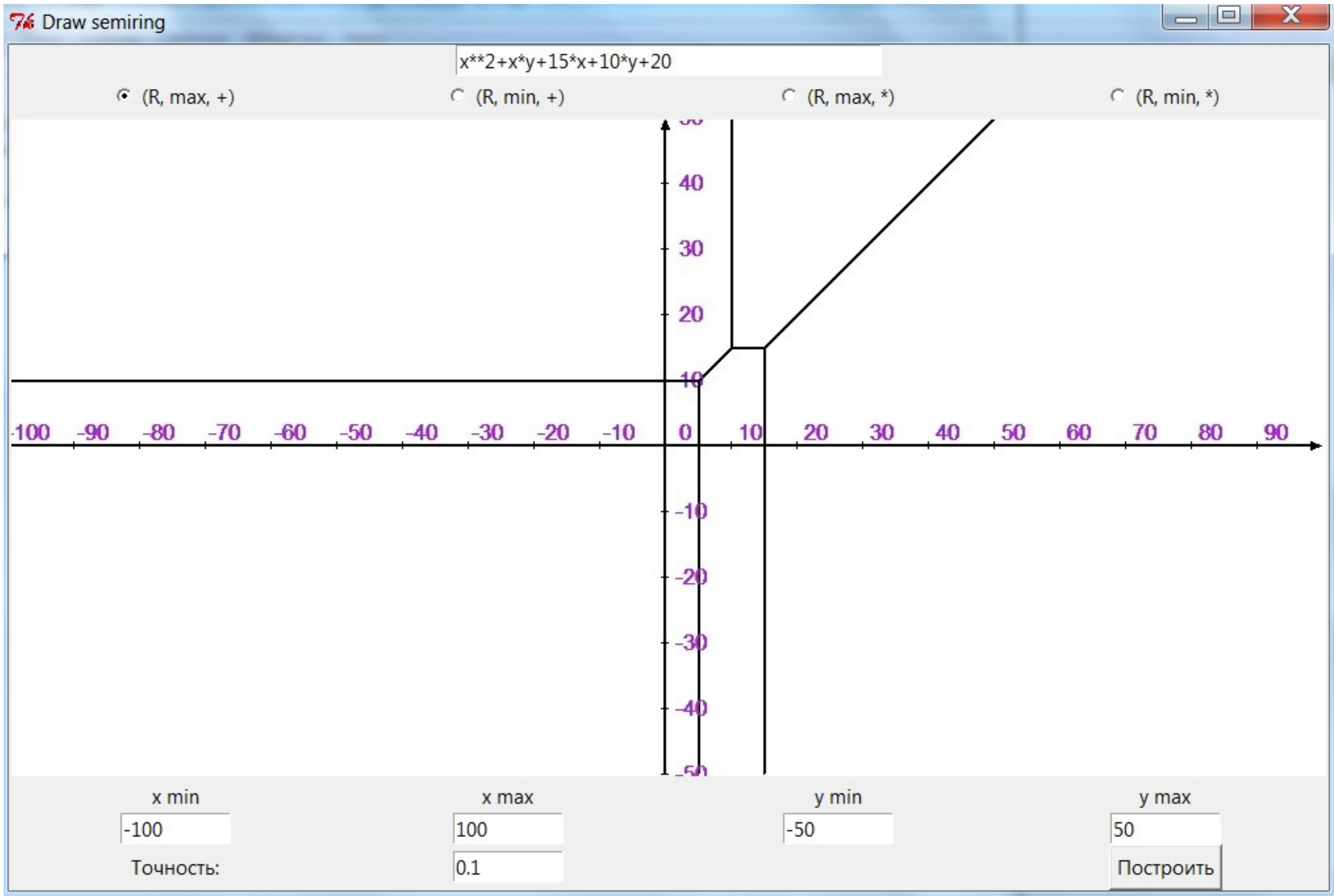

Рис. 8: Работа программы GrafCurves.py

3.2 Построение многочленов по заданным точкам

Следующим этапом стала работа по написанию программы для нахождения многочлена по заданным точкам (Приложение 4). Был разработан алгоритм, который в дальнейшем был реализован на языке программирования Python. Пользователю предлагается ввести степень многочлена и в зависимости от этого предлагается ввести точки, количество которых определяется по следующей формуле:

$$k = \frac{(d+1)\cdot(d+2)}{2} - 1,$$

где k - количество точек, d - степень многочлена. Количество задается именно этой формулой, так как число мономов в многочлене степени d равно $\frac{(d+1)\cdot(d+2)}{2}$, и все многочлены определяются с точностью до умножения на скаляр (умножение в тропическом смысле). Следовательно точек для определения многочлена надо на одну меньше.

После задания пользователем необходимых параметров начинаются вычисления. Формируется система из k многочленов с k неизвестными. Так как многочлены находятся с точностью до умножения на число, то коэффициент при переменных с нулевой степенью мы можем выбрать любым. Он будет равен нулю. Далее мы перебираем все возможные равенства между мономами в каждом из k многочленов и таким образом находим решение в виде массива с числовыми значениями для коэффициентов многочлена. Затем мы выполняем проверку. В каждом из многочленов при подстановке вместо x и y соответствующей точки максимум должен достигаться на двух мономах. Если это условие выполняется для всех многочленов то найденные значения для коэффициентов верны и искомый многочлен найден. Если для какого-либо многочлена это условие не выполняется, то мы продолжаем перебор и ищем решение заново. Если все возможные равенства между мономами мы перебрали, нашли возможные числовые значения для коэффициентов проверили их и ни одно не подошло, то делается вывод, что по заданным точкам многочлен заданной степени построить нельзя, о чем программа сообщает пользователю. Если многочлен найден, то он выводится на экран. Пример работы программы представлен на рисунке 9.

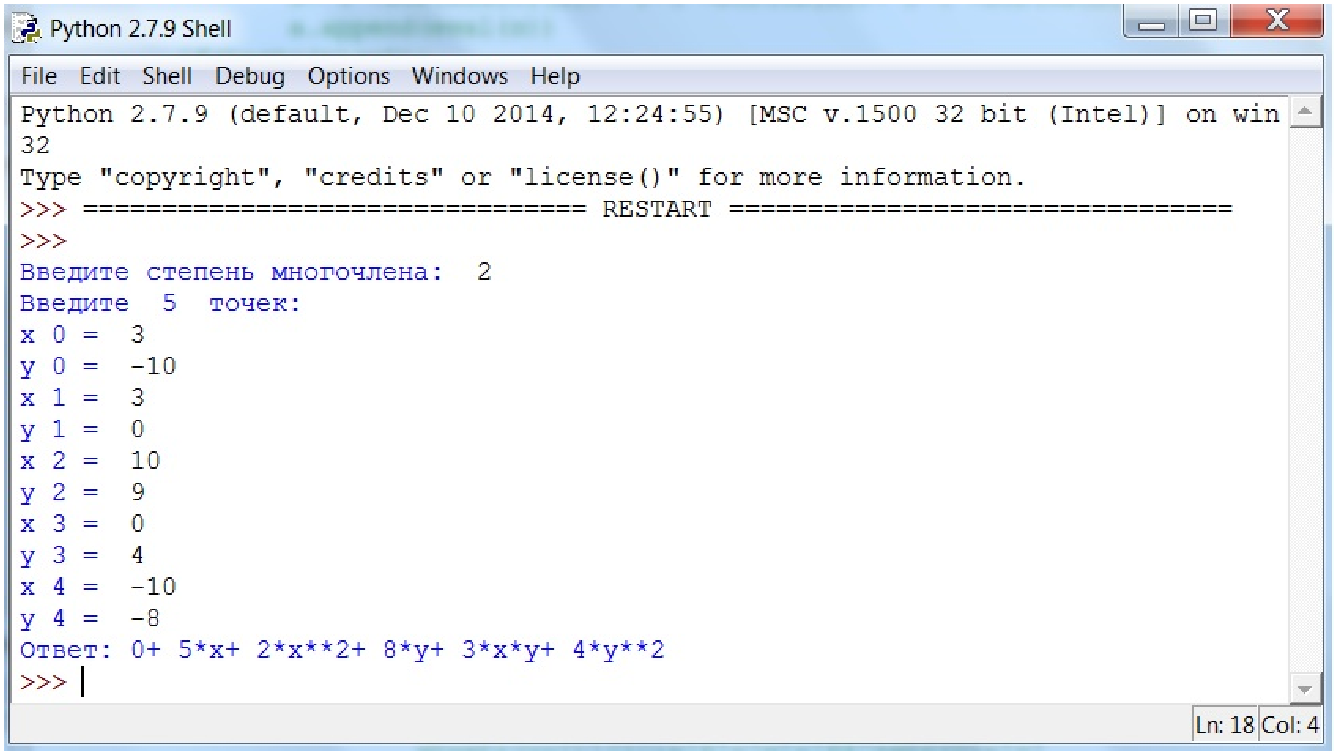

Рис. 9: Работа программы Sol.py

Заключение

В работе были разобраны основные положения теории полуколец. Были рассмотрены важные примеры, приведено доказательство изоморфности некоторых из них. Далее на основе полученной теории начато исследование такой области математики, как тропическая алгебра. Эта наука появилась совсем недавно, но уже имеет много приложений (в частности в теории оптимизации, что представляет большой интерес). Было разобрано, что из себя представляет тропический многочлен, подробно были изучены многочлены до третьей степени, построены графики этих многочленов. Были рассмотрены тропические прямые и дан алгоритм построения их графиков.

Написана программа для построения графиков функций над некоторыми полукольцами. Также разработан и реализован алгоритм по нахождению многочленов по заданным точкам. В дальнейшей работе планируется интегрировать разработанные программы в систему компьютерной алгебры SageMath.

Список литературы

[1] Golan, J. S. Semirings and affine equations over them: theory and applications [Текст]/J. S. Golan. -Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. - 250 с.

[2] Klemperer, P. The Product-Mix Auction: a New Auction Design for Differentiated Goods[Текст]/Klemperer P.// Journal of the European Economic Association. -2010. -№8. - С. 526-536.

[3] Vandiver, H. S. Note on a simple type of algebras in which cancellation law of addition does not hold [Текст]/Vandiver, H. S.// Bull. Am. Math. Soc.-1934. -№40. - С. 914-920.

[4] Вечтомов, Е. М., Введение в полукольца: Пособие для студентов и аспирантов [Текст]/Е. М. Вечтомов. -Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та. 2000. -44 с.

[5] Кривулин, Н. К., Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем [Текст]/Н. К. Кривулин. -СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. - 256 с.

[6] Казарян, М. Э., Тропическая геометрия [Текст]/М. Э. Казарян. -Москва: Изд-во МЦНМО, 2012. - 43 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

Листинг 1: Файл Semirings.py

```
from math import *

class Rmaxplus:
    def __init__(self, x):
        self.x=x
    def __pow__(self, x):
            return Rmaxplus(self.x**x)
    def __mul__(self,other):
        if isinstance(other, Rmaxplus):
            return Rmaxplus(self.x+other.x)
        return Rmaxplus(self.x+other)
    def __rmul__(self, other):
        return self.__mul__(other)
    def __add__(self,other):
        if isinstance(other, Rmaxplus):
            return Rmaxplus(max(self.x, other.x))
        return Rmaxplus(max(self.x, other))
    def __radd__(self, other):
        return self.__add__(other)


class Rminplus:
    def __init__(self, x):
        self.x=x
    def __pow__(self, x):
            return Rminplus(self.x**x)
    def __mul__(self,other):
        if isinstance(other, Rminplus):
                    return Rminplus(self.x+other.x)
```

Листинг 2: Файл Semirings.py(продолжение)

```
        return Rminplus(self.x+other)
    def __rmul__(self, other):
        return self.__mul__(other)
    def __add__(self,other):
        if isinstance(other, Rminplus):
            return Rminplus(min(self.x, other.x))
        return Rminplus(min(self.x, other))
    def __radd__(self, other):
        return self.__add__(other)


class Rmaxmul:
    def __init__(self, x):
        self.x=x
    def __pow__(self, x):
            return Rmaxmul(self.x**x)
    def __mul__(self,other):
        if isinstance(other, Rmaxmul):
            return Rmaxmul(self.x*other.x)
        return Rmaxmul(self.x*other)
    def __rmul__(self, other):
        return self.__mul__(other)
    def __add__(self,other):
        if isinstance(other, Rmaxmul):
            return Rmaxmul(max(self.x, other.x))
        return Rmaxmul(max(self.x, other))
    def __radd__(self, other):
        return self.__add__(other)
```

Листинг 3: Файл Semirings.py(продолжение)

```
class Rminmul:
    def __init__(self, x):
        self.x=x
    def __pow__(self, x):
            return Rminmul(self.x**x)
    def __mul__(self,other):
        if isinstance(other, Rminmul):
            return Rminmul(self.x*other.x)
        return Rminmul(self.x*other)
    def __rmul__(self, other):
        return self.__mul__(other)
    def __add__(self,other):
        if isinstance(other, Rminmul):
            return Rminmul(min(self.x, other.x))
        return Rminmul(min(self.x, other))
    def __radd__(self, other):
        return self.__add__(other)
```

Приложение 2

Листинг 4: Файл GIGraf.py

```
from Semirings import *
from Tkinter import *

def drawAll(xmin, xmax, f):
    h=500
    w=1000
    canv = Canvas(root, width = w, height = h, bg = "white")
    canv.grid(row=2, column=0, columnspan=4)
    canv.create_line(w/2,h,w/2,0,width=2,arrow=LAST)
    canv.create_line(0,h/2,w,h/2,width=2,arrow=LAST)
    xold=xmin
    yold=0

    for i in range(w):
        if (i % (float(w)/20) == 0):
            k = xmin+i/5
            canv.create_line(5*k + w/2, -3 + h/2, 5*k + w/2,
                3 + h/2, width = 0.5, fill = 'black')
            canv.create_text(5*k + w/2+15, -10 + h/2, text =
                str(k), fill="purple", font=("Helvectica", "
               10"))
            if (k != 0):
                canv.create_line(-3 + w/2, 5*k + h/2, 3 + w
                   /2, 5*k + h/2, width = 0.5, fill = 'black'
                   )
                canv.create_text(20 + w/2, 5*k + h/2, text =
                    str(-k), fill="purple", font=("Helvectica
                   ", "10"))
        try:
            if var.get()==1:
```

Листинг 5: Файл GIGraf.py(продолжение)

```
            x = Rmaxplus(xmin +i/5)
        elif var.get()==2:
            x = Rminplus(xmin +i/5)
        elif var.get()==3:
            x = Rmaxmul(xmin +i/5)
        elif var.get()==4:
            x = Rminmul(xmin +i/5)
        y = -5*eval(f).x + h/2
        x = 5*x.x+w/2
        if(i<=w/2 and (var.get()==3 or var.get()==4)):
            y=h/2
        canv.create_line(xold, yold, x, y, width=1, fill
          = 'black')
        yold=y
        xold=x
    except:
        pass

def drawSR(e):
    drawAll(-100, 100, funk.get())
root = Tk()

var = IntVar()

root.title("Draw semiring")

funk=Entry(root, width=40)
funk.grid(row=0, column=0, columnspan=4)

btn = Button(root, text ="Plot")
```

Листинг 6: Файл GIGraf.py(продолжение)

```
btn.grid(row=5, column=3)
btn.bind('<1>', drawSR)

R1 = Radiobutton(root, text="(R, max, +)", variable=var,
    value=1)
R1.grid(row=1, column=0)

R2 = Radiobutton(root, text="(R, min, +)", variable=var,
    value=2)
R2.grid(row=1, column=1)

R3 = Radiobutton(root, text="(R, max, *)", variable=var,
    value=3)
R3.grid(row=1, column=2)

R4 = Radiobutton(root, text="(R, min, *)", variable=var,
    value=4)
R4.grid(row=1, column=3)

lxmin = Label(root, text="x min")
lxmin.grid(row=3, column=0)
Xmin = Entry (root, width=10)
Xmin.grid(row=4, column=0)

lxmax = Label(root, text="x max")
lxmax.grid(row=3, column=1)
Xmax = Entry (root, width=10)
Xmax.grid(row=4, column=1)

lymin = Label(root, text="y min")
```

Листинг 7: Файл GIGraf.py(продолжение)

```
lymin.grid(row=3, column=2)
Ymin = Entry (root, width=10)
Ymin.grid(row=4, column=2)

lymax = Label(root, text="y max")
lymax.grid(row=3, column=3)
Ymax = Entry (root, width=10)
Ymax.grid(row=4, column=3)

root.mainloop()
```

Приложение 3

Листинг 8: Файл GrafCurves.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-
from Semirings import *
from Tkinter import *

def drawAll(xmin, xmax, f):
    h=500
    w=1000
    canv = Canvas(root, width = w, height = h, bg = "white")
    canv.grid(row=2, column=0, columnspan=4)
    canv.create_line(w/2,h,w/2,0,width=2,arrow=LAST)
    canv.create_line(0,h/2,w,h/2,width=2,arrow=LAST)
    t=f.split("+")
    v=[]
    for p in range(len(t)):
        v.append(t[p])
    try:
        z=Rmaxplus(float(t[len(t)-1]))
        t[len(t)-1]="z"
    except:
        pass
    for i in range(w):
        for j in range(h):
            if (i % (float(w)/20) == 0):
                k = xmin+i/5
                canv.create_line(5*k + w/2, -3 + h/2, 5*k +
                    w/2, 3 + h/2, width = 0.5, fill = 'black')
                canv.create_text(5*k + w/2+15, -10 + h/2,
                    text = str(k), fill="purple", font=("
                    Helvectica", "10"))
```

Листинг 9: Файл GrafCurves.py(продолжение)

```
        if (k != 0):
            canv.create_line(-3 + w/2, 5*k + h/2, 3
              + w/2, 5*k + h/2, width = 0.5, fill =
              'black')
            canv.create_text(20 + w/2, 5*k + h/2,
              text = str(-k), fill="purple", font=("
              Helvectica", "10"))
    try:
        if var.get()==1:
            x = Rmaxplus(xmin +float(i)/5)
            y = Rmaxplus(50 - float(j)/5)
        elif var.get()==2:
            x = Rminplus(xmin +i/5)
        elif var.get()==3:
            x = Rmaxmul(xmin +i/5)
        elif var.get()==4:
            x = Rminmul(xmin +i/5)
        """if(i<=w/2 and (var.get()==3 or var.get()
          ==4)):
            y=h/2"""
        b=0
        max=xmin

        for k in range(len(t)):
            v[k]=eval(str(t[k])).x
            if(v[k]>max): max=v[k]
            if(k!=0):
                for g in range(k):
                    if(v[k]==v[g] and v[k]==max):
                        b=1
```

Листинг 10: Файл GrafCurves.py(продолжение)

```
                    qmax=v[k]
                    break
            if(b==1 and qmax==max):
                canv.create_oval(i, j, i+1, j+1, width
                    =0.5, fill = 'black')

        except:
            pass

def drawSR(e):
    drawAll(-100, 100, funk.get())
root = Tk()

var = IntVar()

root.title("Draw semiring")

funk=Entry(root, width=40)
funk.grid(row=0, column=0, columnspan=4)

btn = Button(root, text ="Построить")
btn.grid(row=5, column=3)
btn.bind('<1>', drawSR)

R1 = Radiobutton(root, text="(R, max, +)", variable=var,
    value=1)
R1.grid(row=1, column=0)

R2 = Radiobutton(root, text="(R, min, +)", variable=var,
    value=2)
```

Листинг 11: Файл GrafCurves.py(продолжение)

```
R2.grid(row=1, column=1)

R3 = Radiobutton(root, text="(R, max, *)", variable=var,
    value=3)
R3.grid(row=1, column=2)

R4 = Radiobutton(root, text="(R, min, *)", variable=var,
    value=4)
R4.grid(row=1, column=3)

lxmin = Label(root, text="x min")
lxmin.grid(row=3, column=0)
Xmin = Entry (root, width=10)
Xmin.grid(row=4, column=0)

lxmax = Label(root, text="x max")
lxmax.grid(row=3, column=1)
Xmax = Entry (root, width=10)
Xmax.grid(row=4, column=1)

lymin = Label(root, text="y min")
lymin.grid(row=3, column=2)
Ymin = Entry (root, width=10)
Ymin.grid(row=4, column=2)

lymax = Label(root, text="y max")
lymax.grid(row=3, column=3)
Ymax = Entry (root, width=10)
Ymax.grid(row=4, column=3)
```

Листинг 12: Файл GrafCurves.py(продолжение)

```
toch = Label (root, text="Точность:")
toch.grid(row=5, column=0)
tochf = Entry (root, width=10)
tochf.grid(row=5, column=1)

root.mainloop()
```

Приложение 4

Листинг 13: Файл Sol.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: cp1251 -*-
from Semirings import *

d=0
v=[]
m=0
prov=0
slu=[]

def inputp():
    global d
    global v
    global m
    print("Введите степень многочлена: "),
    d=input()
    m=((d+1)*(d+2)/2-1)
    print 'Введите ', m, ' точек:'
    for i in range(m):
        v.append([])
        print 'x',i,'= ',
        v[i].append(input())
        print 'y',i,'= ',
        v[i].append(input())

def testc(*t):
    global slu
    counter=0
    for i in range(m):
        ver=[]
```

Листинг 14: Файл Sol.py(продолжение)

```
        for j in range(m+1):
            ver.append([])
            verm=slu[i][j].split("+")
            for g in range(3):
                ver[j].append(verm[g])
            ver[j][0]=t[j]
        tq=[]
        for j in range(m+1):
            strq='('+str(ver[j][0])+')+('+str(ver[j][0])+')
              +('+str(ver[j][0])+')'
            ev=eval(strq)
            tq.append(ev)
        max=tq[0]
        for j in range(m+1):
            if(tq[j]>max): max=tq[j]
            if(j!=0):
                for g in range(j):
                    if(tq[j]==tq[g] and tq[j]==max):
                        b=1
                        qmax=tq[j]
                        break
        if(b==1 and qmax==max):
            counter=counter+1
    if (counter==m):
        return 1
    else:
        return 0

def solution():
    global d
```

Листинг 15: Файл Sol.py(продолжение)

```
global v
global m
global slu
global t
global prov

n=d
co=[]
k=0

for i in range(d+1):
    co.append([])
    for j in range(n+1):
        s=str(k)
        s='a'+s
        k=k+1
        co[i].append(s)
    n=n-1

co[0][0]=0
slu=[]
for k in range(m):
    slu.append([])
    n=d
    for i in range(d+1):
        for j in range(n+1):

            s=str(co[i][j])
            x=str(i)+'*'+str(v[k][0])
            y=str(j)+'*'+str(v[k][1])
```

Листинг 16: Файл Sol.py(продолжение)

```
                s=s+'+'+x+'+'+y
                slu[k].append(s)
            n=n-1

    for i in range(m):
        for j in range(m+1):
            print slu[i][j]
        print '\n'
    prov=0
    for i in range(m+1):
        a=[]
        a.append(0)
        for j in range(m+1):
            for l in range(m+1):
                if(l==i): continue
                for z in range(m+1):
                    t1=slu[0][i].split("+")
                    t2=slu[0][j+1].split("+")
                    s='('+str(slu[0][i])+')-('+str(t2[1])+')
                        -('+str(t2[2])+')'
                    a.append(eval(s))
                if(testc(a)==1):
                    prov=1
                    break
def displayp(prov):
    if(prov==1):
        print "Ответ: "
        for i in range(d+1):
            for j in range(n+1):
                if(i==d and j==n):
```

Листинг 17: Файл Sol.py(продолжение)

```
                st=str(co[i][j])+'*'+'x'+'**'+str(i)
                print st
            else:
                if(i==0 and j==0):
                    st=str(co[i][j])+'+'
                if(i==0 and j!=0):
                    st=str(co[i][j])+'*'+'y'+'**'+str(j)
                      +'+'
                if(i!=0 and j==0):
                    st=str(co[i][j])+'*'+'x'+'**'+str(i)
                      +'+'
                if(i!=0 and j!=0):
                    st=str(co[i][j])+'*'+'x'+'**'+str(i)
                      +'*'+'y'+'**'+str(j)+'+'
                print st,
        n=n-1
    else:
        print ("Для заданных точек подходящего многочлена не
            существует.")

inputp()
solution()
displayp(prov)
```