

УДК 532.516.5

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ В ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯ ТОКА – ЗАВИХРЕННОСТЬ

*Е.И. Калинин, А.Б. Мазо*

### Аннотация

Разработан алгоритм расчета нестационарного двумерного течения вязкой жидкости, основанный на решении уравнений Навье–Стокса в преобразованных переменных и позволяющий решать как задачи вынужденного обтекания системы тел, так и задачи с заданными источниками движения в расчетной области. Для определения граничных значений функции тока на твердых стенках постановка дополнена нелокальными условиями, основанными на соотношениях Пирсона.

**Ключевые слова:** численное моделирование, обтекание системы тел, уравнения Навье–Стокса в переменных функция тока – завихренность, граничные условия, интегральные условия Пирсона.

### Введение

При численном решении задачи плоского ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в переменных функция тока  $\psi$  – завихренность  $\omega$  возникают трудности, связанные с формулировкой и реализацией граничных условий прилипания на стенках канала и обтекаемых поверхностях (см. рис. 1). Кроме того, после перехода к преобразованным переменным определяющая система уравнений не содержит давления  $p$ , поэтому постановка задач для течений в канале с заданным перепадом давления затруднительна в рамках данного варианта уравнений Навье–Стокса.

Значения  $\psi$  на границах можно задать из геометрических соображений лишь для простейших симметричных стационарных течений. Однако при моделировании сложных нестационарных течений требуются дополнительные соотношения, определяющие значения функции тока на каждом контуре. В работах [1–3] и ряде других применяются вычислительные схемы, использующие нелокальные условия, полученные интегрированием условий Пирсона [4]; теоретические аспекты рассмотрены в монографии [5].

В настоящей статье данный подход обобщается на случай свободных течений с фиксированными внутри области источниками движения и течений с заданным перепадом давления в канале. Предлагается экономичный конечноэлементный алгоритм численного решения нестационарной системы уравнений Навье–Стокса в преобразованных переменных, дополненной нелокальными условиями.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим течение жидкости в области  $D = [0, L] \times [0, H]$ . Границы области течения обозначим следующим образом: входное и выходное сечения –  $\gamma_{in}$  и  $\gamma_{out}$ , верхняя стенка канала –  $\gamma_0$ , нижняя стенка –  $\gamma_{N+1}$ , границы обтекаемых

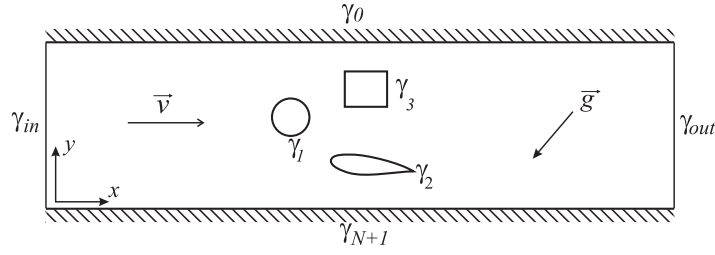


Рис. 1. Схема течения

тел –  $\gamma_i, i = 1, \dots, N$  (рис. 1). В декартовой системе координат система уравнений Навье–Стокса в переменных  $\psi - \omega$  имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega + F, \quad (1)$$

$$-\Delta \psi = \omega, \quad \omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $v_x, v_y$  – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса, слагаемое  $F$  в правой части уравнения (1) определяется через вектор массовых сил  $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$  как

$$F = \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}. \quad (3)$$

На твердых стенках зададим условие прилипания

$$x, y \in \gamma_i : \frac{\partial \psi}{\partial n} = -V_i, \quad \psi = C_i(t), \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad (4)$$

где  $C_i$  – набор неизвестных функций, а  $V_i$  – заданная касательная скорость на контуре  $\gamma_i$ . Для определения  $C_i$  воспользуемся соотношением Пирсона

$$x, y \in \gamma_i : \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial n} - g_s, \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad (5)$$

в котором  $n$  и  $s$  – внешняя нормаль и касательная к границе. Следуя [5], проинтегрируем (5) по границе  $\gamma_i$ . Будем иметь

$$\int_{\gamma_i} \left( \frac{\partial \omega}{\partial n} - \text{Re } g_s \right) ds = \text{Re } [p], \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad (6)$$

где через  $[p]$  обозначен скачок давления вдоль контура  $\gamma_i$ . На замкнутых контурах, очевидно,  $[p] = 0$ , а на стенках канала величина  $[p]$  равна перепаду давления на входном и выходном сечениях. Систему соотношений (6) будем использовать для определения неизвестных  $C_i, i = 0, \dots, N + 1$ . Не нарушая общности, можно положить значение функции тока на нижней стенке равным нулю:  $C_{N+1} = 0$ . Тогда величина  $C_0$ , очевидно, будет равна расходу жидкости в канале.

В настоящей статье рассматриваются течения в прямоугольных областях, где поперечная составляющая скорости набегающего потока в окрестности входного сечения равна нулю:  $v_y \equiv 0, \partial v_y / \partial x \approx 0$ . На границе  $\gamma_{in}$  скорость  $v_x$ , функция тока  $\psi$ , завихренность  $\omega$  и расход  $C_0$  будут связаны соотношениями

$$C_0 = \int_0^H v_x dy, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (7)$$

Представим эпюру входной скорости в виде  $v_x = \tilde{v}_x C_0$ , где функция  $\tilde{v}_x(y)$  – нормированный профиль скорости, интеграл которого по границе  $\gamma_{\text{in}}$  равен единице. В дальнейшем изложении на входном сечении будут рассматриваться однородный поток жидкости, для которого

$$\tilde{v}_x(y) = 1, \quad (8)$$

а также течения с параболическим профилем

$$\tilde{v}_x(y) = -\frac{6}{H^3}y^2 + \frac{6}{H^2}y. \quad (9)$$

Используя соотношения (7), можно записать граничные условия на границе  $\gamma_{\text{in}}$  в виде

$$x, y \in \gamma_{\text{in}} : \quad \psi = P_\psi(y) C_0, \quad \omega = P_\omega(y) C_0, \quad (10)$$

$$P_\psi(y) = \int_0^y \tilde{v}_x dy, \quad P_\omega(y) = -\frac{d\tilde{v}_x}{dy}.$$

На выходном сечении поставим «мягкие» граничные условия

$$x, y \in \gamma_{\text{out}} : \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0. \quad (11)$$

Требуется найти решение системы уравнений (1), (2) с граничными условиями (4), (10), (11) и дополнительными нелокальными соотношениями (6).

## 2. Метод численного решения

Проведем дискретизацию с шагом  $\tau$  по времени уравнения (1) таким образом, чтобы избавиться от нелинейности уравнения переноса завихренности:

$$\omega - \frac{\tau}{\text{Re}} \Delta \omega = -\tau \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\omega} + \tau F + \tilde{\omega}. \quad (12)$$

$$-\Delta \psi = \tilde{\omega}. \quad (13)$$

Здесь использовано стандартное обозначение  $\tilde{u}(t) = u(t - \tau)$ . На каждом временном слое уравнения (12), (13) решаются с граничными условиями (4) на твердых стенках  $\gamma_i$ , причем условие Дирихле используется для уравнения (13), а с помощью условий Неймана для  $\psi$  формулируются граничные условия первого рода для  $\omega$

$$x, y \in \gamma_i : \quad \omega = \tilde{\omega}, \quad i = 0, \dots, N + 1 \quad (14)$$

Для отыскания функции  $\tilde{\omega}$  решается линейная задача [6]

$$\tilde{\omega} = -\Delta \psi, \quad x, y \in \gamma_i : \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = -V_i, \quad i = 0, \dots, N + 1. \quad (15)$$

Заметим, что функция тока  $\psi$  на текущем временном слое определяется набором констант  $C_i$ , поэтому и завихренность  $\omega$  будет зависеть от этих констант. Задачи (12), (13), (15) линейны, следовательно, можно записать линейное представление искомых функций через  $C_i$ :

$$\psi = \psi^* + \sum_{i=0}^N \psi^i C_i, \quad \omega = \omega^* + \sum_{i=0}^N \omega^i C_i, \quad (16)$$

в котором функции  $\psi^*$ ,  $\psi^i$ ,  $\omega^*$ ,  $\omega^i$  подлежат определению. Множители  $C_i$  будут найдены из системы уравнений

$$\sum_{j=0}^N I_i^j C_j = I_i^* + \operatorname{Re}[p], \quad i = 0, \dots, N, \quad (17)$$

полученной с помощью подстановки представления (16) в интегральные соотношения (6). Коэффициенты алгебраической системы (17) равны

$$I_i^j = \int_{\gamma_i} \frac{\partial \omega^j}{\partial n} ds, \quad I_i^* = \int_{\gamma_i} \left( -\frac{\partial \omega^*}{\partial n} + \operatorname{Re} g_s \right) ds, \quad i = 0, \dots, N.$$

Для определения функций  $\psi^*$ ,  $\psi^i$  сформулируем вспомогательные задачи. Подставим представление функции тока из (16) в линейное уравнение Пуассона (13). Будем иметь:

$$-\Delta \psi^* - \sum_{i=0}^N \Delta \psi^i C_i = \check{\omega}.$$

Поскольку правая часть полученного равенства не зависит от констант  $C_i$ , можно разбить его на  $N + 2$  уравнения следующим образом:

$$-\Delta \psi^* = \check{\omega}; \quad -\Delta \psi^i = 0, \quad i = 0, \dots, N. \quad (18)$$

Граничные условия Дирихле для уравнений (18) получаются подстановкой разложения (16) в (4) и (10):

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_i : \quad \psi^* + \sum_{j=0}^N \psi^j C_j &= C_i, \\ x, y \in \gamma_{\text{in}} : \quad \psi^* + \sum_{j=0}^N \psi^j C_j &= P_\psi(y) C_0. \end{aligned}$$

Приравнивая члены при  $C_i$ , получим

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_i : \quad \psi^* &= 0, \quad \psi^j = \delta_j^i, \\ x, y \in \gamma_{\text{in}} : \quad \psi^* &= 0, \quad \psi^j = \delta_j^0 P_\psi(y), \end{aligned} \quad i, j = 0, \dots, N. \quad (19)$$

Здесь  $\delta_i^j$  – символ Кронекера. Аналогично получаем граничные условия на выходном сечении:

$$x, y \in \gamma_{\text{out}} : \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \psi^i}{\partial n} = 0. \quad (20)$$

Вспомогательные задачи (18)–(20) не содержат констант  $C_i$ ; кроме того, уравнения для  $\psi^i$  не зависят от времени, поэтому могут быть решены один раз до начала счета.

Аналогично, подставляя (16) в (12), получим уравнения для вспомогательных функций  $\omega^*$ ,  $\omega^i$ :

$$A\omega^* = b; \quad A\omega^i = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (21)$$

где

$$A = E - \frac{\tau}{\operatorname{Re}} \Delta, \quad b = \check{\omega} - \tau \check{\mathbf{v}} \cdot \nabla \check{\omega} + \tau F.$$

Граничные условия для уравнений (21) получаются в результате подстановки (16) в исходные граничные условия (4), (10), (11) для  $\omega$  и приравнивания коэффициентов при  $C_i$ :

$$\begin{aligned} x, y \in \gamma_i: \quad \omega^* &= \tilde{\omega}^*, \quad \omega^i = \tilde{\omega}^i, \\ x, y \in \gamma_{\text{in}}: \quad \omega^* &= 0, \quad \omega^i = \delta_i^0 P_\omega(y), \\ x, y \in \gamma_{\text{out}}: \quad \frac{\partial \omega^*}{\partial n} &= 0, \quad \frac{\partial \omega^i}{\partial n} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Функции  $\tilde{\omega}^*$ ,  $\tilde{\omega}^i$  определяются как решения задач

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^* &= -\Delta \psi^*, \quad x, y \in \gamma_j: \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial n} = -V_j \\ \tilde{\omega}^i &= -\Delta \psi^i, \quad x, y \in \gamma_j: \quad \frac{\partial \psi^i}{\partial n} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

следующих из (15).

В задачах (21)–(23) для  $\omega^i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , правые части равны нулю, а граничные условия зависят только от  $\psi^i$ , которые, как отмечалось ранее, не зависят от времени. Следовательно, и функции  $\omega^i$  могут быть найдены до начала вычислений; непосредственно на каждом временном слое нужно решить задачи лишь для функций  $\psi^*$ ,  $\omega^*$ , после чего найти константы  $C_i$  из системы (17). Тогда значения искомого функций  $\psi$ ,  $\omega$  на слое будут получены по формулам (16).

Для определения коэффициентов  $I_i^j$ ,  $I_i^*$  системы (17) необходимо найти значения нормальных производных  $\partial \omega^i / \partial n$ ,  $\partial \omega^* / \partial n$  на твердых стенках. Ниже представлен способ вычисления этих производных в рамках метода конечных элементов.

Выделим узел конечноэлементной сетки с координатами  $(x_i, y_i)$ , лежащий на границе  $\gamma_k$ . Вычислим значения  $\partial \omega^* / \partial n$  в этом узле. Для этого домножим первое уравнение (21) на пробную функцию  $\phi_i$ , равную единице в выделенном узле и нулю во всех остальных. После интегрирования по области придем к соотношению

$$\int_{\gamma_k} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} \phi_i' ds = \frac{\text{Re}}{\tau} \int_D \left( \omega^* \phi_i + \frac{\tau}{\text{Re}} \nabla \omega^* \cdot \nabla \phi_i - b \phi_i \right) dD \equiv \Phi_i^*, \quad (24)$$

где  $\phi_i'$  – след базисной функции  $\phi_i$  на границе  $\gamma_k$ . Чтобы найти производную  $\partial \omega^* / \partial n$  в выделенном узле  $i$ , интеграл в левой части этого уравнения вычислим с помощью квадратурной формулы

$$\int_{\gamma} f(s) ds \approx \sum_l f(s_l) h_l, \quad h_l = \int_{\gamma} \phi_l' ds,$$

в которой  $s_l$  – узлы интегрирования, совпадающие с узлами сетки, а  $h_l$  – весовые коэффициенты. В результате получим

$$\int_{\gamma_k} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} \phi_i' ds \approx \sum_l \frac{\partial \omega^*}{\partial n} \phi_i'(x_l, y_l) h_l = \sum_l \frac{\partial \omega^*}{\partial n} \delta_l^i h_l = \frac{\partial \omega^*}{\partial n} h_i. \quad (25)$$

Заменяя левую часть (24) на (25), найдем:

$$\frac{\partial \omega_i^*}{\partial n} = \frac{\Phi_i^*}{h_i}. \quad (26)$$

Аналогично получим выражения для определения узловых значений  $\partial\omega_i^j/\partial n$  нормальных производных на твердых стенках:

$$\frac{\partial\omega_i^j}{\partial n} = \frac{\Phi_i^j}{h_i}, \quad \Phi_i^j = \int_D \left( \frac{\text{Re}}{\tau} \omega^j \phi_i + \nabla\omega^j \cdot \nabla\phi_i \right) dD. \quad (27)$$

Итак, алгоритм численного решения нестационарной задачи (1), (2) состоит из шага инициализации и цикла по времени.

На шаге инициализации сначала решается  $N+1$  задача (18)–(20) для вспомогательных функций  $\psi^i$ . Эти функции подставляются в соотношения (15), из которых находятся функции  $\tilde{\omega}^i$ , определяющие граничные значения  $\omega^i$  на  $\gamma_j$  (22). Сами функции  $\omega^i$ ,  $i = 0, \dots, N$  находятся как решения задач (21), (22). По формулам (27) подсчитываются производные  $\partial\omega^i/\partial n$ , после чего вычисляются коэффициенты  $I_i^j$  системы уравнений (17).

На каждом шаге временного цикла сначала решается одна задача (18)–(20) для вспомогательной функции  $\psi^*$ . Она подставляется в соотношение (15), из которого находится функция  $\tilde{\omega}^*$ , определяющая граничные значения  $\omega^*$  на  $\gamma_j$  (22). Сама функция  $\omega^*$  находится как решение задачи (21), (22). По формуле (26) подсчитывается производная  $\partial\omega^*/\partial n$ , после чего вычисляются коэффициенты  $I_j^*$  правой части системы уравнений (17). Решение этой алгебраической системы дает набор констант  $C_i$ , которые вместе с найденными вспомогательными функциями  $\psi^i$ ,  $\omega^i$ ,  $\psi^*$ ,  $\omega^*$  позволяют найти решение  $\psi$ ,  $\omega$  задачи на текущем временном слое по формулам (16).

### 3. Тестирование метода

Для проверки разработанного численного алгоритма рассмотрим три репрезентативных тестовых задачи, которые дают возможность оценить его эффективность для расчета течений с изменяющимися во времени константами  $C_i$ , наличием касательной скорости на обтекаемых телах и термоконвективных течений с внутренними источниками движения.

#### 3.1. Течение с периодическим изменением функции тока на теле [3].

Это течение в области  $D = [-3\pi, 3\pi] \times [-3\pi, 3\pi]$  с помещенным в ее центр телом  $\gamma$  в виде квадрата со стороной  $2\pi$  определено функциями

$$\begin{aligned} \psi_e(x, y, t) &= (\cos x + \cos y + \cos x \cos y) \cos t, \\ \omega_e(x, y, t) &= -\Delta\psi_e = (\cos x + \cos y + 2 \cos x \cos y) \cos t. \end{aligned} \quad (28)$$

При соответствующем выборе слагаемого  $F$  эти функции удовлетворяют уравнениям (1), (2), периодическим граничным условиям прилипания

$$\gamma : \quad \psi_e = C_e(t) = -\cos t, \quad \frac{\partial\psi_e}{\partial n} = 0, \quad (29)$$

а также нелокальному соотношению

$$\int_{\gamma} \frac{\partial\omega_e}{\partial n} ds = 0. \quad (30)$$

В качестве начальных условий и условий Дирихле на внешних границах области для функций  $\psi_e$  и  $\omega_e$  будем использовать точные значения (28).

Табл. 1

Погрешность численного решения при  $t = 2\pi$ 

N	$\ \psi - \psi_e\ _C$	$\ \psi - \psi_e\ _2$	$\ \omega - \omega_e\ _C$	$\ \omega - \omega_e\ _2$	$ C - C_e $
880	$2.166 \cdot 10^{-1}$	$7.340 \cdot 10^{-2}$	$2.345 \cdot 10^{-1}$	$5.370 \cdot 10^{-2}$	$1.429 \cdot 10^{-2}$
8448	$2.085 \cdot 10^{-2}$	$7.074 \cdot 10^{-3}$	$5.978 \cdot 10^{-2}$	$7.660 \cdot 10^{-3}$	$1.394 \cdot 10^{-3}$
13120	$1.321 \cdot 10^{-2}$	$4.501 \cdot 10^{-3}$	$3.731 \cdot 10^{-2}$	$4.848 \cdot 10^{-3}$	$8.986 \cdot 10^{-4}$
18816	$9.118 \cdot 10^{-3}$	$3.107 \cdot 10^{-3}$	$2.666 \cdot 10^{-2}$	$3.376 \cdot 10^{-3}$	$6.271 \cdot 10^{-4}$

Табл. 2

Погрешность численного решения при  $t = 4\pi$ 

N	$\ \psi - \psi_e\ _C$	$\ \psi - \psi_e\ _2$	$\ \omega - \omega_e\ _C$	$\ \omega - \omega_e\ _2$	$ C - C_e $
880	$2.255 \cdot 10^{-1}$	$7.798 \cdot 10^{-2}$	$2.340 \cdot 10^{-1}$	$6.420 \cdot 10^{-2}$	$1.403 \cdot 10^{-2}$
8448	$2.243 \cdot 10^{-2}$	$7.656 \cdot 10^{-3}$	$5.863 \cdot 10^{-2}$	$9.421 \cdot 10^{-3}$	$1.385 \cdot 10^{-3}$
13120	$1.421 \cdot 10^{-2}$	$4.868 \cdot 10^{-3}$	$3.819 \cdot 10^{-2}$	$6.026 \cdot 10^{-3}$	$8.894 \cdot 10^{-4}$
18816	$9.804 \cdot 10^{-3}$	$3.355 \cdot 10^{-3}$	$2.788 \cdot 10^{-2}$	$4.211 \cdot 10^{-3}$	$6.192 \cdot 10^{-4}$

Тестовый расчет производился с числом Рейнольдса  $Re = 10^2$  на регулярной сетке билинейных конечных элементов с шагом по времени  $\tau = 0.02$ . На каждом временном слое значение  $C$  подсчитывалось с помощью условия (30) по описанной ранее процедуре и сравнивалось с точным значением  $C_e = -\cos t$ .

В табл. 1, 2 представлены максимальные  $\|\cdot\|_C$  и среднеквадратичные  $\|\cdot\|_2$  отклонения сеточных решений  $\psi$ ,  $\omega$  от точных  $\psi_e$ ,  $\omega_e$ , а также ошибки определения на моменты  $t = 2\pi$ ,  $4\pi$ . Видно, что погрешность в определении константы  $C$  не возрастает со временем и составляет от 1.5% для сетки с числом узлов  $N = 880$  до 0.06% для сетки с числом узлов  $N = 18816$ .

**3.2. Обтекание системы вращающихся круговых цилиндров [9].** Это вынужденное течение в области  $D = [0, 80] \times [0, 40]$  с помещенными в нее двумя цилиндрами единичного диаметра, с центрами в точках  $(40, 38.75)$ ,  $(40, 41.25)$ . На входе задан однородный поток жидкости (8). Скорость вращения цилиндров задана таким образом, что  $V_1 = -V_2$ , при этом вращение нижнего цилиндра направлено против часовой стрелки.

Был проведен ряд тестовых расчетов при  $Re = 10^2$ ,  $0 \leq |V_i| \leq 3$ . При этом течение имеет автоколебательный характер. Для сопоставления результатов расчета с полученными в [9] определялись осредненные по периоду колебаний коэффициенты сопротивления  $C_d$  и подъемной силы  $C_l$ , а также число Струхала  $Sh$ . В работе [9] эти параметры течения рассчитывались с помощью метода конечных объемов для решения уравнений Навье–Стокса в естественных переменных.

Задача решалась с шагом по времени  $\tau = 0.005$  на неструктурированной сетке из 31715 билинейных элементов ( $N = 31452$ ) с локальным сгущением узлов около обтекаемых тел. В качестве начального условия выбиралось состояние покоя. При заданной скорости на входном сечении расход жидкости в канале  $C_0$  явно вычисляется по формуле (7), поэтому в задачах вынужденного обтекания применять условие (6) для границы  $\gamma_0$  не нужно, достаточно заменить соответствующее уравнение системы (17).

Картина течения при  $|V_i| = 1.3$  представлена на рис. 2. Изменение величин  $C_i$  со временем для различных скоростей вращения показано на рис. 3.

Отклонение полученных значений коэффициента сопротивления  $C_d$  от результатов, представленных в [9], составило не более 4%, подъемной силы  $C_l$  – не более 0.86%, числа Струхала  $Sh$  – не более 1.26%.

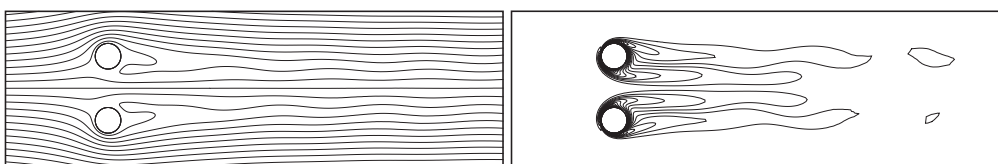


Рис. 2. Линии тока и поле завихренности течения вокруг пары вращающихся круговых цилиндров при  $Re = 100, |V_i| = 1.3$

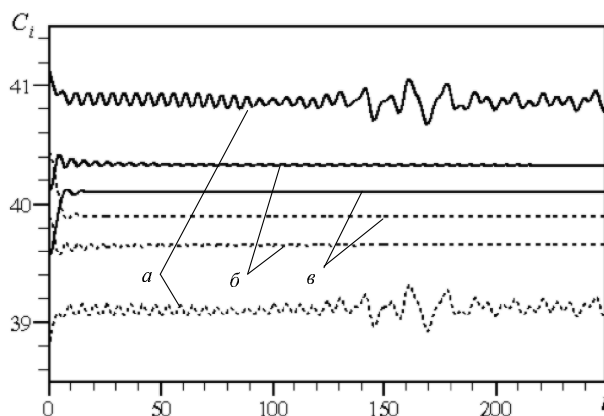


Рис. 3. Изменение величин  $C_i$  со временем при  $Re = 100$ : а)  $|V_i| = 0$ ; б)  $|V_i| = 1.3$ ; в)  $|V_i| = 2$ . Сплошная линия соответствует верхнему цилиндру, пунктирная – нижнему

**3.3. Естественная конвекция в канале около нагретого цилиндра [10].** Для иллюстрации работы алгоритма в случае, когда расход жидкости  $C_0$  неизвестен заранее и меняется со временем, моделировалась естественная конвекция в вертикальном канале  $D = [0, 20] \times [0, 2.5]$  с помещенным в него квадратным нагревателем. На поверхности нагревателя температура  $T = 1$ , стенки канала теплоизолированы, а на входном сечении  $T = 0$ .

На стенках канала и поверхности нагревателя ставятся условия прилипания (4), а на входном сечении задается параболический нормированный профиль скорости (9). Скачок давления вдоль стенки канала в интегральном условии (6) принимается равным нулю. Вектор массовых сил, входящий в систему уравнений Навье – Стокса (1)–(3) и граничные условия (5), (6), в приближении Буссинеска равен  $\mathbf{g} = (T, 0)$  [11]. Для определения температурного поля дополнительно решается уравнение конвективной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr Re} \Delta T.$$

Здесь  $Pr$  – число Прандтля.

Расчеты проводились при  $Pr = 0.72, 10 \leq Re \leq 500$  на сетке, содержащей 16690 узлов. Для аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении переноса завихренности использовался TVD-подход с ограничителем MC, описанный в [7, 8].

Наблюдается хорошее согласование картины установившегося течения со стационарным решением, полученным в работе [10] (рис. 4, в, г). Разница в значениях



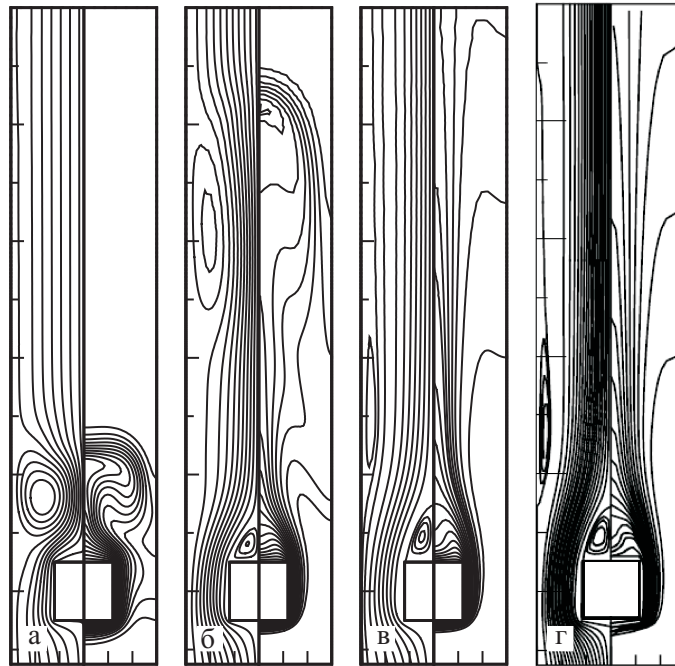


Рис. 4. Линии тока и поле температур конвективного течения при  $Re = 100$ ,  $Pr = 0.72$  на моменты: а)  $t = 10$ ; б)  $t = 20$ ; в)  $t = 50$  в сравнении со стационарным решением [10] (2)

расхода  $C_0$  составляет не более 2%, а отклонения чисел Нуссельта

$$Nu = \int_{\gamma} \frac{\partial T}{\partial n} ds$$

не превышает 2.5%.

Таким образом, результаты тестирования показывают, что предложенный метод численного решения уравнений Навье – Стокса в преобразованных переменных позволяет адекватно моделировать как вынужденное обтекание системы тел, так и сложные конвективные процессы с заданными внутри области источниками движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 08-01-00548-а, 08-01-00163-а, 07-01-00499-а).

### Summary

*E.I. Kalinin, A.B. Mazo.* Numerical Simulation of Flow around a System of Bodies in Stream Function – Vorticity Variables.

A numerical algorithm for simulating non-stationary viscous 2D flows based on solving Navier – Stokes equations in stream function – vorticity variables is developed. The algorithm allows to model the forced flows as well as the complex convective flows around a system of bodies in channel. Problem definition is amplified with nonlocal integral equalities based on Pearson conditions in order to obtain boundary values of stream function.

**Key words:** numerical simulation, flow around a system of bodies, Navier – Stokes equations in stream function – vorticity variables, boundary conditions, integral Pearson conditions.

## Литература

1. *Mizukami A.* A stream function-vorticity finite element formulation for Navier–Stokes equations in multiconnected domain // *Int. J. Numer. Methods. Eng.* – 1983. – No 19. – P. 1403–1409.
2. *Tezduyar T.* Finite element formulation for the vorticity-stream function form of the incompressible Euler equations on multi-connected domains // *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* – 1989. – V. 73, No 3. – P. 331–340.
3. *Liu J.-G., Wang C.* High order finite difference methods for unsteady incompressible flows in multi-connected domains // *Computers & Fluids.* – 2004. – No 33. – P. 223–255.
4. *Флетчер К.* Вычислительная гидродинамика. Ч. 2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
5. *Glovinski R.* Finite element methods for incompressible viscous flow // *Handbook of numerical analysis. V. 9. Numerical Methods for Fluids (Part 3).* – Elsevier Science B.V., 2003. – 1176 p.
6. *Мазо А.Б., Даутов Р.З.* О граничных условиях для уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока–завихренность при моделировании обтекания системы тел // *Инженерно-физ. журн.* – 2005. – Т. 78, № 2. – С. 75–79.
7. *Kuzmin D., Turek S.* High-resolution FEM-TVD schemes based on a fully multidimensional flux limiter // *J. Comp. Phys.* – 2004. – No 198. – P. 131–158.
8. *Мазо А.Б., Калитин Е.И.* Решение задач обтекания в переменных «функция тока–вихрь» методом конечных элементов с применением TVD-подхода // *Модели и методы аэродинамики: Материалы 8-й междунар. школы-семинара.* – М.: МЦНМО, 2008. – С. 100–101.
9. *Hyun Sik Yoon, Ho Hwan Chun, Jeong Hu Kim, I.L. Ryong Park* Flow characteristics of two rotating side-by-side circular cylinder // *Computers & Fluids.* – 2009. – No 38. – P. 466–474.
10. *Khodary K., Bhattacharyya T.K.* Optimum natural convection from square cylinder in vertical channel // *Int. J. Heat Fluid Flow.* – 2006. – No 27. – P. 167–180.
11. *Мазо А.Б.* Численное моделирование свободной конвекции вязкой жидкости в канале с нагретым цилиндром // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 141–147.

Поступила в редакцию  
27.04.09

---

**Калинин Евгений Игоревич** – аспирант кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

E-mail: *kalininei@yandex.ru*

**Мазо Александр Венцианович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

E-mail: *amazo@ksu.ru*