УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 1 Физико-математические науки *2009*

УДК 535.1+535.4

УПРАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА ПУТЕМ ВНЕСЕНИЯ СЛОЯ МЕТАМАТЕРИАЛА

Д.О. Сапарина, А.П. Сухоруков

Аннотация

В данной работе исследованы волноводные моды, собственные частоты и области устойчивости резонатора, содержащего слои метаматериала с отрицательным показателем преломления. Характеристики такого резонатора определяются величинами эффективной дифракционной и дисперсионной длин, которые, в отличие от обычных резонаторов, могут принимать как положительные, так отрицательные или нулевые значения. Таким образом, становится возможным управление свойствами резонатора путем внесения слоя метаматериала с соответствующими параметрами.

Ключевые слова: открытый резонатор, метаматериал, отрицательный показатель преломления, слоистая структура, дифракция, поперечная мода, дисперсия, продольная мода, устойчивость.

Введение

Метаматериалы с отрицательным показателем преломления представляют собой искусственные периодические структуры, составленные из резонансных элементов, размеры которых меньше длины волны. Данные резонансные элементы играют роль атомов в обычных средах, и при подобранных специальным образом параметрах состоящая из них среда обладает отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями. В работе В. Веселаго [1] показано, что если диэлектрическая и магнитная проницаемости среды одновременно отрицательны, то показатель преломления среды $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ также отрицателен. В таких средах направления распространения волны и потока энергии противоположны, а вектора напряженностей электрического и магнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ составляют не правую, а левую тройку, поэтому часто такие среды называют так же «левыми» средами.

В настоящее время созданы метаматериалы, обладающие отрицательными диэлектрической, магнитной проницаемостями и отрицательным преломлением в микроволновом [2–4], терагерцовом [5], инфракрасном [6, 7] и оптическом [8–11] диапазонах частот. Широкое применение метаматериалов сдерживается присутствующим в них сравнительно большим поглощением. В настоящее время разработан способ компенсировать это поглощение при помещении резонансных элементов метаматериала в специальную активную среду с накачкой [12, 13]. Применение активной среды позволяет достичь не только полной компенсации потерь, а также и усиления сигнала. Таким образом, метаматериал может выступать в роли активной среды резонатора.

Интерес к материалам с отрицательным показателем преломления обусловлен возможностью создания принципиально новых микроволновых и оптических устройств. При наклонном падении волны из воздуха на метаматериал возникает

отрицательная рефракция, вследствие чего плоскопараллельная пластина может фокусировать расходящийся пучок лучей подобно линзе [1]. Дж. Пендри было показано, что такая пластина может усиливать компоненты ближнего поля источника [14]. Таким образом могут быть разрешены субволновые детали изображения, что и послужило причиной названия такой пластины «суперлинзой». По аналогии с линзовой линией может быть изготовлена слоистая структура, содержащая слои метаматериала с отрицательным показателем преломления, в которой возможно осуществить волноводное распространение пучков [15]. Такая структура имеет ряд особенностей, в частности, пучки любых профилей являются её модами и распространяются без дифракционного расплывания.

Впервые распространение плоских волн в резонаторе Фабри – Перо, содержащем плоскопараллельный слой среды с отрицательным показателем преломления, было рассмотрено Н. Энгента [16]. Набег фазы, приобретаемый плоской волной при полном обходе такого резонатора, определяется выражением $\varphi = k_0 L_{\text{opt}}$ и должен быть кратным 2π. В обычном резонаторе это условие выполнено, если длина резонатора кратна половине длины волны, то есть минимальная длина резонатора $L_{\min} = \lambda/2$. Отличие резонатора с метаматериалом состоит в том, что оптическая длина двух слоев с положительным $n_1 > 0$ и отрицательным $n_2 < 0$ показателями преломления может быть равна нулю: $L_{\text{opt}} = l_1 n_1 + l_2 n_2 = 0$. Следовательно, условие кратности длины резонатора половине длины волны снимается, она может быть произвольной, в том числе и меньшей половины длины волны, то есть возможно изготовление субволнового резонатора. Например, для частоты 2 ГГц длина резонатора может составить всего 3 см при длине каждого слоя $\lambda/10$ вместо минимальной длины 7.5 см, требуемой в обычном случае [16]. В работе [17] описан эксперимент, проведенный с резонатором, содержащим аналоги обычных и «левых» сред, подтверждающий перечисленные теоретические результаты.

Данная работа посвящена исследованию свойств резонатора, содержащего слои метаматериала: условий существования и профилей волноводных мод, спектра собственных частот, условий устойчивости.

1. Собственные моды и частоты резонатора с метаматериалом

1.1. Собственные моды в виде пучков Эрмита – Гаусса. Рассмотрим резонатор, содержащий плоскопараллельные слои метаматериала с отрицательным преломлением, перпендикулярные оптической оси резонатора. Будем считать, что волновые сопротивления сред $z_i = \sqrt{\mu_i/\varepsilon_i}$ согласованы и френелевское отражение от их границ отсутствует. Будем также считать, что в средах нет поглощения или оно компенсируется при помощи описанных в [12, 13] механизмов.

Для рассмотрения условий существования, профилей и устойчивости волноводных мод удобно воспользоваться такой характеристикой среды, содержащей N слоев с различными показателями преломления, как её эффективная дифракционная длина:

$$L_{\text{dif}} = \sum_{j=1}^{j=N} \frac{l_j}{n_j},$$

где l_j – длины слоев, а n_j – их показатели преломления. Примечательно, что если внутри мета-резонатора находятся слои с отрицательным показателем преломления, то величина эффективной дифракционной длины L_{dif} может принимать отрицательные и нулевые значения. Напомним, что в обычном резонаторе величина L_{dif} строго положительна и по порядку совпадает с геометрической длиной резонатора, так как $n_j \sim 1$.

В работе [18] рассмотрены собственные моды резонатора с метаматериалом, имеющие вид гауссовых или обобщенных гауссовых пучков. Профили волноводных мод и условия их существования могут быть получены путем решения параболического уравнения дифракции:

$$\frac{\partial A(x,y,z)}{\partial z} + iD(z)\Delta_\perp A(x,y,z) = 0, \tag{1}$$

где $D(z) = D_0/n_j(z)$ – коэффициент дифракции в j-м слое, $D_0 = 1/2k_0$ – коэффициент дифракции в вакууме, с учетом повторяемости амплитудного профиля пучка $A(x,y)$ после одного полного обхода резонатора. Собственными волноводными модами метарезонаторов являются гауссовы и обобщенные гауссовы пучки, в частности, пучки Эрмита–Гаусса:

$$A(x,y) = H_{m,n}(x,y)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{a_j^2} - i\frac{k_0 n_j(x^2+y^2)}{2R_j^2}\right), \tag{2}$$

где $m,n = 0,1,2,\ldots$ – индексы поперечных мод, R_j – радиусы кривизны зеркал, a_j – радиусы пучков на зеркалах, равные:

$$a_j^2 = \frac{2L_{\text{dif}}}{k_0|1-L_{\text{dif}}/R_j|}\sqrt{\frac{(1-L_{\text{dif}}/R_1)(1-L_{\text{dif}}/R_2)}{L_{\text{dif}}/R_1 + L_{\text{dif}}/R_2 - L_{\text{dif}}^2/R_1R_2}}.$$

Собственные частоты мод (2) могут быть рассчитаны из условия равенства нулю электрического поля на зеркалах:

$$\frac{2L_{\text{opt}}\nu_{mnq}}{c} = q + (n+m+1)\pi^{-1}\arccos\sqrt{\left(1-\frac{L_{\text{dif}}}{R_1}\right)\left(1-\frac{L_{\text{dif}}}{R_2}\right)}, \tag{3}$$

где индексы $q = 0,1,2,\ldots$ соответствуют различным продольным модам. Величина $L_{\text{opt}} = \sum\limits_{j=1}^{j=N} l_j n_j$ представляет собой оптическую длину резонатора.

1.2. Собственные моды произвольного профиля. Особо следует рассматривать резонатор с нулевой эффективной дифракционной длиной. Ранее [19] нами были рассмотрены волноводные моды двухслойного резонатора. В настоящей работе проведем обобщение полученных результатов на метарезонаторы, состоящие из произвольного числа слоев N с различными показателями преломления n_j, исследуем собственные частоты, соответствующие этим модам и условия устойчивости.

Из уравнения дифракции (1) для огибающей $A(x,y,z)$ может быть получено уравнение для её Фурье-компонент $S(x,y,z)$:

$$\frac{\partial S(k_x,k_y,z)}{\partial z} - iD(z)(k_x^2+k_y^2)S(k_x,k_y,z) = 0,$$

решая которое, получим:

$$S(k_x,k_y,z=L) = S(k_x,k_y,z=0)\exp(iD(z)(k_x^2+k_y^2)z) = \\ = S(k_x,k_y,0)\exp(iD_0(k_x^2+k_y^2)L_{dif}).$$

Таким образом, после прохождения слоистой структуры с нулевой дифракционной длиной $L_{\text{dif}} = 0$ волновой фронт пучка в точности совпадает с начальным,

то есть происходит полная компенсация дифракции. Для выполнения условия повторяемости после полного обхода резонатора необходимо согласование радиусов кривизны зеркал:

$$\frac{n_1}{R_1} + \frac{n_N}{R_2} = 0.$$

Вследствие полной компенсации дифракции фазовые набеги для пучков различных профилей совпадают и равны набегу фазы, приобретаемому плоской волной при обходе резонатора. Следовательно, собственные частоты резонатора с нулевой эффективной дифракционной длиной определяются выражением:

$$2L_{\text{opt}}\nu_q = qc,$$

совпадающим с (3), если положить в нем $L_{\text{dif}} = 0$.

2. Устойчивость резонатора с метаматериалом

Условия устойчивости мета-резонатора могут быть получены при помощи как геометрооптического, так и волнового подхода. В первом случае может быть вычислен инвариант лучевой матрицы $\widehat{M}$ оптической системы $I = \frac{1}{2}\operatorname{trace}\widehat{M}$, который должен удовлетворять условию $-1 \le I \le 1$ в устойчивом резонаторе.

В случае, когда внутри резонатора находятся плоскопараллельные слои сред толщиной l_j с показателями преломления n_j, условие устойчивости резонатора имеет вид:

$$0 < \left(1 - \frac{L_{\text{dif}}}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L_{\text{dif}}}{R_2}\right) < 1, \tag{4}$$

совпадающий с условием устойчивости пустого резонатора, в которое вместо эффективной дифракционной входит геометрическая длина. Отметим, что данные условия в точности совпадают с условиями существования обобщенных гауссовых мод, то есть с условиями, при которых частоты имеют действительную величину в выражении (3). Важно, что в (4) входит не геометрическая, а эффективная дифракционная длина, которая может принимать практически любые значения в зависимости от толщины и показателей преломления слоев.

Таким образом, при внесении метаслоя внутрь резонатора изменяется область его устойчивости, что может быть использовано для того, чтобы неустойчивый пустой резонатор стал устойчивым. Конфокальный резонатор с $R_1 = R_2 = L$ является неустойчивым. При внесении слоя метаматериала с $n = -1$ толщиной $\delta/2$ условие устойчивости (4) оказывается выполненным, и мета-резонатор становится устойчивым. Неустойчивый резонатор с двумя выпуклыми зеркалами (например, $L = -R_1 = -R_2$) может быть сделан устойчивым при внесении метаслоя толщиной $(L+\delta)/2$. Резонатор Фабри–Перо остается неустойчивым даже при внесении в него метаслоя за счет плоских зеркал.

3. Спектр продольных мод при наличии отражения от границ метаслоя

Амплитудный коэффициент отражения от границы двух сред в случае нормального падения, согласно формулам Френеля, равен:

$$r = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2},$$

где $z_i = \sqrt{\mu_i/\epsilon_i}$ – волновые сопротивления (импедансы) сред, которые положительны как для обычных сред (индекс 1), так и для метаматериалов (индекс 2).

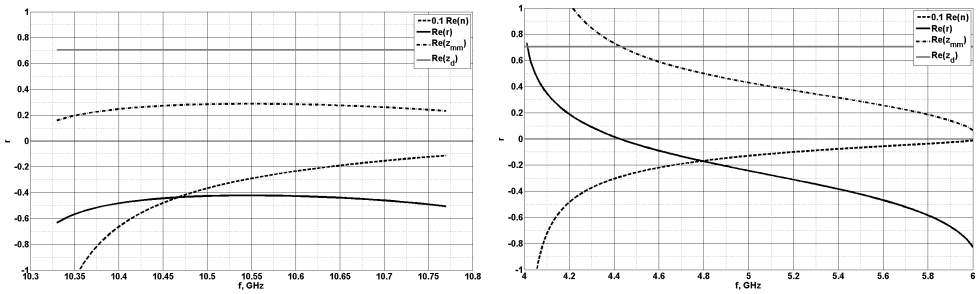

Рис. 1. Зависимость амплитудного коэффициента отражения от частоты $r(\omega)$ (сплошная черная линия) для границы метаматериала и диэлектрика с $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$. Параметры метаматериала соответствуют работам [3] для левого графика и [2] для правого, зависимости показателя преломления $n(\omega)$ и волнового сопротивления $z_{mm}(\omega)$ метаматериала от частоты изображены пунктирной и штрих-пунктирной линией соответственно. Волновое сопротивление диэлектрика z_d изображено серым цветом

Таким образом, для реализации допущений, сделанных в предыдущих пунктах, которые касаются отсутствия френелевского отражения, необходимо выполнение условия $z_1 = z_2$. Выполнение этого точного равенства для произвольных материалов, вообще говоря, затруднительно, поэтому рассмотрим более общий случай, в котором волновые сопротивления сред не согласованы, аналогично тому, как это было сделано для резонатора со слоем диэлектрика [20, 21].

Типичные микроволновые метаматериалы состоят из металлических стержней, создающих отрицательную диэлектрическую проницаемость, и разрезных колец, создающих отрицательную магнитную проницаемость. Для микроволновых метаматериалов зависимость диэлектрической и магнитной проницаемостей от частоты [2–4] обычно имеет вид:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},\ \mu(\epsilon) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2},$$

где $\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 S_{\text{bars}}/S_{\text{tot}}$ – плазменная частота стержней, определяющаяся плазменной частотой металла ω_{p0} и отношением площади сечения стержней к общей площади; F – константа, зависящая от геометрии колец, ω_m – резонансная частота эквивалентного разрезному кольцу LC-контура. Для расчета амплитудного коэффициента отражения от границы диэлектрика с $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$ и метаматериала нами были взяты экспериментальные данные из работ [2, 3]. Зависимость амплитудного коэффициента отражения $r(\omega)$ от границ слоев указанного метарезонатора представлена на рис. 1

В пренебрежении дифракционными поправками к фазовому набегу для собственных частот имеет место следующее уравнение:

$$r(\omega)\sin\left[\frac{\omega}{c}(n_1 l_1 - n_2(\omega) l_2)\right] = \sin\left[\frac{\omega}{c}(n_1 l_1 + n_2(\omega) l_2)\right]. \tag{5}$$

Как уже было отмечено выше, в отсутствие отражений $r = 0$ правая и левая части (5) обращаются в нуль, и в бездисперсионном приближении спектр частот становится сплошным в случае нулевой оптической длины резонатора и определяется выражением $\omega L_{\text{opt}}(\omega)/c = m\pi$, где m – целое число для всех других величин оптической длины. В случае нулевой оптической длины при наличии даже сравнительно небольшого рассогласования волновых сопротивлений происходит дискретизация

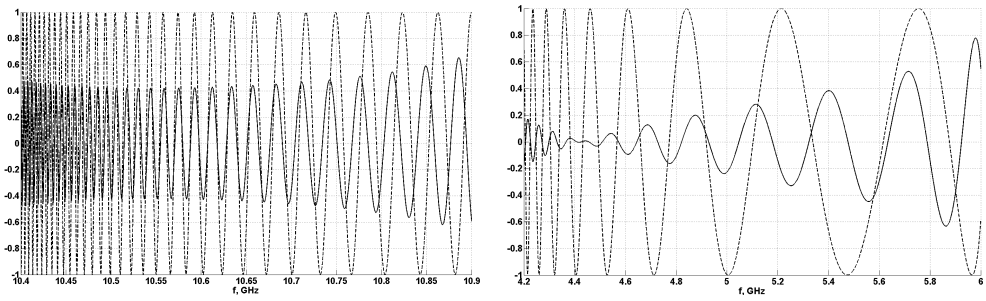

Рис. 2. Пересечение сплошной (левая часть уравнения (5)) и пунктирной (правая часть) линий соответствует резонансным частотам. Данные рассчитаны для резонаторов с метаматериалом (параметры см. [3] для левого графика и [2] для правого) и диэлектрика ($\varepsilon = 2$) с длиной слоев $l_1 = l_2 = 1.5$ см

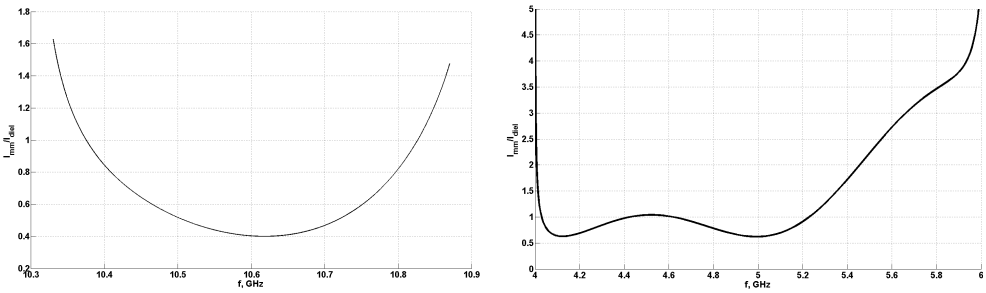

Рис. 3. Отношение интенсивностей в слоях метаматериала (параметры см. [3] для правого графика и [2] для левого) и диэлектрика ($\varepsilon = 2$)

спектра частот, которые рассчитываются по формуле

$$\frac{\omega}{c}\left(n_1 l_1 - n_2(\omega) l_2\right) = m\pi.$$

Для произвольного значения оптической длины резонансные частоты могут быть найдены из уравнения (5) графически как точки пересечения кривых (см. рис. 2), изображающих правую и левую части данного уравнения. При этом большое влияние на вид кривых играет дисперсия метаматериалов.

Наиболее значимым изменением по сравнению со спектром резонатора, в котором импедансы согласованы, является неэквидистантность его спектра частот. Сгущение спектра в области более низких частот обусловлено типичным для метаматериалов резким ростом абсолютной величины показателя преломления и не наблюдается в случае только диэлектрических слоев внутри резонатора.

Другим изменением, происходящим при наличии отражений от границ слоев, является изменение отношения интенсивности в слоях метаматериала и диэлектрика:

$$\frac{I_{\text{meta}}}{I_{\text{diel}}} = \frac{1 - 2r(\omega)\cos(\omega n_1 l_1/c) + r^2(\omega)}{1 - r^2(\omega)}.$$

На рис. 3 изображена частотная зависимость отношения интенсивностей в слое метаматериала и диэлектрика.

При учете потерь или усиления, которые могут иметь место как в слоях диэлектрика, так и метаматериала (см. [12, 13]), распределение амплитуды внутри резонатора оказывается существенным.

Заключение

Свойства резонатора, внутри которого находится один или несколько слоев с отрицательным показателем преломления, существенно отличаются от свойств резонатора с диэлектрическим заполнением. Основными характеристиками открытых резонаторов, содержащих слоистый материал, являются величины эффективных дифракционной и оптической длин. В случае резонатора с метаматериалом обе длины могут принимать не только положительные, но отрицательные или равные нулю значения, что оказывает существенное влияние на свойства резонатора.

Нами выведены условия существования волноводных мод в виде пучков Эрмита – Гаусса и рассчитан спектр собственных частот этих мод. Получены условия устойчивости мета-резонатора, позволяющие при помощи слоя метаматериала сделать устойчивым неустойчивый пустой резонатор. Был проанализирован случай нулевой эффективной дифракционной длины резонатора, показано, что волноводные моды могут иметь произвольный профиль, а спектр собственных частот становится сплошным и не зависит от поперечного распределения амплитуды мод.

При наличии отражений от границ слоев происходят существенные изменения спектра собственных частот мета-резонатора, а также распределения интенсивности внутри него.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантами «Ведущие научные школы» (НШ-671.2008.2), РФФИ (№ 08-02-00717, 06-02-16801). Д.О. Сапарина благодарит за финансовую поддержку также Фонд некоммерческих программ «Династия».

Summary

D.O. Saparina, A.P. Sukhorukov. Open Cavity Properties Management by Introduction of Metamaterial Layer.

The paper presents an investigation of waveguide eigenmodes, eigenfrequencies and stability domain of cavity containing metamaterial layers with negative refractive index. Its properties depend on the values of effective diffraction and optical lengths, which can be not only positive, but also negative and zero, in contrast to ordinary cavities. Thus, cavity mode management is possible by introduction of corresponding metamaterial layer.

Key words: open resonator, metamaterial, negative refractive index, layered structure, diffraction, transverse mode, dispersion, longitudinal mode, stability.

Литература

1. *Веселаго В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН. – 1967. – Т. 92, № 3. – С. 517–526.
2. *Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C. et al.*Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 84, No 18. – P. 4184-1–4184-3.
3. *Shelby R.A., Smith D.R., Schultz S.* Experimental Verification of a Negative Index of Refraction // Science. – 2001. – V. 292, No 5514. – P. 77–79.
4. *Parazzoli C.G., Greegor R.B., Li K. et al.* Experimental Verification and Simulation of Negative Index of Refraction Using Snell's Law // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 90, No 10. – P. 107401-1–107401-4.
5. *Yen T.J., Padilla W.J. , Fang N. et al.* Terahertz Magnetic Response from Artificial Materials // Science. – 2004. – V. 303, No 5603. – P. 1494–1496.

6. *Katsarakis N., Konstantinidis G., Kostopoulos A. et al.* Magnetic response of split-ring resonators in the far-infrared frequency regime // Opt. Lett. – 2005. – V. 30, No 11. – P. 1348–1350.

7. *Helgert C., Menzel C., Rockstuhl C. et al.* Polarization-independent negative-index metamaterial in the near infrared // Opt. Lett. – 2009. – V. 34, No 5. – P. 704–706.

8. *Shalaev V.M., Cai W., Chattiar U.K. et al.* Negative index of refraction in optical metamaterials // Opt. Lett. – 2005. – V. 30, No 24. – P. 3356–3358.

9. *Shalaev V.M.* Negative index of refraction in optical metamaterials // Nature Photonics. – 2007. – V. 1. – P. 41–48.

10. *Dolling G., Wegener M. , Soukoulis C.M., et al.* Negative-index metamaterial at 780 nm wavelength // Opt. Lett. – 2007. – V. 32, No 1. – P. 53–55.

11. *Soukoulis C.M., Linden S., Wegener M.* Negative Refractive Index at Optical Wavelengths // Science. – 2007. – V. 315, No 5808. – P. 47–49.

12. *Zheludev N.I., Prosvirnin S.L., Papasimakis N.* Lasing spacer // Nature Photonics. – 2008. – V. 2. – P. 351–354.

13. *Dong Zheng-Gao, Liu Hui, Li Tao et al.* Resonance amplification of left-handed transmission at optical frequencies by stimulated emission of radiation in active metamaterials // Opt. Expr. – 2008. – V. 16, No 25. – P. 20974–20980.

14. *Pendry J.B.* Negative Refraction Makes a Perfect Lens // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 85, No 18. – P. 3966–3969.

15. *Панфилова Н.О., Сапарина Д.О., Сухоруков А.П.* Распространение волновых пучков в структурах, составленных из слоев с положительными и отрицательными показателями преломления // Изв. РАН. Сер. физ. – 2006. – Т. 70, № 12. – С. 1722–1725.

16. *Engheta N.* An Idea for Thin Subwavelength Cavity Resonators Using Metamaterials With Negative Permittivity and Permeability // IEEE Anten. and Wireless Prop. Lett. – 2002. – V. 1, No 1. – P. 10–13.

17. *Jiang T., Feng Y.* Transmission line realization of subwavelength resonator formed by a pair of conventional and LHM slabs // J. Zhejiang Univ. Sci. A. – 2006. – V. 7, No 1. – P. 76–80.

18. *Сапарина Д.О., Сухоруков А.П.* Свойства гауссовых волноводных мод оптического резонатора с метаматериалом // Изв. РАН. Сер. физ. – 2008. – Т. 72, № 12. – Р. 1701–1703.

19. *Сапарина Д.О., Сухоруков А.П.* Волноводные моды резонатора, заполненного слоистым материалом с чередующимся знаком показателя преломления // Учен. зап. Казан. ун-та Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 2. – С. 208–213.

20. *Быков В.И., Силичев О.О.* Лазерные резонаторы. – М.: Физматлит, 2003. – 320 с.

21. *Ананьев Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки. – М.:Наука, 1990. – 264 с.

Поступила в редакцию
02.02.09

Сапарина Дарья Олеговна – студент кафедры фотоники и физики микроволн физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.
E-mail: *saparina@phys.msu.ru*

Сухоруков Анатолий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фотоники и физики микроволн физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.
E-mail: *apsmsu@gmail.com*