Министерство образования и науки Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

кафедра математики

МАТЕМАТИКА (в двух частях):
Часть 1.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

для студентов заочной и дистанционной форм обучения
по экономическим направлениям подготовки бакалавров

г. Набережные Челны
2019

Математика (в двух частях): Часть 1. *Учебно-методический комплекс для студентов заочной и дистанционной форм обучения по экономическим направлениям подготовки бакалавров.* /Составитель: ***Углов А.Н.*** -Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2019, 121 с.

1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Цель преподавания дисциплины «Математика» - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными **задачами дисциплины** являются:

- ознакомление обучающихся с фундаментальными понятиями и фактами математики, необходимыми для применения современных математических методов при решении задач науки, экономики и управления;
-привлечение внимания студентов к возможностям использования математических методов при исследовании различных задач;
-развитие навыков к математическому моделированию прикладных задач;
-воспитание абстрактного мышления и умения строго обосновать соответствующие факты;
-развитие логического и алгоритмического мышления;
-овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

Данная дисциплина является основой при изучении дисциплин, использующих современные математические методы. В свою очередь, для изучения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики.

В результате изучения данной дисциплины студент должен:

- знать теоретические основы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений, числовых и функциональных рядов, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики.

- **уметь** использовать полученные знания для решения практических задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу студентов. В лекциях излагается содержание тем программы с учетом требований, установленных для специалиста в квалификационной характеристике. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью контрольных работ, зачётов и экзаменов.

2. Содержание и структура дисциплины (часть 1).

2.1 Содержание дисциплины (наименование тем).

Тема. Определители.

Определители 2-ого, 3-его, порядков, порядка n. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителей.

Тема. Матрицы.

Определение матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами. Базисный минор. Ранг матрицы. Обратная матрица, условие существования, основные способы её нахождения. Матричные уравнения, их решение.

Тема. Системы линейных уравнений. Модель Леонтьева.

Системы линейных уравнений (СЛУ). Основные понятия и определения. Матричная запись СЛУ. Формулы Крамера. Решение СЛУ методом обратной матрицы. Решение СЛУ методом Гаусса. Базисные и свободные неизвестные. Общее решение СЛУ. Однородные системы линейных уравнений, свойства их решений. Условия существования ненулевых решений однородных СЛУ. Модель Леонтьева.

Тема. Системы векторов. N-мерное векторное пространство. Евклидово пространство.

N–мерный арифметический вектор. Линейные операции над векторами, их свойства. Понятие n-мерного векторного пространства R^n. Координаты вектора в R^n. Скалярное произведение. Евклидово пространство.

Тема. Векторная алгебра.

Геометрические векторы на прямой, плоскости и в пространстве, действия над ними. Проекция вектора. Прямоугольная декартова система координат. Радиус-вектор. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме. Длина и направляющие косинусы вектора. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов, его свойства, выражение в координатной форме, приложения для решения геометрических задач. Условия перпендикулярности, параллельности и компланарности векторов.

Тема. Прямые линии на плоскости.

Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Тема. Кривые второго порядка.

Кривые 2-ого порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их определения, канонические уравнения, форма. Приведение общего уравнения кривой 2-ого порядка к каноническому виду и построение.

Тема. Множества. Числовые множества. Функция.

Множества и операции над ними. Множества чисел. Действительные числа, модуль числа и его свойства. Числовые промежутки. Окрестность точки. Понятие функции. Способы задания, график, элементы поведения функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Обратная и сложная функции. Элементарные функции, их классификация.

Тема. Числовые последовательности. Предел последовательности. Предел функции.

Понятие числовой последовательности. Предел последовательности, его геометрический смысл. Бесконечно малые и большие последовательности. Монотонная последовательность, признак её сходимости. Число e. Задача о непрерывном начислении процентов по банковским вкладам. Определения предела функции при $x \to x_0$ и $x \to \infty$. Односторонние пределы. Бесконечно большие и малые функции, их свойства. Неопределённые выражения. Основные теоремы о пределах функций. Предельный переход в неравенствах. Первый и второй замечательные пределы.

Тема. Непрерывность функции.

Определения непрерывности функции в точке. Понятие непрерывности справа и слева. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функции, их классификация. Непрерывность функции на множестве. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

Тема. Комплексные числа и многочлены.

Комплексные числа, их геометрическое изображение на плоскости. Различные формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Многочлены и алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры. Теорема Безу. Разложение многочленов на линейные и квадратичные множители.

Тема. Производные и дифференциалы функции одной переменной.

Приращение функции. Определение производной, её геометрический смысл. Понятие дифференцируемости функции в точке. Дифференциал функции. Простейшие правила дифференцирования (постоянной; суммы, разности, произведения и частного функций). Дифференцирование обратной и сложной функции. Логарифмическая производная. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование функции, заданной параметрически. Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Уравнения касательной и нормали. Понятие эластичности функций.

Тема. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, их следствия. Правило Лопиталя, его применение для раскрытия неопределённостей.

Тема. Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.

Схема проведения полного исследования функции. Возрастание и убывание функции, нахождение участков её монотонности. Стационарные и критические точки функции. Локальные экстремумы функции, условия их существования и нахождение. Глобальные экстремумы функции на отрезке, их нахождение. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба, условия их существования и нахождение. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, условия их существования и нахождение. Построение графика.

Тема. Основные понятия о функции нескольких переменных.

Понятия n-мерной точки, n-мерного арифметического пространства R^n. Окрестность точки. Классификация точек. Множества точек в R^n: открытые и замкнутые, связные, выпуклые множества. Понятие функции n переменных. Область определения и график функции. Линии и поверхности уровня. Полное и частные приращения функции. Понятия предела и непрерывности функции нескольких переменных (ФНП). Свойства ФНП, непрерывных в ограниченной и замкнутой области. Выпуклые функции, их свойства.

Тема. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных, их приложения.

Частные производные первого и высших порядков, их вычисление. Понятие дифференцируемости ФНП в точке, условия дифференцируемости. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования. Полные дифференциалы ФНП первого и высших порядков, их нахождение. Применение первого дифференциала в приближённых вычислениях. Производная по направлению и градиент, взаимосвязь между ними.

Тема. Экстремумы функций нескольких переменных.

Стационарные и критические точки. Локальные экстремумы ФНП, условия их существования и нахождение. Условный экстремум. Метод неопределённых множителей Лагранжа. Глобальные экстремумы ФНП в ограниченной замкнутой области, их нахождение.

Тема. Приложения к общей экономической теории.

Производственная функция Кобба-Дугласа и её свойства. Частные производные и эластичность функций, их экономический смысл. Функции спроса и предложения. Функция полезности. Кривые безразличия.

2.2. Практические занятия, их содержание.

Тема. Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений. Векторы.

Определители, их вычисление. Матрицы, действия над ними. Элементарные преобразования матриц. Базисный минор. Ранг матрицы. Обратная матрица. Матричные уравнения. Решение систем линейных уравнений по формулам

Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса. Арифметические векторы, действия над ними. Координаты вектора. Геометрические векторы, действия над ними.

Тема. Прямые линии и плоскости. Кривые второго порядка.

Прямая на плоскости и в пространстве. Плоскость. Классификация кривых второго порядка, приведение к каноническому виду, построение.

Тема. Функции. Предел функции. Непрерывность функции. Комплексные числа.

Область определения, чётность и нечётность, график функции. Вычисление предела функции. Непрерывность и точки разрыва функции. Комплексные числа, действия над ними. Нахождение корней алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.

Тема. Производные и дифференциалы функции одной переменной. Правило Лопиталя.

Производная функции и её нахождение. Уравнение касательной и нормали. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Правило Лопиталя.

Тема. Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.

Проведение полного исследования функции, построение её графика. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Тема. Дифференцирование функции нескольких переменных. Производная по направлению и градиент. Экстремумы.

Функция n переменных. Частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков, их вычисление. Производная по направлению и градиент. Дифференцирование неявной функции. Локальный экстремум ФНП, его нахождение. Глобальные экстремумы ФНП в ограниченной замкнутой области, их нахождение.

2.3. Виды самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студентов предполагает изучение теоретического материала и выполнение контрольной работы.

3. Рекомендуемая литература.

А) Основная литература:

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник для бакалавров. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. - 960с. ISBN: 978-5-8114-0445-2 (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=634).
2. Горлач Б.А. Линейная алгебра: Учеб. пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2012. -480с. ISBN 978-5-8114-1427-7. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4042.

3. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Велби: Проспект, 2007.
4. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник /Под общ. ред. В.И. Ермакова. –М.: ИНФРА-М, 2010. -656с. ISBN 978-5-16-003986-2. Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=210735.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для студентов вузов /Ермаков В.И., Бобрик Г.И., Гринцевичус Р.К. и др.; под ред. Ермакова В.И. – М.:ИНФРА-М, 2008. -575с.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебник для вузов. -М. Высшая школа, 2005. -479 с.
7. Шипачёв В.С. Задачи по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2005. -304с.

Б) Дополнительная литература:

8. Высшая математика для экономистов: учебник для студ. вузов / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. и др.; под ред. Кремера Н.Ш. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2007. -479с. –ISBN: 5-238-00991-7.
9. Высшая математика для экономистов: практикум : учеб. пособие для вузов /Под ред. Н. Ш. Кремера. -М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 480 с. - ISBN 978-5-238-01122-6.
10. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалавриата: Учебник. –М.: ИНФРА-М, 2013. -472с. ISBN 978-5-16-004467-5. Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=400839.
11. Хуснутдинов Р.Ш., Жихарев В.Н. Математика для экономистов в примерах и задачах: Учебное пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2012. -656с. ISBN 978-5-8114-1319-5. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4233.
12. Шершнев В.Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учеб. пособие. –М.: ИНФРА-М, 2014. –168с. ISBN 978-5-16-005479-7. Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=455245.
13. Шершнев В.Г. Математический анализ: сборник задач с решениями: Учеб. пособие. –М.: ИНФРА-М, 2014. –164с. ISBN 978-5-16-005487-2. Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=445587.

4. Методические указания по изучению дисциплины.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить одну контрольную работу (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 3*).

3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 4).*

5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.

6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.

10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 1.*

5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен в конце семестра обучения. На экзамене студент должен показать знание теоретических основ курса в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1. Задания для контрольной работы.

1 – 10. Вычислить определитель:

а) непосредственным разложением по $i-ой$ строке**;**

б) непосредственным разложением по $j-ому$ столбцу.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ $(i=1,\quad j=2)$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ $(i=1,\quad j=4)$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $(i=1,\quad j=3)$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ $(i=2,\quad j=1)$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $(i=3,\quad j=1)$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $(i=2,\quad j=2)$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ $(i=1,\quad j=1)$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $(i=2,\quad j=4)$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ $(i=4,\quad j=1)$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $(i=3,\quad j=2)$

11 – 20. Найти матрицу C , если $C = A^T \cdot B + 2A$ **;**

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **12.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **14.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **16.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **18.** $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **20.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

21 – 30. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: **а)** найти решение системы методом Крамера**;** **б)** записать систему в матричном виде и найти её решение методом обратной матрицы; **в)** найти решение системы методом Гаусса.

21. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 5y + z = -7 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 5y - z = 7 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 2x - y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

31–40. Найти общее решение для каждой из данных систем методом Гаусса:

31 а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

32 а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 9x_4 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

33. а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0 \\ 3x_2 - 7x_3 - 10x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

34. а) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

37. а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$

38. а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

39. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

40. а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

41-50. Имеются данные о работе трёх отраслей экономики в отчётном периоде и план выпуска конечной продукции $(50, 50, 50)$ в следующем периоде (в у.е.). Используя модель Леонтьева многоотраслевой экономики, найти: **а)** матрицы коэффициентов прямых и полных затрат; **б)** плановые объёмы выпуска валовой продукции каждой из отраслей, межотраслевые поставки и объёмы выпуска чистой продукции. В ответе записать данные межотраслевого баланса планового периода. (Указание: *значения коэффициентов прямых и полных затрат вычислить с точностью до 0.01; значения плановых объёмов выпуска валовой и чистой продукции, межотраслевых поставок округлить до целых значений).*

41.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**10**	**20**	**10**	**60**	**100**
II	**20**	**30**	**20**	**30**	**100**
III	**60**	**10**	**20**	**10**	**100**
Чистый продукт	**10**	**40**	**50**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

42.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**20**	**20**	**25**	**35**	**100**
II	**50**	**10**	**10**	**30**	**100**
III	**15**	**20**	**40**	**25**	**100**
Чистый продукт	**15**	**50**	**25**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

43.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**10**	**40**	**10**	**40**	**100**
II	**10**	**20**	**40**	**30**	**100**
III	**20**	**30**	**30**	**20**	**100**
Чистый продукт	**60**	**10**	**20**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

44.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**10**	**40**	**20**	**30**	**100**
II	**50**	**20**	**25**	**5**	**100**
III	**30**	**20**	**20**	**30**	**100**
Чистый продукт	**10**	**20**	**35**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

45.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**10**	**40**	**30**	**20**	**100**
II	**40**	**30**	**20**	**10**	**100**
III	**30**	**20**	**40**	**10**	**100**
Чистый продукт	**20**	**10**	**10**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

46.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**15**	**25**	**30**	**30**	**100**
II	**10**	**40**	**20**	**30**	**100**
III	**30**	**30**	**30**	**10**	**100**
Чистый продукт	**45**	**5**	**20**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

47.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**15**	**15**	**25**	**45**	**100**
II	**15**	**20**	**30**	**35**	**100**
III	**10**	**25**	**20**	**45**	**100**
Чистый продукт	**60**	**40**	**25**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

48.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**10**	**20**	**20**	**50**	**100**
II	**20**	**25**	**25**	**30**	**100**
III	**25**	**25**	**30**	**20**	**100**
Чистый продукт	**45**	**30**	**25**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

49.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**25**	**10**	**20**	**45**	**100**
II	**25**	**20**	**50**	**5**	**100**
III	**10**	**30**	**20**	**40**	**100**
Чистый продукт	**40**	**40**	**10**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

50.

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**15**	**20**	**30**	**35**	**100**
II	**30**	**15**	**20**	**35**	**100**
III	**10**	**20**	**30**	**40**	**100**
Чистый продукт	**45**	**45**	**20**		
Валовой продукт	**100**	**100**	**100**		

51 – 60. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Требуется:

а) найти векторы $\overline{m} = \overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{n} = 2\overline{b} - \overline{c}$ **;**

б) вычислить скалярное произведение $\overline{m} \cdot \overline{n}$;

в) найти проекцию вектора $\overline{m}$ на направление вектора $\overline{n}$;

51. $\overline{a} = (4, 5, 2)$, $\overline{b} = (3, 0, 1)$, $\overline{c} = (-1, 4, 2)$.

52. $\overline{a} = (3, -5, 2)$, $\overline{b} = (4, 5, 1)$, $\overline{c} = (-3, 0, -4)$.

53. $\overline{a} = (-2, 3, 5)$, $\overline{b} = (1, -3, 4)$, $\overline{c} = (7, 8, -1)$.

54. $\overline{a} = (1,3, 5)$, $\overline{b} = (1, 2, 1)$, $\overline{c} = (5, 7, 3)$.

55. $\overline{a} = (2, 4, -6)$, $\overline{b} = (1, 3, 5)$, $\overline{c} = (0, 3, 7)$.

56. $\overline{a} = (4, 3, -1)$, $\overline{b} = (5, 0, 4)$, $\overline{c} = (2, 1, 2)$.

57. $\overline{a} = (3, 4, -3)$, $\overline{b} = (-2, 2, 0)$, $\overline{c} = (2, 1, -4)$.

58. $\overline{a} = (-2, 1, 7), \quad \overline{b} = (3, 3, -8), \quad \overline{c} = (5, 4, -1).$

59. $\overline{a} = (1, 0, 5), \quad \overline{b} = (3, 2, 7), \quad \overline{c} = (5, 0, 9).$

60. $\overline{a} = (2, 1, 0), \quad \overline{b} = (4, 3, -3), \quad \overline{c} = (6, 5, -7).$

61-70. Даны вершины треугольника ABC **.** Требуется найти**:**
а) длину стороны AB ; **б)** уравнение стороны AB **;**
в) уравнение медианы BE **,** проведённой из вершины B **;**
г) уравнение высоты CD , проведённой из вершины C **;**
д) длину h высоты CD **; е)** площадь S треугольника ABC **.** Сделать чертёж.

61. $A(4, 1), B(0, -2), C(-5, 10)$ **.** **62.** $A(-7, 3), B(5, -2), C(8, 2)$

63. $A(5, -1), B(1, -4), C(-4, 8)$ **64.** $A(6, 0), B(2, -3), C(-3, 9)$

65. $A(-9, 2), B(3, -3), C(6, 1)$ **66.** $A(7, -4), B(3, -7), C(-2, 5)$

67. $A(-14, 6), B(-2, 1), C(1, 5)$ **68.** $A(-8, 4), B(4, -1), C(7, 3)$

69. $A(3, -3), B(-1, -6), C(-6, 6)$ **70.** $A(-6, 5), B(6, 0), C(9, 4)$

71–80. Установить, какую невырожденную кривую определяет алгебраическое уравнение второго порядка, построить её.

71. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ **72.** $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

73. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ **74.** $x^2 - 4x - y - 5 = 0$

75. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ **76.** $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

77. $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ **78.** $x + y^2 - 2y + 3 = 0$

79. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ **80.** $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

81-90. Для указанной функции $y = f(x)$ требуется:
а) найти естественную область определения функции**;**
б) установить чётность (нечётность) функции;

81. а) $y = \sqrt{3-x} + arc\sin(3 - 2x)$ **б)** $y = 2x \cdot \sin^2 x - 3x^3$

82. а) $y = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{\lg(1-x)}$ **б)** $y = \dfrac{\sin 2x}{x^2}$

83. а) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ **б)** $y=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

84. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ **б)** $y=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

85. а) $y=\arccos(x-3)+\lg(4-x)$ **б)** $y=x\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

86. а) $y=\sqrt{\dfrac{x}{2x+1}}$ **б)** $y=\dfrac{\sin 3x}{2-\cos 4x}$

87. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$ **б)** $y=|x+1|-|x-1|$

88. а) $y=\lg(x^2+2x-8)$ **б)** $y=\sin^2 x+\cos^3 x$

89. а) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-2}-\lg(3-2x)$ **б)** $y=\dfrac{x}{1-x}$

90. а) $y=2^{1/x}+\arcsin\left(\dfrac{x+3}{2}\right)$ **б)** $y=\dfrac{arctgx}{x^2+1}$

91-100. Вычислить пределы (не пользуясь правилом Лопиталя):

91. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2+4}$ **б)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{\sqrt{x+2}-1}$

92. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{x^4+3x+1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$

93. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{x^3+5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6x+4}-4}$

94. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x+5}{3x^2+7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-9x+14}{\sqrt{2x+11}-5}$

95. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x+1}{3x^4+5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$

96. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+6}{3x^3+7x-1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x^2+x}$

97. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+6x^2+3x}{20x^2+70}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{\sqrt{2x-1}-3}$

98. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{3x^2+7x+2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{2x-8}-2}{x^2-7x+6}$

99. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^2+5x+1}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{\sqrt{5x}-5}$

100. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-5x^2}{2x^2+3x+3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$

101-110. Для указанной функции $y=f(x)$ требуется: **а)** выяснить при каких значениях параметра a функция будет непрерывной**; б)** найти точки разрыва функции и исследовать их характер**.** Построить график функции**.**

101. а) $y=\begin{cases} x^2+2x-a, & x<0 \\ \cos x, & x\ge 0 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} 1/x & x\le 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$

102. а) $y=\begin{cases} a-x, & x<4 \\ \sqrt{x}, & x\ge 4 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 1-x & 0\le x\le 2 \\ 2 & x>2 \end{cases}$

103. а) $y=\begin{cases} ax-2, & x<1 \\ \ln x, & x\ge 1 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} 1/x & x<0 \\ x & 0\le x\le 2 \\ 3 & x>2 \end{cases}$

104. а) $y=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ 3x+a & x>0 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ 1/x & x\ge 1 \end{cases}$

105. а) $y=\begin{cases} x-2, & x<1 \\ ax^2-2, & x\ge 1 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} 1/x & x<0 \\ -\sqrt{x} & 0\le x\le 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$

106. а) $y=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ \sqrt{x+a}, & x\ge 1 \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} 1/x & x<1 \\ \ln x & x\ge 1 \end{cases}$

107. а) $y=\begin{cases}2/x, & x<-1\\ x-a, & x\geq -1\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}e^{x} & x<0\\ 2x-1 & x\geq 0\end{cases}$

108. а) $y=\begin{cases}x^{3}+a, & x<0\\ arctgx, & x\geq 0\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}x+2 & x\leq -2\\ 2-x & -2<x\leq 0\\ x^{2}+2 & x>0\end{cases}$

109. а) $y=\begin{cases}(x-1)\cdot(x-a), & x<0\\ 2x+1, & x\geq 0\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}1/x & x<1\\ \sqrt{x} & x\geq 1\end{cases}$

110. а) $y=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ 3x-a, & x\geq 0\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}2x & x\leq 0\\ x^{2}+1 & 0<x\leq 1\\ 2 & x>1\end{cases}$

111-120. Даны комплексные числа z_1, z_2 и алгебраическое уравнение $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0$. Требуется:

а) вычислить z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2 ; **б)** найти все корни алгебраического уравнения на множестве комплексных чисел.

111. $z_1=5+10i$, $z_2=2-i$, $z^2+2z+5=0$.

112. $z_1=1-5i$, $z_2=2+3i$, $z^3-8=0$.

113. $z_1=-8+4i$, $z_2=3+i$, $4z^2-2z+1=0$.

114. $z_1=4-16i$, $z_2=5-3i$, $z^3+8=0$.

115. $z_1=2-4i$, $z_2=3-i$, $z^2-2z+2=0$.

116. $z_1=15+10i$, $z_2=2-3i$, $z^2+4z+13=0$.

117. $z_1=18+12i$, $z_2=5-i$, $z^3+9z=0$.

118. $z_1=-5+i$, $z_2=3+2i$, $z^3+1=0$.

119. $z_1=6-3i$, $z_2=1+2i$, $z^2+6z+13=0$.

120. $z_1=6+2i$, $z_2=-1+3i$, $z^3-1=0$.

121-130. Найти производную $y'=f'(x)$ **:**

121. а) $y=\dfrac{x^3}{2-x}$ **б)** $y=\sqrt[3]{x^2+4x+5}$ **в)** $y=\dfrac{\sin(x^2)}{\cos^2 x}$ **г)** $y=\dfrac{arctg^3 4x}{\ln(6x-1)}$

122. а) $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{x^2+2}$ **б)** $y=(2x-1)\cdot e^{-3x}$ **в)** $y=\cos(x\ln x)$ **г)** $y=\dfrac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\ln(5x-1)}$

123. а) $y=\dfrac{x}{x^3+2}$ **б)** $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{3+4x^2}}$ **в)** $y=e^{2x-x^2}$ **г)** $y=\dfrac{ctg 3x}{\cos^4 7x}$

124. а) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$ **б)** $y=x^2\cdot\sqrt{16-4x}$ **в)** $y=e^{4x}\cdot\ln(tgx)$ **г)** $y=\dfrac{\cos^3 4x}{\sin 4x+1}$

125. а) $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$ **б)** $y=\dfrac{2x+3}{\sqrt[4]{3x+5}}$ **в)** $y=\sin\left(x^3+2^x\right)$ **г)** $y=\dfrac{\ln(x^2)}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

126. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ **б)** $y=\dfrac{\sqrt{4x-2}}{2x+3}$ **в)** $y=\dfrac{2+\cos 4x}{\sin 3x}$ **г)** $y=\dfrac{\sin^2 4x}{\sqrt{tg 3x}}$

127. а) $y=\dfrac{1}{x\ln x}$ **б)** $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x+2}}$ **в)** $y=x^3 arctg(4x)$ **г)** $y=\dfrac{\cos^3 4x}{\ln(5x+1)}$

128. а) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ **б)** $y=x^2\sqrt{1+2x^3}$ **в)** $y=\dfrac{\sin(3x+1)}{x^2}$ **г)** $y=\ln\left(\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

129. а) $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$ **б)** $y=\cos\left(\dfrac{2x+1}{1+x^2}\right)$ **в)** $y=e^{-4x}\ln(2x)$ **г)** $y=\dfrac{\sin^3 4x}{\sqrt[4]{5x-1}}$

130. а) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2+1}$ **б)** $y=\sin\sqrt{x^2+3x}$ **в)** $y=\ln\left(\dfrac{2-e^x}{e^{2x}}\right)$ **г)** $y=\dfrac{\arcsin 4x}{\sqrt[3]{arctg 2x}}$

131-140. Найти производную функции**,** заданной параметрически:

131. $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ **132.** $\begin{cases} x=tg3t \\ y=ctg3t \end{cases}$ **133.** $\begin{cases} x=\dfrac{2t-1}{t} \\ y=\sqrt{t^3} \end{cases}$ **134.** $\begin{cases} x=\ln^2 4t \\ y=\sqrt{\ln t} \end{cases}$

135. $\begin{cases} x=\sin 3t \\ y=ctg3t \end{cases}$ **136.** $\begin{cases} x=tg^2 t \\ y=\sin 2t \end{cases}$ **137.** $\begin{cases} x=tg4t \\ y=ctg2t \end{cases}$ **138.** $\begin{cases} x=3\sin 2t \\ y=\cos 4t \end{cases}$

139. $\begin{cases} x=\arcsin 2t \\ y=arctg2t \end{cases}$ **140.** $\begin{cases} x=\ln 5t \\ y=\lg 3t \end{cases}$

141-150. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

141. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-5}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x^2}$

142. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot ctgx-1}{x^2}$

143. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{3x^2-5x-2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$

144. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$

145. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{\sin x}}{x^2}$

146. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+5x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{x^2}$

147. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-7}$ **б)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}$

148. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)}$

149. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

150. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$ **б)** $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}$

151-160. Требуется:

а) найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$;

б) провести полное исследование непериодической функции $y=f(x)$ и построить её график.

151. а) $y=x^3-3x^2+4$, $a=0, b=4$ б) $y=x^3-3x^2+4$

152. а) $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$, $a=1, b=4$ б) $y=3x^5-5x^4+4$

153. а) $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, $a=1, b=4$ б) $y=(x-1)^2(x+2)$

154. а) $y = 2\sqrt{x} - x$, $a = 0, b = 4$ б) $y = 2x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

155. а) $y = x^3 - 3x^2 + 6$, $a = 1, b = 4$ б) $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$

156. а) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$, $a = 0, b = 2$ б) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

157. а) $y = x^3 - 6x^2 + 6$, $a = 2, b = 4$ б) $y = \dfrac{6x^2 - x^4}{9}$

158. а) $y = x^3 - 3x^2 + 5$, $a = 1, b = 3$ б) $y = \dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$

159. а) $y = \dfrac{10x + 10}{x^2 + 2x + 2}$, $a = -1, b = 2$ б) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

160. а) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ $a = -1, b = 1$ б) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$

161-170. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0

161. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $x_0 = 1$

162. $y = x - x^3$, $x_0 = -1$

163. $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x_0 = -2$

164. $y = x + \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$

165. $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$, $x_0 = 0$

166. $y = \dfrac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$, $x_0 = 1$

167. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$, $x_0 = 4$

168. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2}$, $x_0 = 2$

169. $y = \sqrt{4 - 2x^2}$, $x_0 = 1$

170. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $x_0 = 1$

171 – 180. Затраты, необходимые для производства x единиц данной продукции задаётся функцией издержек $C(x)$. Продукция реализуется по фиксированной цене p за единицу. Требуется найти: **а)** оптимальное значение

x_0 выпуска продукции, при котором производитель получит максимальную прибыль; **б)** средние значения издержек производства и прибыли при $x = x_0$; **в)** эластичность издержек производства и прибыли при $x = x_0$. Сделать выводы

171. $C(x) = x + 0.1x^2$, $p = 50$ **172.** $C(x) = 0.1\sqrt{x}$, $p = 20$

173. $C(x) = 100 + 3x + x^2$, $p = 20$ **174.** $C(x) = 120x + x^2$, $p = 250$

175. $C(x) = 40x + 0.08x^3$, $p = 200$ **176.** $C(x) = 400\sqrt{x}$, $p = 10$

177. $C(x) = 10 + 0.1x^2$, $p = 4$ **178.** $C(x) = 80x + 5x^2$, $p = 280$

179. $C(x) = 13 + 2x + x^3$, $p = 14$ **180.** $C(x) = 10 + x + \dfrac{x\sqrt{x}}{3}$, $p = 8$

181 – 190. Для указанной функции $z = f(x, y)$ требуется: **а)** найти дифференциал dz и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; **б)** вычислить приближённо (с помощью первого дифференциала) значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.

181. $z = x^2 e^y$, $M(1.94, 0.12)$ **182.** $z = \sqrt{x^2 + \ln y}$, $M(1.04, 1.02)$

183. $z = \sqrt{5e^x + y^2}$, $M(0.06, 2.03)$ **184.** $z = \ln(x^2 + y^3)$, $M(0.99, 0.09)$

185. $z = \sqrt{\ln x + y^2}$, $M(1.07, 1.04)$ **186.** $z = \sqrt{x^3 + y^2}$, $M(2.03, 0.98)$

187. $z = \ln(x^3 + y^3)$, $M(0.08, 0.97)$ **188.** $z = \sqrt{5e^y + x^2}$, $M(2.03, 0.02)$

189. $z = x\sqrt{1 + y^3}$, $M(2.01, 2.05)$ **190.** $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M(1.05, 0.08)$

191 – 200. Найти локальные экстремумы функции $z = f(x, y)$:

191. $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$ **192.** $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

193. $z = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$ **194.** $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$,

195. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$ **196.** $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$

197. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ **198.** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

199. $z = x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 10y$ **200.** $z = x^2 - 2xy + 4y^2 + 4$

5.2. Вопросы к экзамену (зачёту).

Раздел. Линейная алгебра.

1. Понятие матрицы. Частные виды матриц (квадратная, треугольная, диагональная, нулевая, единичная). Элементарные преобразования матриц. Понятие эквивалентности и равенства матриц.
2. Действия над матрицами (сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу) и их свойства. Линейная комбинация матриц.
3. Определители 2-ого и 3-егопорядка, их вычисление. Основные свойства определителей.
4. Понятие определителя n-ого порядка. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.
5. Понятие системы линейных уравнений (СЛУ). Частные виды СЛУ (квадратная, однородная, неоднородная). Матрица, расширенная матрица, определитель СЛУ.
6. Решение, множество решений СЛУ. Совместность, несовместность, определённость, неопределённость, эквивалентность СЛУ. Элементарные преобразования СЛУ, их основное свойство. Однородные СЛУ, условия существования их ненулевых решений. Свойства частных решений однородных СЛУ.
7. Теорема Крамера (о разрешимости СЛУ порядка n). Формулы Крамера для решения СЛУ, условия их применимости.
8. Метод Гаусса решения СЛУ, условия его применимости. Условия несовместности, определённости и неопределённости СЛУ по методу Гаусса.
9. Преобразования СЛУ, выполняемые при выполнении прямого и обратного ходов метода Гаусса. Базисные и свободные переменные. Нахождение общего решения СЛУ. Частные, базисные и опорные решения СЛУ.
10. Понятие обратной матрицы. Вырожденные и невырожденные матрицы. Теорема о существовании обратной матрицы. Основные способы нахождения обратной матрицы.
11. Матричные уравнения и их решение. Матричная форма записи СЛУ. Матричный способ (метод обратной матрицы) решения СЛУ и условия его применимости.
12. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
13. Минор k -ого порядка, базисный минор, ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы. Критерий совместности СЛУ (теорема Кронеккера-Капелли).

14. Понятие n-мерного арифметического вектора. Равенство векторов. Действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число, умножение на матрицу). Линейная комбинация векторов.
15. Скалярное произведение арифметических векторов. Длина вектора и угол между векторами. Понятие ортогональности векторов.
16. Понятие векторного пространства R^n,евклидова пространства E^n. Базис, канонический базис, ранг R^n. Разложение вектора в R^n по векторам его базиса, координаты вектора.

Раздел. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

17. Понятие геометрического вектора. Равенство векторов. Противоположный вектор. Орт вектора. Графические правила сложения, вычитания, умножения вектора на число. Проекция вектора на вектор.
18. Коллинеарность и компланарность векторов. Базис и канонический базис плоскости R^2; базис и канонический базис пространства R^3. Координаты вектора.
19. Понятие декартовой системы координат в R^3. Радиус-вектор, координаты точки. Вычисление длины и направляющих косинусов вектора; координат вектора, заданного двумя точками; расстояния между точками.
20. Скалярное произведение векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения через координаты векторов. Вычисление угла между векторами. Условие ортогональности векторов.
21. Понятие линии на плоскости. Общее уравнение линии и его нахождение по известному геометрическому свойству её точек. Окружность и её уравнение.
22. Прямая линия на плоскости и её общее уравнение. Нормальный и направляющий векторы прямой. Нахождение уравнения прямой, проходящей через точку перпендикулярно вектору. Построение прямой.
23. Каноническое уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через две точки; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой в отрезках. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости и его вычисление, условия $\perp$ и $||$ прямых.
24. Кривая 2-ого порядка на плоскости и её общее уравнение. Классификация кривых 2-ого порядка. Приведение уравнения кривых к каноническому виду.
25. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. Построение эллипса. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, общее геометрическое свойство точек эллипса.
26. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Построение гиперболы. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты, общее геометрическое свойство точек гиперболы.

27. Парабола. Каноническое уравнение параболы. Построение параболы. Вершина, фокус, эксцентриситет, директриса, общее геометрическое свойство точек параболы.

Раздел. Введение в анализ.

28. Понятие множества. Подмножество. Универсальное множество. Способы задания множеств. Равенство и эквивалентность множеств. Операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение). Диаграммы Эйлера-Венна.
29. Множества чисел. Счётные и несчётные множества. Множество действительных чисел, его геометрическая интерпретация и свойства. Модуль действительного числа и его свойства.
30. Числовые множества. Числовые промежутки. Окрестность конечной точки и бесконечности.
31. Понятие функции. Основные способы задания функции. Естественная область определения функции. Явная, неявная и параметрическая формы аналитического задания функции. График функции.
32. Основные элементы поведения функции (чётность, нечётность, периодичность, ограниченность, монотонность).
33. Основные элементарные функции (степенные: x, x^2, x^3, x^{-1}, $\sqrt{x}$; тригонометрические: $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$; обратные тригонометрические: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$; показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$), их свойства и графики.
34. Понятие обратной и сложной функций. Элементарные функции, их классификация.
35. Простейшие элементарные функции: $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, их свойства и графики.
36. Понятие числовой последовательности, арифметические операции над ними. Ограниченные и неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства.
37. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
38. Монотонная последовательность и признак её сходимости. Число e. Задача о непрерывном начислении процентов по банковским вкладам.
39. Понятие предела функции в конечной точке и на бесконечности, их геометрический смысл. Односторонние пределы. Условия существования предела функции в конечной точке.
40. Бесконечно малые и большие функции, их основные свойства и взаимосвязь. Примеры бесконечно малых и больших функций.

41. Функции, ограниченные при $x \to a$. Взаимосвязь между функциями, имеющими предел и ограниченными при $x \to a$.
42. Основные теоремы о пределах функций (о пределе постоянной, суммы, разности, произведения и частного функций; о пределе элементарной функции). Предельный переход в неравенствах.
43. Первый и второй замечательные пределы, их следствия и применение при вычислении пределов.
44. Определения непрерывности функции в точке. Понятие непрерывности справа и слева. Условия непрерывности функции в точке. Непрерывность элементарных функций.
45. Понятие непрерывности на отрезке. Свойства функций непрерывных на отрезке (об ограниченности функции, об обращении функции в нуль, о наибольшем и наименьшем значениях функции).
46. Точки разрыва функции, их классификация и нахождение.
47. Комплексное число, его изображение на плоскости. Комплексно-сопряжённое число. Модуль и аргумент комплексного числа. Различные формы записи комплексного числа.
48. Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение, деление). Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.
49. Понятие многочлена, алгебраического уравнения. Основная теорема алгебры и теорема Безу. Разложение многочлена на множители. Нахождение корней квадратного уравнения.

Раздел. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

50. Приращение функции. Определение производной. Правая и левая производные. Условия существования конечной производной в точке.
51. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой в данной точке, их уравнения.
52. Понятие дифференцируемости функции в точке. Взаимосвязь понятий: дифференцируемость в точке, непрерывность в точке, существование в точке конечной производной.
53. Непосредственное нахождение производной. Правила дифференцирования постоянной, суммы, разности, произведения и частного функций.
54. Дифференцирование сложной функции. Логарифмическая производная.
55. Дифференцирование функций, заданных параметрически.
56. Дифференциал функции. Правила вычисления дифференциалов. Применение дифференциала в приближённых вычислениях.
57. Производные и дифференциалы высших порядков, их нахождение.
58. Теорема Ферма. Геометрический смысл теоремы.
59. Теорема Ролля. Геометрический смысл теоремы.

60. Теорема Лагранжа. Геометрический смысл теоремы. Формула конечных приращений Лагранжа. Теорема Коши.
61. Правило Лопиталя и его применение для раскрытия неопределённостей: $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.
62. Достаточный признак монотонности функции. Стационарные и критические точки. Нахождение интервалов монотонности функции.
63. Точки локального экстремума (максимума и минимума) и локальные экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции.
64. Глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) функции на отрезке, их нахождение.
65. Понятия выпуклости и вогнутости функции. Достаточный признак выпуклости (вогнутости) функции на интервале. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости функции.
66. Точка перегиба графика функции, условия существования и нахождение.
67. Понятие асимптоты графика функции. Вертикальные и наклонные асимптоты, условия их существования и нахождение.

Раздел. Функции нескольких переменных.

68. N-мерная точка, n-мерное арифметическое пространство R^n. Расстояние в R^n. N-мерный шар. Окрестность точки в R^n.
69. Классификация точек (предельные, внутренние, граничные). Множества точек в R^n (открытые, замкнутые, ограниченные, связные, выпуклые).
70. Понятие функции 2-х переменных, n-переменных. Естественная область определения ФНП, график функции 2-х переменных, линии и поверхности уровня.
71. Частные и полное приращения ФНП. Понятия предела и непрерывности ФНП. Свойства функций непрерывных в ограниченной и замкнутой области.
72. Частные производные первого и высших порядков, их нахождение.
73. Понятие дифференцируемости ФНП в точке, её геометрический смысл. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.
74. Дифференциалы ФНП первого и высших порядков, их нахождение. Применение первого дифференциала в приближённых вычислениях.
75. Производная по направлению и градиент, связь между ними.
76. Неявная ФНП. Правила вычисления производных неявной функции.
77. Точки локального экстремума (максимума и минимума) и локальные экстремумы ФНП. Стационарные и критические точки. Необходимое и достаточное условия локального экстремума ФНП.

78. Условный экстремум ФНП. Функция Лагранжа. Нахождение условного экстремума методом неопределённых множителей Лагранжа.
79. Глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) ФНП в ограниченной и замкнутой области, их нахождение.
80. Понятие эластичности функции. Производственная функция Кобба-Дугласа и её свойства.

6. Приложения.
6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

1 – 10. Вычислить определитель**:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $(i=1,\ j=2)$

а) непосредственным разложением по $i-ой$ строке;

б) непосредственным разложением по $j-ому$ столбцу**;**

Решение. а) вычисляем определитель разложением по элементам первой строки: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 3\cdot A_{14}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 2 + (-2)\cdot 1\cdot(-3) -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 4 - 0\cdot 2\cdot(-3) = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(2\cdot(-1)\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 3 + (-2)\cdot 0\cdot(-3) -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot(-3)) = -16$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -(2\cdot 1\cdot(-3) + 3\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot(-1)\cdot 3 -$$

$$-3\cdot 1\cdot 3 - 0\cdot 0\cdot(-3) - 2\cdot(-1)\cdot 2) = 11$$

Тогда $\Delta = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{14} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-16) + 3 \cdot 11 = 3$

б) вычисляем определитель непосредственным разложением по элементам второго столбца: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{42}$.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 \cdot (-3) -$$

$$- (-2) \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot (-3)) = -16$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) -$$

$$- 3 \cdot 3 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) \cdot (-3)) = 39$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$- 3 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = -2$$

Тогда $\Delta = 2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{42} = 2 \cdot (-16) + 1 \cdot 39 + 2 \cdot (-2) = 3$.

Ответ: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3$.

11-20. Найти матрицу $C = B \cdot A^T + 3A$, **если:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) Транспонируем матрицу A**:** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$**.**

2) Вычисляем произведение матриц $B \cdot A^T$:

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \\ \hline 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 \\ \hline 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3) Находим матрицу $3A$:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

4) Находим матрицу C: $C = B \cdot A^T + 3A =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 3+3 & 7+(-3) \\ 3+0 & 1+9 & 5+(-3) \\ 1+0 & 3+(-3) & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}$**.**

21 – 30. Дана система уравнений**:** $\begin{cases} 4x + y - 4z = -6 \\ 2x - 4y + 6z = 12 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$**.**   Требуется**:**

а) найти решение системы методом Крамера**; б)** записать систему в матричном виде и найти её решение методом обратной матрицы**; в)** найти решение системы методом Гаусса.

Решение.

А) <u>Метод Крамера</u>.

1а) Вычисляем определитель системы и проверяем, что он отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-4)\cdot(-1) + 1\cdot 6\cdot 1 + (-4)\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot(-4)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 6\cdot 2 = -56 \neq 0 .$$

2а) Так как $\Delta = -56 \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

3а) Вычисляем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -4 \\ 12 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-4)\cdot(-1) + 1\cdot 6\cdot 2 + (-4)\cdot 12\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot(-4)\cdot 2 - 1\cdot 12\cdot(-1) - (-6)\cdot 6\cdot 2 = -56,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -4 \\ 2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot 12\cdot(-1) + (-6)\cdot 6\cdot 1 + (-4)\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot 12\cdot 1 - (-6)\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 6\cdot 2 = -112,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 2 & -4 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-4)\cdot 2 + 1\cdot 12\cdot 1 + (-6)\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-6)\cdot(-4)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot 12\cdot 2 = -168 .$$

4а) Находим решение: $x = \dfrac{-56}{-56} = 1, \quad y = \dfrac{-112}{-56} = 2, \quad z = \dfrac{-168}{-56} = 3 .$

5а) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4\cdot 1 + 2 - 4\cdot 3 = -6 \\ 2\cdot 1 - 4\cdot 2 + 6\cdot 3 = 12 \\ 1 + 2\cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 12 = 12 \\ 2 = 2 \end{cases}.$

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3 .$

Б) <u>Метод обратной матрицы</u>.

1б) Записываем систему уравнений в матричном виде:

$$A \cdot X = B \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2б) Вычисляем определитель системы и проверяем, что он отличен от нуля:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-4) \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \cdot 2 -$$

$$-(-4) \cdot (-4) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -56 \neq 0$$

3б) Так как $|A| = -56 \neq 0$, то матрица системы A имеет обратную матрицу A^{-1} и единственное решение системы определяется формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4б) Находим обратную матрицу A^{-1} (методом присоединённой матрицы):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T .$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -32 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -18$$

Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{-56} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 \\ -7 & 0 & -7 \\ -10 & -32 & -18 \end{pmatrix}^T = \dfrac{1}{-56} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -7 & -10 \\ 8 & 0 & -32 \\ 8 & -7 & -18 \end{pmatrix}.$

5б) Находим решение: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-56} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -7 & -10 \\ 8 & 0 & -32 \\ 8 & -7 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-56} \cdot \begin{pmatrix} (-8)\cdot(-6) + (-7)\cdot 12 + (-10)\cdot 2 \\ 8\cdot(-6) + 0\cdot 12 + (-32)\cdot 2 \\ 8\cdot(-6) + (-7)\cdot 12 + (-18)\cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-56} \cdot \begin{pmatrix} -56 \\ -112 \\ -168 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6б) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4\cdot 1 + 2 - 4\cdot 3 = -6 \\ 2\cdot 1 - 4\cdot 2 + 6\cdot 3 = 12 \\ 1 + 2\cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 12 = 12 \\ 2 = 2 \end{cases}.$

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$.

В) <u>Метод Гаусса.</u>

1в) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

2в) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

В результате прямого хода матрица системы A должна быть преобразована с помощью элементарных преобразований строк к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$. Система уравнений, матрица которой A' является треугольной с элементами $a'_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,...,n)$, имеет единственное решение, а система уравнений, матрица которой A' является трапециевидной с элементами $a'_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,...,k, \quad где\ k < n)$, имеет бесконечно много решений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \textit{из второй строки, умноженной на 2, вычитаем первую} \\ \textit{из третьей строки, умноженной на 4, вычитаем первую} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -9 & 16 & 30 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \textit{к третьей строке, умноженной на 9,} \\ \textit{прибавляем вторую строку, умноженную на 7} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -9 & 16 & 30 \\ 0 & 0 & -112 & -336 \end{array}\right)$. В результате элементарных преобразований матрица A системы преобразована к специальному виду A'. Система уравнений, матрица которой A', является треугольной с ненулевыми диагональными элементами $a'_{ii} \neq 0$, имеет всегда единственное решение, которое находим, выполняя обратный ход.

Замечание. *Если при выполнение преобразования расширенной матрицы* $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$ *в преобразованной матрице* $\widetilde{A}'$ *появляется строка* $(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad | \, b')$, *где* $b' \neq 0$, *то это говорит о несовместности исходной системы уравнений.*

3в) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} 4x + y - 4z = -6 \\ -9y + 16z = 30 \\ -112z = -336 \end{cases}$ и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех неизвестных: $\begin{cases} z = 3 \\ -9y = 30 - 16z = 30 - 16 \cdot (3) = -18 \Rightarrow y = 2 \\ 4x = -6 - y + 4z = -6 - 2 + 4 \cdot 3 = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$.

4в) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4 \cdot 1 + 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 12 \\ 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 12 = 12 \\ 2 = 2 \end{cases}$.

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$.

31-40. Найти общее решение для каждой из данных систем методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$.

Решение.

1а) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A}=(A\mid B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-3&0\\3&5&6&-4&0\\4&5&-2&3&0\\3&8&24&-19&0\end{array}\right).$$

2а) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-3&0\\3&5&6&-4&0\\4&5&-2&3&0\\3&8&24&-19&0\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\textit{из второй строки вычитаем первую, умноженную на } 3\\ \textit{из третьей строки вычитаем первую, умноженную на } 4\\ \textit{из четвёртой строки вычитаем первую, умноженную на } 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-3&0\\0&-1&-6&5&0\\0&-3&-18&15&0\\0&2&12&-10&0\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\textit{из третьей строки вычитаем вторую, умноженную на } 3\\ \textit{к четвёртой строке прибавляем вторую, умноженную на } 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-3&0\\0&-1&-6&5&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\textit{вычёркиваем третью и четвёртую строки}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-3&0\\0&-1&-6&5&0\end{array}\right).$$

Матрица системы приведена к трапециевидному виду с ненулевыми диагональными элементами. Соответствующая такой матрице система уравнений имеет бесконечно много решений, которые находим, выполняя обратный ход, и записываем в виде общего решения. Для записи общего решения указываем её базисные и свободные неизвестные. Базисный минор матрицы системы образуют столбцы коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисных – неизвестные x_1 и x_2, тогда свободными будут неизвестные x_3 и x_4.

3а) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$. Свободным неизвестным придаём разные, произвольные постоянные значения: $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех базисных неизвестных:

$$\begin{cases} -x_2 = 6x_3 - 5x_4 = 6C_1 - 5C_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -6C_1 + 5C_2 \\ x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2 \cdot (-6C_1 + 5C_2) - 4C_1 + 3C_2 = 8C_1 - 7C_2 \end{cases}.$$

Тогда общее решение системы запишется в виде: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8C_1 - 7C_2, -6C_1 + 5C_2, C_1, C_2)$.

4а) Выполняем проверку:

$$\begin{cases} 1 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 2 \cdot (-6C_1 + 5C_2) + 4C_1 - 3C_2 = 0 \\ 3 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 5 \cdot (-6C_1 + 5C_2) + 6C_1 - 4C_2 = 0 \\ 4 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 5 \cdot (-6C_1 + 5C_2) - 2C_1 + 3C_2 = 0 \\ 3 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 8 \cdot (-6C_1 + 5C_2) + 24C_1 - 19C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8C_1 - 7C_2, -6C_1 + 5C_2, C_1, C_2)$.

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$.

Решение.

1а) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right).$$

2а) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \textit{из второй строки вычитаем первую, умноженную на } 2 \\ \textit{из третьей строки вычитаем первую} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

Замечание. *В результате прямого хода матрица системы* A *должна быть преобразована с помощью элементарных преобразований строк к матрице* A' *треугольного или трапециевидного вида с элементами* $a'_{ii} \neq 0$.

Если, при выполнении преобразования расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, *в преобразованной матрице* $\widetilde{A}'$ *появляется строка* $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad | \, b'\right)$, *где* $b' \neq 0$, *то это говорит о несовместности исходной системы уравнений.*

Для выполнения условия $a'_{ii} \neq 0$ *может потребоваться перестановка местами столбцов матрицы системы. Если при выполнении преобразований прямого хода в матрице системы переставлялись местами столбцы коэффициентов при неизвестных, то в дальнейшем, при записи системы уравнений, соответствующей последней расширенной матрице прямого хода, это следует учесть.*

$$\Leftrightarrow \left(\textit{переставляем местами второй и третий столбцы}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -22 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\textit{из третьей строки вычитаем вторую, умноженную на } 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\textit{вычёркиваем третью строку}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right).$$

Матрица системы приведена к трапециевидному виду с ненулевыми диагональными элементами. Соответствующая такой матрице система уравнений имеет бесконечно много решений, которые находим, выполняя обратный ход, и записываем в виде общего решения. Для записи общего решения указываем её базисные и свободные неизвестные. Базисный минор матрицы системы, с учётом перестановки местами столбцов, образуют первый и второй столбцы коэффициентов при неизвестных x_1 и x_3: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисных – неизвестные x_1 и x_3, тогда свободными будут неизвестные x_2 и x_4.

3б) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & +7x_4 & =1 \\ & & -8x_3 & -11x_4 & =0 \end{cases}$. Свободным неизвестным придаём разные, произвольные постоянные значения: $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех базисных неизвестных:

$$\begin{cases} -8x_3 = 11x_4 = 11C_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\dfrac{11}{8}C_2 \\ 2x_1 = 1 + 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 1 + 3C_1 - 5 \cdot \left(-\dfrac{11}{8}C_2 \right) - 7C_2 = 1 + 3C_1 - \dfrac{1}{8}C_2 \end{cases}.$$

Тогда общее решение системы запишется в виде:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3C_1}{2} - \frac{C_2}{16},\ C_1,\ -\frac{11C_2}{8},\ C_2 \right)$$

4б) Выполняем проверку:

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16} \right) & -3C_1 & +5 \cdot \left(-\dfrac{11C_2}{8} \right) & +7C_2 & =1 \\ 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16} \right) & -6C_1 & +2 \cdot \left(-\dfrac{11C_2}{8} \right) & +3C_2 & =2 \\ 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16} \right) & -3C_1 & -11 \cdot \left(-\dfrac{11C_2}{8} \right) & -15C_2 & =1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3C_1}{2} - \frac{C_2}{16}, C_1, -\frac{11C_2}{8}, C_2\right)$.

в) $\begin{cases} 7x_1 & -4x_2 & +x_3 & +3x_4 & =5 \\ 3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +4x_4 & =2 \\ 5x_1 & +7x_2 & -4x_3 & -6x_4 & =3 \end{cases}$.

Решение.

1в) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right).$$

2в) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} \textit{из второй строки, умноженной на 7, вычитаем первую, умноженную на 3} \\ \textit{из третьей строки, умноженной на 7, вычитаем первую, умноженную на 5} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 69 & -33 & -57 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\textit{к третьей строке прибавляем вторую, умноженную на 3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

При выполнении преобразования расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появилась строка $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | -7)$, соответствующая уравнению $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -7$, которому не удовлетворяет ни один набор значений неизвестных (x_1, x_2, x_3, x_4), что говорит о несовместности исходной системы уравнений.

Ответ: Система несовместна.

41-50. Имеются данные о работе трёх отраслей экономики в отчётном периоде и план выпуска конечной продукции $(60, 60, 80)$ в следующем периоде (в усл. ден. ед.). Требуется, используя модель Леонтьева многоотраслевой экономики, найти: **а)** матрицы коэффициентов прямых и полных затрат; **б)** плановые объёмы выпуска валовой продукции каждой из отраслей, межотраслевые поставки и объёмы выпуска чистой продукции. В ответе записать данные межотраслевого баланса планового периода. *(<u>Указание</u>: значения коэффициентов прямых и полных затрат вычислить с точностью до 0.01; значения плановых объёмов выпуска валовой и чистой продукции, межотраслевых поставок округлить до целых значений).*

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**20**	**25**	**105**	**50**	**200**
II	**60**	**75**	**70**	**45**	**250**
III	**60**	**50**	**140**	**100**	**350**
Чистый продукт	**60**	**100**	**35**		
Валовой продукт	**200**	**250**	**350**		

Решение.

1) Находим матрицу $A = (a_{ij})$ коэффициентов прямых затрат $a_{ij} = x_{ij} / x_j$ ($i = 1,2,3$ - номер отрасли производства, $j = 1,2,3$ - номер отрасли потребления) и устанавливаем её продуктивность:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{20}{200} = 0.1, \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{25}{250} = 0.1, \quad a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{105}{350} = 0.3$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{60}{200} = 0.3, \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{75}{250} = 0.3, \quad a_{23} = \frac{x_{23}}{x_3} = \frac{70}{350} = 0.2$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{x_1} = \frac{60}{200} = 0.3, \quad a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{50}{250} = 0.2, \quad a_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = \frac{140}{350} = 0.4.$$

Таким образом $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$.

Так как $a_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1,2,3$) и $\max\limits_{j=1,2,3} \sum\limits_{i=1}^{3} a_{ij} = \max\{0.7, 0.6, 0.9\} = 0.9 < 1$, то матрица A продуктивна и, следовательно, для любого $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения Леонтьева: $(E - A) \cdot X = Y$, записываемое в виде $X = (E - A)^{-1} \cdot Y = S \cdot Y$, где E - единичная матрица, $S = (E - A)^{-1}$ - матрица коэффициентов полных затрат, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ - векторы (матрицы-столбцы) валового выпуска и конечного продукта, соответственно .

2а) Находим матрицу:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.3 \\ -0.3 & 0.7 & -0.2 \\ -0.3 & -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

3а) Находим матрицу $S = (E - A)^{-1}$, обратную к $(E - A)$, методом присоединённой матрицы, по формуле: $S = \dfrac{1}{|E - A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$, где:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0.7 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.38 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.24 \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} -0.3 & 0.7 \\ -0.3 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.27,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -0.1 & -0.3 \\ -0.2 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.12 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.12 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.21,$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} -0.1 & -0.3 \\ 0.7 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.23 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ -0.3 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.27 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.3 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.6,$$

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.3 \\ -0.3 & 0.7 & -0.2 \\ -0.3 & -0.2 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.9 \cdot A_{11} + (-0.1) \cdot A_{12} + (-0.3) \cdot A_{13} = 0.237.$$

Тогда $S = \dfrac{1}{0.237} \cdot \begin{pmatrix} 0.38 & 0.12 & 0.23 \\ 0.24 & 0.45 & 0.27 \\ 0.27 & 0.21 & 0.6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.60 & 0.51 & 0.97 \\ 1.01 & 1.90 & 1.14 \\ 1.14 & 0.89 & 2.53 \end{pmatrix}.$

1б) Находим вектор $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}$ валового выпуска на вектор $Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix}$ конечного продукта в плановом периоде, следующим за отчётным (в предположении, что матрица A, называемая также технологической, а, следовательно, и матрица S не изменяются, т.е. $A^* = A,\ S^* = S$) по формуле:

$$X^* = S^* \cdot Y^* = S \cdot Y^* = \begin{pmatrix} 1.60 & 0.51 & 0.97 \\ 1.01 & 1.90 & 1.14 \\ 1.14 & 0.89 & 2.53 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 204 \\ 266 \\ 324 \end{pmatrix}.$$

2б) Находим по формуле $x_{ij}^* = a_{ij} \cdot x_j^*$ $(i, j = 1,2,3)$ плановые межотраслевые поставки x_{ij}^*, округляя полученные значения до целых (с учётом балансовых соотношений $\sum_{j=1}^{3} x_{ij}^* + y_i^* = x_i^*$, $i = 1,2,3$):

$x_{11}^* = 0.1 \cdot 204 \approx 20$, $\quad x_{12}^* = 0.1 \cdot 266 \approx 27$, $\quad x_{13}^* = 0.3 \cdot 324 \approx 97$,

$x_{21}^* = 0.3 \cdot 204 \approx 61$, $\quad x_{12}^* = 0.3 \cdot 266 \approx 80$, $\quad x_{23}^* = 0.2 \cdot 324 \approx 65$,

$x_{31}^* = 0.3 \cdot 204 \approx 61$, $\quad x_{32}^* = 0.2 \cdot 266 \approx 53$, $\quad x_{33}^* = 0.4 \cdot 324 \approx 130$.

3б) Плановые объёмы z_j^* $(j = 1,2,3)$ выпуска чистой продукции каждой из отраслей находим по формуле $z_j^* = x_j^* - \sum_{i=1}^{3} x_{ij}^*$ $(j = 1,2,3)$:

$z_1^* = 204 - (20 + 61 + 61) = 62$, $\quad z_2^* = 266 - (27 + 80 + 53) = 106$,

$z_3^* = 324 - (97 + 65 + 130) = 32$.

Ответ: Межотраслевой баланс планового периода имеет вид:

Отрасли производства	Отрасти потребления			Конечный продукт	Валовой продукт
	I	II	III		
I	**20**	**27**	**97**	**60**	**204**
II	**61**	**80**	**65**	**60**	**266**
III	**61**	**53**	**130**	**80**	**324**
Чистый продукт	**62**	**106**	**32**		
Валовой продукт	**204**	**266**	**324**		

51 – 60. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$: $\overline{a} = (0, 1, 2)$, $\overline{b} = (1, 0, 1)$, $\overline{c} = (-1, 2, 4)$. Требуется: **а)** найти векторы $\overline{m} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$ и $\overline{n} = 3\overline{b} - 2\overline{c}$ **; б)** вычислить скалярное произведение $\overline{m} \cdot \overline{n}$; **в)** найти проекцию вектора $\overline{m}$ на направление вектора $\overline{n}$.

Решение.

а) Находим векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$:

$$\overline{m} = 2\overline{a} + 3\overline{b} = 2 \cdot (0, 1, 2) + 3 \cdot (1, 0, 1) = (0, 2, 4) + (3, 0, 3) =$$
$$= (0 + 3,\ 2 + 0,\ 4 + 3) = (3, 2, 7)\ ;$$
$$\overline{n} = 3\overline{b} - 2\overline{c} = 3 \cdot (1, 0, 1) - 2 \cdot (-1, 2, 4) = (3, 0, 3) - (-2, 4, 8) =$$
$$= (3 - (-2),\ 0 - 4,\ 3 - 8) = (5, -4, -5)\ .$$

б) Вычисляем скалярное произведение векторов $\overline{m} \cdot \overline{n}$:

$$\overline{m} \cdot \overline{n} = (3, 2, 7) \cdot (5, -4, -5) = 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 7 \cdot (-5) = -28\ .$$

в) Находим проекцию вектора $\overline{m}$ на направление вектора $\overline{n}$:

$$np_{\overline{n}}\overline{m} = \frac{\overline{m} \cdot \overline{n}}{|\,\overline{n}\,|} = \frac{(-28)}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-5)^2}} = -\frac{28}{\sqrt{66}}\ .$$

Ответ: а) $\overline{m} = 2\overline{a} + 3\overline{b} = (3, 2, 7)$; $\overline{n} = 3\overline{b} - 2\overline{c} = (5, -4, -5)$; **б)** $\overline{m} \cdot \overline{n} = -28$; **в)** $np_{\overline{n}}\overline{m} = -28/\sqrt{66}$ **.**

61-70. Даны вершины треугольника ABC : $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$
Требуется найти:

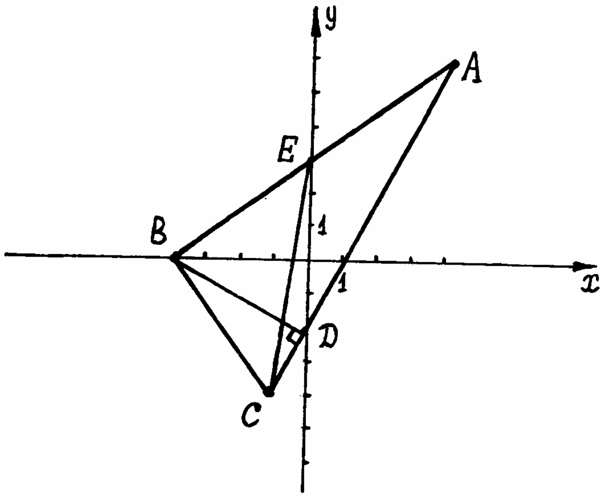
а) длину стороны AC **;** **б)** уравнение стороны AC **;**

в) уравнение медианы CE , проведённой из вершины C **;**

г) уравнение высоты BD , проведённой из вершины B **;**

д) длину h высоты BD **; е)** площадь S треугольника ABC **.** Сделать чертёж.

Решение. Сделаем чертёж:



а) Длину стороны AC находим как длину вектора $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A,\ y_C - y_A) = (-1-4,\ -4-6) = (-5,\ -10),$$

$$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{5}.$$

б) Уравнение стороны AC находим как уравнение прямой, проходящей через точки $A(4,\ 6)$ и $C(-1,\ -4)$, и записываем его в виде общего уравнения прямой:

$$AC: \frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow \frac{x-4}{-5} = \frac{y-6}{-10} \Rightarrow$$

$$(-10)\cdot(x-4) = (-5)\cdot(y-6) \Rightarrow \underline{2x - y - 2 = 0}.$$

в) Уравнение медианы CE находим как уравнение прямой, проходящей через точки $C(-1,\ -4)$ и $E(x_E,\ y_E)$, и записываем его в виде общего уравнения прямой. Неизвестные координаты точки E находим как координаты точки, делящей сторону AB пополам:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-4)}{2} = 0; \quad y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+0}{2} = 3.$$

Тогда: $CE: \dfrac{x-x_C}{x_E-x_C}=\dfrac{y-y_C}{y_E-y_C} \Rightarrow \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{7} \Rightarrow 7\cdot(x+1)=y+4 \Rightarrow$

$$\underline{7x-y+3=0}.$$

г) Уравнение высоты BD находим как уравнение прямой, проходящей через точку $B(-4,\,0)$ перпендикулярно вектору $\overline{AC}=(-5,\,-10)$, который принимаем за нормальный вектор прямой BD. Тогда $BD:(-5)\cdot(x+4)+(-10)\cdot(y-0)=0 \Rightarrow \underline{x+2y+4=0}$

д) Длину h высоты BD находим как расстояние от точки $B(-4,\,0)$ до прямой AC, заданной общим уравнением $2x-y-2=0$:

$$h=\rho(B,\,AC)=\frac{|\,2x_B-y_B-2\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\,2\cdot(-4)-0-2\,|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}.$$

е) Площадь треугольника ABC находим по формуле: $S=\dfrac{h\cdot AC}{2}$. Откуда

$$S=\frac{10\cdot 5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot 2}=25.$$

Ответ: а) $AC=5\sqrt{5}$ **;** **б)** $AC: 2x-y-2=0$ **;** **в)** $CE: 7x-y+3=0$ **;**
г) $BD: x+2y+4=0$ **;** **д)** $h=10/\sqrt{5}$ **;** **е)** $S=25$ **.**

71–80. Установить, какую невырожденную кривую определяет алгебраическое уравнение второго порядка, построить её:

а) $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$; **б)** $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$;

в) $2x^2-8x-y+5=0$.

Решение:

а) Так как $B=0$, $AC-B^2=1\cdot(-4)-0^2=-4<0$, то уравнение определяет гиперболу с центром в точке (x_0,y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 24 = 0$, преобразуем его следующим образом:

$$(x^2 + 8x) - 4 \cdot (y^2 + 6y) - 24 = 0$$

$$(x^2 + 8x + 16 - 16) - 4 \cdot (y^2 + 6y + 9 - 9) - 24 = 0$$

$$(x^2 + 8x + 16) - 4 \cdot (y^2 + 6y + 9) = 4 \quad \Rightarrow \quad (x+4)^2 - 4 \cdot (y+3)^2 = 4$$

$$\frac{(x-(-4))^2}{2^2} - \frac{(y-(-3))^2}{1^2} = 1.$$

Полученное уравнение определяет гиперболу с центром в точке $(-4,-3)$ и осями симметрии параллельными координатным осям. Для построения гиперболы в системе координат Oxy: **1)** отмечаем центр гиперболы $(-4,-3)$; **2)** проводим через центр $(-4,-3)$ пунктиром оси симметрии гиперболы; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник гиперболы с центром $(-4,-3)$ и сторонами $2a = 4$ и $2b = 1$ параллельными осям симметрии; **4)** проводим через противоположные вершины основного прямоугольника пунктиром прямые, являющиеся асимптотами гиперболы, к которым неограниченно близко при бесконечном удалении от начала координат приближаются ветви гиперболы, не пересекая их; **5)** изображаем сплошной линией ветви гиперболы (рис. 1).

Ответ: Гипербола с центром в точке $(-4,-3)$ (см. рис.1)..

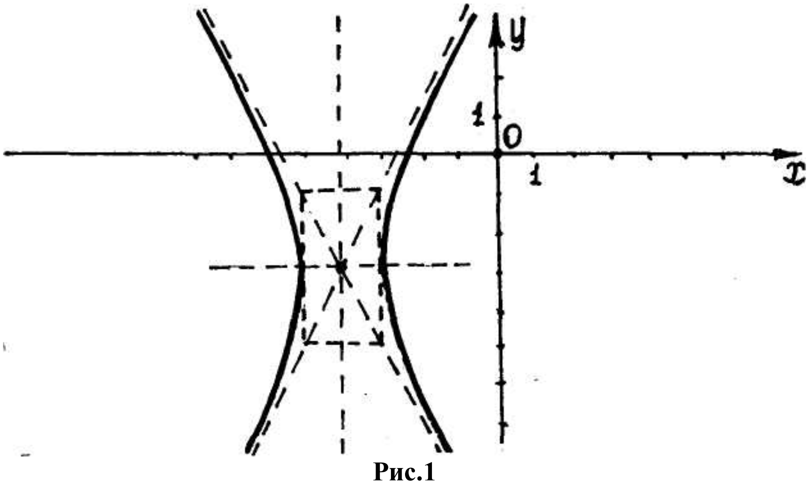


Рис.1

б) Так как $B=0$, $AC-B^2=4\cdot 9-0^2=36>0$, $A\neq C$, то уравнение определяет эллипс с центром в точке (x_0, y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$**,** преобразуем его следующим образом:

$$4\cdot(x^2-2x)+9\cdot(y^2-4y)+4=0$$

$$4\cdot(x^2-2x+1-1)+9\cdot(y^2-4y+4-4)+4=0$$

$$4\cdot(x^2-2x+1)+9\cdot(y^2-4y+4)=36 \quad\Rightarrow\quad 4\cdot(x-1)^2+9\cdot(y-2)^2=36$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке $(1,\,2)$ и осями симметрии параллельными осям координат. Для построения эллипса в системе координат Oxy: **1)** отмечаем центр эллипса $(1,\,2)$; **2)** проводим через центр $(1,\,2)$ пунктиром оси симметрии эллипса; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник эллипса с центром $(1,\,2)$ и сторонами $2a=9$ и $2b=4$ параллельными осям симметрии; **4)** изображаем сплошной линией эллипс, вписывая его в основной прямоугольник так, чтобы эллипс касался его сторон в точках пересечения прямоугольника с осями симметрии (рис.2).
Ответ: Эллипс с центром в точке $(1,\,2)$ (см. рис.2).

в) Так как $B=0$, $AC-B^2=2\cdot 0-0^2=0$, $A\neq 0$, то уравнение определяет параболу с вершиной в точке (x_0, y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Oy: $(x-x_0)^2=2p\cdot(y-y_0)$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения $2x^2-8x-y+5=0$**,** преобразуем его следующим образом:

$$2\cdot(x^2-4x)-y+5=0 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot(x^2-4x+4-4)-y+5=0$$

$$2\cdot(x^2-4x+4)=1\cdot(y+3) \quad\Rightarrow\quad (x-2)^2=0.5\cdot(y-(-3))$$

Полученное уравнение определяет параболу с вершиной в точке $(2,-3)$ и осью симметрии параллельной оси Oy. Для построения параболы в системе координат Oxy: **1)** отмечаем вершину параболы $(2,-3)$; **2)** проводим через вершину $(2,-3)$ пунктиром ось симметрии параболы; **3)** изображаем сплошной линией параболу, направляя её ветвь, с учётом того, что параметр параболы $p = 1/4 > 0$, в положительную сторону оси Oy (рис.3).

Ответ: Парабола с вершиной в точке $(2,-3)$ (см. рис.3).

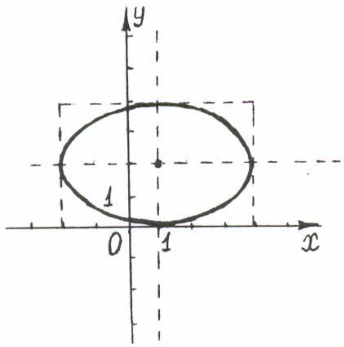


Рис.2.

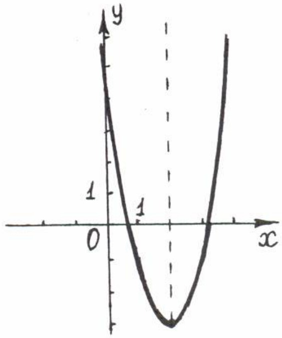


Рис.3.

81-90. Требуется:

а) найти естественную область определения функции $y = e^{\sqrt{x}} \ln(2-3x)$ **;**

б) установить чётность (нечётность) функции $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$.

Решение.

а) Естественную область определения находим как множество $D(y)$ всех значений аргумента x функции, для которых формула $y = e^{\sqrt{x}} \ln(2-3x)$ имеет смысл: $D(y) = \left\{ x \in R \middle| \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x > 0 \end{cases} \right\}$. Решив (на числовой прямой) систему неравенств $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x > 0 \end{cases}$, устанавливаем, что геометрическим образом множества $D(y)$ является промежуток $[0, 2/3)$.

б) Находим сначала естественную область определения функции $y = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$**:** $D(y) = \{x \in R \mid x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0\}$. Решив (на числовой прямой) неравенство $x^4 - 13x^2 + 36 = (x+3)(x+2)(x-2)(x-3) \geq 0$, устанавливаем, что геометрическим образом множества $D(y)$ является объединение промежутков $(-\infty,-3)\bigcup[-2,2]\bigcup(3,+\infty)$.

Так как область $D(y)$ является симметричной относительно точки $x=0$, то проверяем выполнение для всех $x\in D(y)$ условий: $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$, учитывая чётность и нечётность основных элементарных функций, входящих в аналитическое выражение $f(x)$.

Если область $D(y)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то $f(x)$ на этом множестве является функцией общего вида.

Для этого находим $f(-x)=\sqrt{(-x)^4-13(-x)^2+36}=\sqrt{x^4-13x^2+36}$. Поскольку $f(-x)=f(x)$ для всех $x\in D(y)$ $=(-\infty,-3)\bigcup[-2,2]\bigcup(3,+\infty)$, то функция $y=\sqrt{x^4-13x^2+36}$ является чётной.

Ответ:

а) $D(y)=[0,\,2/3)$, $y=e^{\sqrt{x}}\ln(2-3x)$; **б)**функция $y=\sqrt{x^4-13x^2+36}$ - чётная.

91-100. Вычислить пределы (не пользуясь правилом Лопиталя):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$

Вычисление предела $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, где $a=x_0,\infty$, начинают всегда с подстановки в $f(x)$ предельного значения её аргумента x. В результате могут получиться неопределённости $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, которые раскрывают тождественными преобразованиями $f(x)$ такими, чтобы преобразованное выражение получилось определённым. При вычислении пределов используют свойства конечных пределов и бесконечно больших функций, а также следующие известные пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\right)=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n!=\infty\quad(n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n),\qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to0}}\left(1+\alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)}=e.$$

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения ∞ получим неопределённость $[\infty/\infty]$. Для её раскрытия сначала разделим числитель и знаменатель дроби на x^3 (старшую степень переменной x в числителе и знаменателе), после чего используем свойства конечных пределов и бесконечно больших функций. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-0+0}{0+0}=\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=?$ При подстановке вместо переменной x её предельного значения $x_0=-2$ получим неопределённость $[0/0]$. Для её раскрытия выделим в числителе и знаменателе дроби общий множитель вида $(x-x_0)^\alpha$, где $\alpha\in R$ - некоторое число, т.е. множитель $(x+2)^\alpha$. Затем сократим на него числитель и знаменатель дроби, после чего используем свойства пределов.

__1)__ В квадратном трёхчлене ax^2+bx+c множитель выделяют разложением квадратного трёхчлена по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. __2)__ В выражении $(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d})$ множитель выделяют следующим способом: $\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}=$

$$=\frac{(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d})(\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d})}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}=\left(x-\frac{d-b}{a-c}\right)\frac{(a-c)}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}}.$$

В результате получим $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}=\dfrac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6})(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}=(x+2)\dfrac{(-2)}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}} \\ \\ x^2-x-6=(x+2)(x-3) \end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(-2)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to-2}\frac{-2}{(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}=\frac{1}{10}.$$

Ответ: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-12x+1}{x^2+2}=\infty$**;** **б)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}=\dfrac{1}{10}$.

101-110. Для указанной функции $y=f(x)$ требуется: **а)** выяснить при каких значениях параметра a функция будет непрерывной**; б)** найти точки разрыва функции и исследовать их характер**.** Построить график функции**.**

а) $y=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3-ax^2, & x>1 \end{cases}$**;** **б)** $y=\begin{cases} x^2, & x\le -1 \\ \dfrac{1}{x}, & -1<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$**.**

Решение.

Точками разрыва функции $y=f(x)=\begin{cases} \varphi_1(x), & x\le x_1 \\ \varphi_2(x), & x_1<x\le x_2 \\ \dots & \dots \\ \varphi_m(x), & x>x_{m-1} \end{cases}$ *являются точки разрыва функций* $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_m(x)$ *в промежутках* $(-\infty,x_1)$, $(x_1,x_2),\dots,(x_{m-1},+\infty)$*, кроме того, точками возможного разрыва функции* $y=f(x)$ *являются точки* $x_1,x_2,\dots,x_{m-1}$ *в окрестности которых и в самих точках функция задаётся разными аналитическими выражениями.*

Точка $x=x_0$ *является точкой непрерывности функции* $y=f(x)$ *тогда и только тогда, когда:* $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

а) Поскольку функции $\varphi_1(x)=x+1$ и $\varphi_2(x)=3-ax^2$ непрерывны в промежутках $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$ как элементарные функции, определённые в каждой точке данных промежутков, то непрерывность функции

$y=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3-ax^2, & x>1 \end{cases}$ может нарушиться только в точке её возможного разрыва $x=1$.

Определяем значение параметра a из условия непрерывности функции $y=f(x)$ в точке $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$. Вычисляя $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, $f(1)$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(3-ax^2)=3-a$, $f(1)=2$, из условия непрерывности $2=3-a=2$, находим $a=1$.

График непрерывной функции $y=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3-x^2, & x>1 \end{cases}$ имеет вид изображённый на рис.4.

б) Функции $\varphi_1(x)=x^2$ и $\varphi_3(x)=1$ непрерывны в промежутках $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ как элементарные функции, определённые в каждой точке данных промежутков, а функция $\varphi_2(x)=1/x$ в промежутке $(-1,1)$ имеет точкой разрыва точку $x=0$, в которой она не определена. Тогда для функции $y=\begin{cases} x^2, & x\le -1 \\ 1/x, & -1<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ точка $x=0$ является точкой разрыва, а точки $x=-1$ и $x=1$, в окрестности которых и в самих точках функция задаётся разными аналитическими выражениями, являются точками возможного разрыва.

Исследуем на разрыв точки $x=-1, 0, 1$ и установим характер разрыва:

1) $$\lim_{x\to -1-0} f(x)\overset{?}{=}\lim_{x\to -1+0} f(x)\overset{?}{=}f(-1)\ \Rightarrow$$

$$\left[\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0} x^2=1,\ \lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(1/x)=-1,\ f(-1)=-1\right]$$

$$\Rightarrow\ 1\ne -1=-1.$$

Следовательно, точка $x=-1$ - точка разрыва 1-го рода функции $y=f(x)$.

2) $$\lim_{x\to 0-0} f(x)\overset{?}{=}\lim_{x\to 0+0} f(x)\overset{?}{=}f(0)$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \ \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \ f(0) - \text{неопределено}.$$

Следовательно, точка $x = 0$ - точка бесконечного разрыва (2-го рода) функции $y = f(x)$.

3) $$\lim_{x\to 1-0} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to 1+0} f(x) \overset{?}{=} f(1) \Rightarrow$$

$$\left[\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (1/x) = 1, \ \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 1 = 1, \ f(1) = 1\right] \Rightarrow 1 = 1 = 1.$$

Следовательно, точка $x = 1$ - точка непрерывности функции $y = f(x)$.

График функции $y = \begin{cases} x^2, & x \le -1 \\ 1/x, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ имеет вид, изображённый на рис.5.

Ответ: а) Функция $y = f(x)$ непрерывна при $a = 1$ (рис.4); **б)** $x = -1$ - точка разрыва 1-го рода**,** $x = 0$**-** точка бесконечного разрыва функции $y = f(x)$ (рис.5).

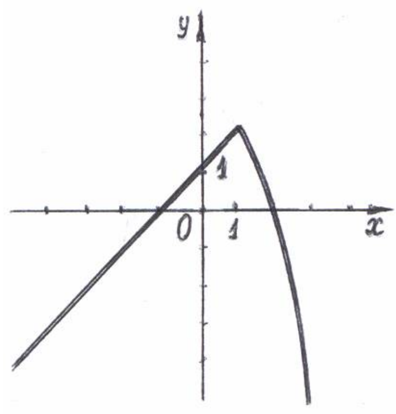


Рис.4

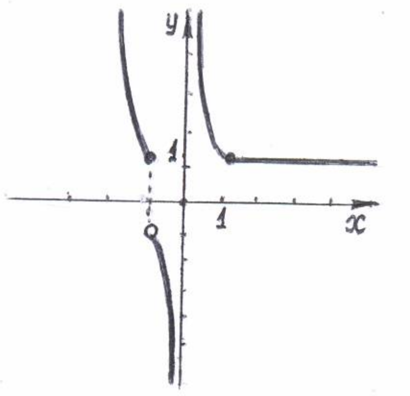


Рис.5

111-120. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 4i$ и алгебраическое уравнение $z^4 + 27z = 0$. Требуется: **а)** вычислить $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$,

$\dfrac{z_1}{z_2}$ **; б)** найти все корни алгебраического уравнения на множестве комплексных чисел.

Решение.

1а) Вычисляем $z_1 + z_2$: $\quad z_1 + z_2 = (2+3i)+(5-4i) = 2+3i+5-4i = 7-i$.

2а) Вычисляем $\overline{z_1 \cdot z_2}$.

Сначала находим $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(5-4i) = 10-8i+15i-12i^2 =$ (учитываем, что $i^2 = -1$) $= 22+7i$. Тогда $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(22+7i)} = 22-7i$

3а) Вычисляем $\dfrac{z_1}{z_2}$**:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{(2+3i)\cdot\overline{(5-4i)}}{(5-4i)\cdot\overline{(5-4i)}} = \dfrac{(2+3i)\cdot(5+4i)}{(5-4i)\cdot(5+4i)} =$

$= \dfrac{10+8i+15i+12i^2}{25+20i-20i-16i^2} =$ (учитываем, что $i^2 = -1$) $= \dfrac{-2+23i}{41} = -\dfrac{2}{41}+\dfrac{23}{41}i$.

1б) Для нахождения корней алгебраического уравнения $z^4 + 27z = 0$, раскладываем его левую часть на множители:

$$z^4 + 27z = z\cdot(z^3+27) = z\cdot(z+3)\cdot(z^2-3z+9).$$

2б) Находим корни уравнения на множестве комплексных чисел, приравнивая каждый из множителей нулю (число корней, с учётом кратности, должно равняться порядку уравнения):

1) $z = 0 \qquad \Rightarrow \; z_1 = 0$.

2) $z + 3 = 0 \qquad \Rightarrow \; z_2 = -3$.

3) $z^2 - 3z + 9 = 0$. Так как дискриминант квадратного уравнения $D = 9 - 4\cdot 9 = -27 < 0$, то уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня: $z_{3,4} = \dfrac{-(-3) \pm i\cdot\sqrt{|-27|}}{2} = \dfrac{3 \pm i\cdot\sqrt{27}}{2} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

Ответ: а) $z_1 + z_2 = 7-i$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = 22-7i$**,** $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{2}{41}+\dfrac{23}{41}i$ **;**

б) $z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_{3,4} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

121-130. Найти производную $y' = f'(x)$ **:**

а) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$ **б)** $y = \sqrt[4]{1 - x^2}$ **в)** $y = e^{4x} \cdot \sqrt[3]{1 - 2x}$ **;** **г)** $y = \dfrac{x \sin^2 3x}{\ln(5x + 2)}$**.**

> *Нахождение производной* $y' = y'(x)$ *функции* $y = y(x)$ *заданной явно, с помощью правил дифференцирования:*
> $(C)' = 0$ *(* $C = const$ *)*, $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $(Cf)' = C \cdot f'$,
> $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$, $(f^g)' = f^g\left(f' \cdot \dfrac{g}{f} + (\ln f)g'\right)$,
> $f'(x) = \left(F(u)\Big|_{u=\varphi(x)}\right)' = F'(u)\varphi'(x)$ *сводят к нахождению табличных производных (**приложение 6.3**).*

Решение.

$$\textbf{а)}\ y' = \left(\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}\right)' = \left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \\ f(x) = x^2 - 6x + 3, \quad g(x) = x - 3 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{(x^2 - 6x + 3)'(x - 3) - (x^2 - 6x + 3)(x - 3)'}{(x - 3)^2}, \text{ где}$$

$$(x^2 - 6x + 3)' = (x^2)' - (6x)' + (3)' = 2x - 6(x)' + 0 = 2x - 6 \cdot 1 = 2x - 6,$$

$$(x - 3)' = (x)' - (3)' = 1 - 0.$$

Тогда $y' = \dfrac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 3) \cdot 1}{(x - 3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 15}{(x - 3)^2}$.

б) $y' = \left(\sqrt[4]{1 - x^2}\right)' = \left(\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)'$. Представим функцию в виде сложной функции $\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{4}} = u^{\frac{1}{4}}\Big|_{u=1-x^2}$ и применим правило вычисления производной сложной функции $\left(u^{1/4}\Big|_{u=1-x^2}\right)' = \left[y'_x = y'_u \cdot u'_x\right] = \left(u^{1/4}\right)'_u \cdot u'_x =$

$$=\frac{1}{4}u^{\frac{1}{4}-1}\cdot u'_x=\frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{\frac{-3}{4}}(1-x^2)'=\left[(1-x^2)'=(1)'-(x^2)'=0-2x=-2x\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-x^2)^{3/4}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{2\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}.$$

в) $y'=\left(e^{4x}\cdot\sqrt[3]{1-2x}\right)'=\left(e^{4x}\right)'\sqrt[3]{1-2x}+e^{4x}\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)'$, где

$$\left(e^{4x}\right)'=\left(e^{u}\Big|_{u=4x}\right)'=\left(e^{u}\right)_u'u'_x=e^{u}u'_x=e^{4x}(4x)'=\left[(4x)'=4(x)'=4\right]=4e^{4x}\;\mathbf{;}$$

$$\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)'=\left((1-2x)^{1/3}\right)'=(u^{1/3}\Big|_{u=1-2x})'=(u^{1/3})'_u\cdot u'_x=\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}u'_x=$$

$$=\frac{1}{3}(1-2x)^{-2/3}(1-2x)'=\left[(1-2x)'=(1)'-(2x)'=0-2(x)'=-2\right]=\frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$$

Тогда $y'=4e^{4x}\sqrt[3]{1-2x}+e^{4x}\cdot\left(-\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\right)=\frac{2e^{4x}(5-12x)}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ **.**

г) $y'=\left(\frac{x\sin^2 3x}{\ln(5x+2)}\right)'=\frac{(x\sin^2 3x)'\cdot\ln(5x+2)-x\sin^2 3x\cdot(\ln(5x+2))'}{\ln^2(5x+2)}$**,** где

$$(x\sin^2 3x)'=(x)'\sin^2 3x+x(\sin^2 3x)'=$$

$$\left[\begin{array}{c}(x)'=1\\ (\sin^2 3x)'=\left((\sin 3x)^2\right)'=(u^2\Big|_{u=\sin 3x})'=(u^2)'_u u'_x=2uu'_x=2\sin 3x(\sin 3x)'\\ (\sin 3x)'=\left(\sin u\big|_{u=3x}\right)'=(\sin u)'_u u'_x=\cos u\,u'_x=\cos 3x(3x)'\\ (3x)'=3(x)'=3\cdot 1=3\end{array}\right]$$

$$=1\cdot\sin^2 3x+x\cdot 2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3=\sin^2 3x+3x\sin 6x\;\mathbf{.}$$

$$(\ln(5x+2))'=\left(\ln u\big|_{u=5x+2}\right)'=(\ln u)'_u u'_x=\frac{1}{u}u'_x=\frac{1}{5x+2}(5x+2)'=$$

$$=\left[(5x+2)'=(5x)'+(2)'=5(x)'+0=5\cdot 1=5\right]=\frac{5}{5x+2}\;.$$

Тогда $y'=\frac{(\sin^2 3x+3x\sin 6x)\ln(5x+2)-x\sin^2 3x\cdot\left(\frac{5}{5x+2}\right)}{\ln^2(5x+2)}=$

$$=\frac{(5x+2)(\sin^2 3x+3x\sin 6x)\ln(5x+2)-5x\sin^2 3x}{(5x+2)\ln^2(5x+2)}.$$

131-140. Найти производную функции**,** заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=2^t+1 \\ y=\sqrt{1-2^t} \end{cases}$$

Производную $y'=y'(x)$ *функции* $y=y(x)$ *заданной параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ *находят в параметрическом виде по формуле* $y'_x(t)=\dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$.

Решение.

Производную функции $y=f(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=2^t+1 \\ y=\sqrt{1-2^t} \end{cases}$ находим по формуле $y'_x(t)=\dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$, где

$$y'_t(t)=\left(\sqrt{1-2^t}\right)'=\left((1-2^t)^{1/2}\right)'=\left(u^{1/2}\Big|_{u=1-2^t}\right)'=(u^{1/2})'_u\cdot u'_t=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}u'_t=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'_t=\frac{1}{2\sqrt{1-2^t}}(1-2^t)'=\left[(1-2^t)'=(1)'-(2^t)'=-2^t\ln 2\right]=\frac{-2^t\ln 2}{2\sqrt{1-2^t}};$$

$$x'_t(t)=(2^t+1)'=(2^t)'+(1)'=2^t\ln 2+0=2^t\ln 2.$$

Тогда $$y'_x(t)=\frac{\left(\dfrac{-2^t\ln 2}{2\sqrt{1-2^t}}\right)}{2^t\ln 2}=-\frac{2^t\ln 2}{2\sqrt{1-2^t}\cdot 2^t\ln 2}=-\frac{1}{2\sqrt{1-2^t}}.$$

141-150. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}$**;** **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}$**.**

Вычисление предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, *где* $a=x_0,\infty$, *всегда начинают с подстановки в* $\varphi(x)$ *предельного значения её аргумента* $x=a$. *Если в результате получают неопределённость* $\dfrac{0}{0}$ *или* $\dfrac{\infty}{\infty}$, *то для её раскрытия применяют*

правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *где* $f(x)$ *и* $g(x)$ *- функции, дифференцируемые в окрестности* $a=x_0,\infty$. *В некоторых случаях может потребоваться неоднократное применение данного правила. На каждом этапе его применения следует использовать, упрощающие отношение, тождественные преобразования, а также комбинировать это правило с любыми другими известными приёмами вычисления пределов. Раскрытие неопределённостей вида:* $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 *путём преобразований:* $f\cdot g=\dfrac{f}{1/g}$, $f-g=\dfrac{(1/g)-(1/f)}{(1/f)\cdot(1/g)}$, $f^g=e^{g\ln f}=e^{\frac{\ln f}{1/g}}$ *сводят к раскрытию неопределенностей вида* $0/0$ *или* ∞/∞.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x^2-2x-8)'}{(2x^2+3x-14)'}$, где

$(3x^2-2x-8)'=(3x^2)'-(2x)'-(8)'=3(x^2)'-2(x)'-0=3\cdot 2x-2\cdot 1=6x-2$,

$(2x^2+3x-14)'=(2x^2)'+(3x)'-(14)'=2(x^2)'+3(x)'-0=2\cdot 2x+3\cdot 1=4x+3$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-2}{4x+3}=\dfrac{6\cdot 2-2}{4\cdot 2+3}=\dfrac{10}{11}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{-5x}-1+5x)'}{(\sin(x^2))'}$, где

$(e^{-5x}-1+5x)'=(e^{-5x})'-(1)'+(5x)'=$

$$\begin{bmatrix} (e^{-5x})'=(e^u\big|_{u=-5x})'=(e^u)'_u u'_x=e^u u'_x=e^{-5x}(-5x)'=-5e^{-5x} \\ (1)'=0 \\ (5x)'=5(x)'=5\cdot 1=5 \end{bmatrix}=$$

$=-5e^{-5x}+5$,

$(\sin(x^2))'=\left(\sin u\big|_{u=x^2}\right)'=(\sin u)'_u\,u'_x=\cos u\cdot u'_x=\cos(x^2)(x^2)'=$

$=2x\cos(x^2)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Применяем правило Лопиталя ещё раз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-5e^{-5x}+5)'}{(2x\cos(x^2))'}$, где

$$(-5e^{-5x}+5)'=(-5e^{-5x})'+(5)'=-5(e^{-5x})'+0=-5\cdot(-5e^{-5x})=25e^{-5x},$$

$$(2x\cos(x^2))'=2[(x)'\cos(x^2)+x(\cos(x^2))']=$$

$$\left[\begin{array}{c}(x)'=1\\ (\cos(x^2))'=\left(\cos u\Big|_{u=x^2}\right)'=(\cos u)'_u\,u'_x=-\sin u\,u'_x=-\sin(x^2)(x^2)'=-2x\sin(x^2)\end{array}\right]$$

$$=2[1\cdot\cos(x^2)+x(-2x\sin(x^2))]=2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5e^{-5x}+5}{2x\cos(x^2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25e^{-5x}}{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)}=\dfrac{25}{2-0}=\dfrac{25}{2}$.

Ответ: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2+3x-14}=\dfrac{10}{11}$ **; б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{\sin(x^2)}=\dfrac{25}{2}$ **.**

151-160. Требуется:

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$: $y=x^3-6x^2+1$, $a=1, b=5$.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ непрерывной и кусочно-дифференцируемой (дифференцируемой, за исключением, быть может, конечного числа точек) на отрезке $[a,b]$ достигается или в точках $x_i\in(a,b)$, в которых $f'(x_i)=0$ или $f'(x_i)$ не существует, или на концах отрезка.

Решение.

1) Находим первую производную функции:

$$y'=(x^3-9x^2+3)'=(x^3)'-(9x^2)'+(3)'=3x^2-18x$$

и определяем внутренние критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки $x_i\in(1,7)$ в которых $f'(x_i)=0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$y' = 3x^2 - 18x = 3x(x = 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1, 7) \\ x = 6 \in (1, 7) \end{cases}$, точек $x_i \in (1, 7)$ в которых y' не существует нет. Таким образом, единственной внутренней критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ на отрезке $[1, 7]$ является точка $x_1 = 6$.

2) Вычисляем значения функции $y = f(x)$ во внутренних критических точках и на концах отрезка $[1, 7]$: $f(6) = 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 3 = -105$, $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 3 = -5$, $f(7) = 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 3 = -95$.

3) Сравниваем значения $f(1)$, $f(6)$, $f(7)$ и находим наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[1, 7]$:

$m = y_{наим} = \min\limits_{[1,7]} f(x) = f(6) = -105$, $M = y_{наиб} = \max\limits_{[1,7]} f(x) = f(1) = -5$.

Ответ: $m = f(6) = -105$, $M = f(1) = -5$.

б) Провести полное исследование непериодической функции $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 + 2x}$ и построить её график.

Для построения графика функции $y = f(x)$ нужно:

***1)** найти область определения функции;*
***2)** найти область непрерывности функции и точки разрыва;*
***3)** исследовать функцию на чётность, нечётность и периодичность;*
***4)** найти точки пересечения графика с осями координат;*
***5)** найти асимптоты графика функции;*
***6)** найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;*
***7)** найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.*

Решение.

1) Находим область определения функции: $D(y) = \{x \in R \mid x^2 + 2x \neq 0\}$ $= (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Поскольку данная функция является элементарной, то областью её непрерывности является область определения $D(y)$, а точками разрыва являются точки $x = -2$ и $x = 0$, не принадлежащие множеству $D(y)$, но являющиеся предельными точками этого множества (точками в любой окрестности которых содержатся точки данного множества). Исследуем характер разрыва в точках $x = -2$ и $x = 0$, вычислив в них односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(-0)}=+\infty,\quad \lim_{x\to -2+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(+0)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точках $x=-2$ и $x=0$ - бесконечные, то данные точки являются точками бесконечного разрыва.

3) Функция не является периодической.

> *Функция $y=f(x)$, в аналитическое выражение которой входит хотя бы одна непериодическая функция периодической не является.*

Проверяем является ли функция чётной или нечётной. Так как область определения функции $D(y)$ $=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то данная функция – общего вида.

4) Находим точки пересечения графика с осями координат.

Так как $x=0\notin D(y)$, то точек пересечения графика с осью Oy нет.

Положим $y=0$ и решим уравнение $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=0$. Его решением является $x=-1$. Следовательно, точка $(-1,\,0)$ - точка пересечения графика с осью Ox.

5) Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

> *Прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y=f(x)$.*

Так как точки $x=-2$ и $x=0$ - точки бесконечного разрыва данной функции, то вертикальными асимптотами графика функции являются прямые $x=-2$ и $x=0$.

> *Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ тогда и только тогда, когда одновременно существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$.*

Вычисляем сначала пределы при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_1,\quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_1.$$

В дальнейшем будем иметь в виду следующий часто встречающийся предел: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \infty & \text{если} \quad n > m \\ a_0/b_0 & \text{если} \quad n = m \\ 0 & \text{если} \quad n < m \end{cases}$

Следовательно $y = k_1x + b_1 = 0 \cdot x + 1$, т.е. $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \to -\infty$.

Аналогично вычисляем пределы при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x} = 0 = k_2, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = 1 = b_2$$

Следовательно $y = k_2x + b_2 = 0 \cdot x + 1$, т.е. $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

6) Определяем интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Для этого находим первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}\right)' = = \frac{\left((x+1)^2\right)' \cdot (x^2+2x) - (x+1)^2(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2} =$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2+2x) - (x+1)^2(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = -\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

и определяем критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f'(x_i) = 0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$$y' = -\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} = 0 \Rightarrow \; x+1 = 0 \Rightarrow \; x = -1 \in D(y);$$

y' не существует при $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$ и $x = -2 \notin D(y)$.

Таким образом, единственной критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ является точка $x_1 = -1$.

Исследуем знак производной $y' = f'(x)$ в интервалах, на которые критические точки функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Результаты исследования представим следующей таблицей:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
y'	+	+	0	–	–
y	возрастает	возрастает	0	убывает	убывает

Так как при переходе слева направо через точку $x=-1$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на « $-$ », то точка $x=-1$ является точкой локального максимума и $y_{\max}=y(-1)=0$.

7) Определяем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого находим вторую производную функции:

$$y''=(y')'=\left(-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}\right)'=-2\left(\frac{(x+1)'(x^2+2x)^2-(x+1)((x^2+2x)^2)'}{(x^2+2x)^4}\right)=$$

$$=-2\left(\frac{1\cdot(x^2+2x)^2-(x+1)\cdot 2\cdot(x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4}\right)=\frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}$$

и определяем точки возможного перегиба $y=f(x)$, т.е. точки $x_i\in D(y)$ в которых $f''(x_i)=0$ или $f''(x_i)$ не существует: $y''=\dfrac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}\neq 0$, так как $3x^2+6x+4\neq 0$ (квадратное уравнение не имеет действительных корней); y'' не существует при $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0\notin D(y)$ и $x=-2\notin D(y)$.

Таким образом, функция $y=f(x)$ не имеет точек возможного перегиба.

Исследуем знак второй производной $y''=f''(x)$ в интервалах, на которые точки возможного перегиба функции $y=f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Результаты исследования представим таблицей:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
y''	$+$	$-$	$+$
y	график вогнутый	график выпуклый	график вогнутый

Точек перегиба нет.

8) На основании полученных результатов строим график функции (рис.6)

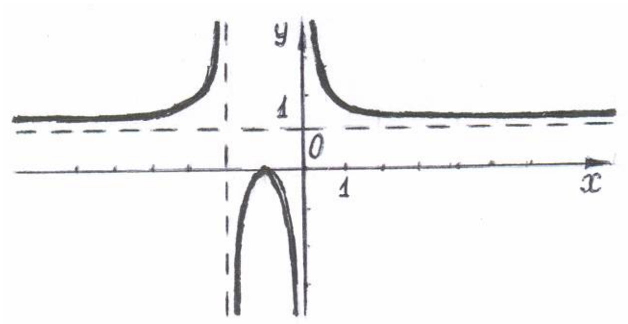


Рис.6.

161-170. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x} - 1}$, $x_0 = 4$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *имеет вид:* $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ *Уравнение нормали к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *имеет вид:* $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Решение.

1) Вычисляем значение функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 4$: $f(4) = \dfrac{4^2}{\sqrt{4} - 1} = 16$.

2) Находим первую производную функции: $y' = \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x} - 1}\right)' =$

$$= \frac{(x^2)'(\sqrt{x} - 1) - x^2(\sqrt{x} - 1)'}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{2x(\sqrt{x} - 1) - x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{3x\sqrt{x} - 4x}{2(\sqrt{x} - 1)^2}$$ и вычисляем её значение в точке $x_0 = 4$: $f'(4) = \dfrac{3 \cdot 4\sqrt{4} - 4 \cdot 4}{2(\sqrt{4} - 1)^2} = 4$.

3) Составляем уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $\Rightarrow$ $y - 16 = 4(x - 4)$ и записываем его в виде $y = kx + b$: $y = 4x$.

4) Составляем уравнение нормали: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ $\Rightarrow$

$y - 16 = -\dfrac{1}{4}(x - 4)$ и записываем его в виде $y = kx + b$: $y = -\dfrac{1}{4}x + 17$.

Если $f'(x_0) = 0$, *то уравнение нормали записывается в виде:* $x = x_0$.

Ответ: $y = 4x$ - уравнение касательной; $y = -\dfrac{1}{4}x + 17$ - уравнение нормали.

171–180. Затраты, необходимые для производства x единиц данной продукции задаётся функцией издержек $C(x) = 80x + 2x^2$. Продукция реализуется по фиксированной цене $p = 100$ (ден.ед.) за единицу продукции. Требуется найти: **а)** оптимальное значение x_0 выпуска продукции, при котором производитель получит максимальную прибыль; **б)** средние значения издержек производства и прибыли при $x = x_0$; **в)** эластичность издержек производства и прибыли при $x = x_0$. Сделать выводы.

Прибыль, получаемая производителем при выпуске x единиц данной продукции, задаётся функцией $P(x) = U(x) - C(x)$, где $U(x) = p\,x$ - выручка от реализации x единиц данной продукции по фиксированной цене p (ден.ед.) за единицу продукции, $C(x)$ **-** функция издержек.

Средними издержками называют величину $AC(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ (издержки в расчёте на 1 ед. выпускаемой продукции), а средней прибылью – величину $AP(x) = \dfrac{P(x)}{x}$ (прибыль в расчёте на 1 ед. выпускаемой продукции).

Эластичностью издержек называют величину $E_x(C) = \dfrac{x \cdot C'(x)}{C(x)}$ (показывает приближённый процентный прирост издержек C при изменении x на 1%), а эластичностью прибыли – $E_x(P) = \dfrac{x \cdot P'(x)}{P(x)}$ (показывает приближённый процентный прирост прибыли P при изменении x на 1%).

Решение.

а1) Находим функцию прибыли

$$P(x) = U(x) - C(x) = 100x - 80x - 2x^2 = 20x - 2x^2.$$

а2) Находим оптимальное значение x_0 выпуска продукции, при котором производитель получит максимальную прибыль, т.е. находим при каком значении $x = x_0$ выпуска продукции функция прибыли $P(x)$ примет наибольшее значение на промежутке $[0, +\infty)$.

Если функция одной переменной $y = f(x)$ на промежутке X имеет единственную точку локального экстремума x_0, являющуюся точкой локального максимума, то в точке x_0 функция принимает своё наибольшее значение на промежутке X.

Для решения данной задачи находим производную функции $P(x)$:

$$P' = (20x - 2x^2)' = (20x)' - (2x^2)' = 20 - 4x$$

и определяем её критические точки (точки возможного локального экстремума), принадлежащие промежутку $(0, +\infty)$, т.е. точки в которых $P'(x_i) = 0$ или $P'(x_i)$ не существует: $P' = 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5 \in (0, +\infty)$, точек $x_i \in (0, +\infty)$ в которых P' не существует нет. Таким образом, единственной критической точкой функции $P(x)$ на промежутке $(0, +\infty)$ является точка $x = x_0 = 5$.

Так как $P'(x) > 0$ при $0 < x < 5$ и $P'(x) < 0$ при $5 < x < +\infty$, то точка $x_0 = 5$ - является точкой локального максимума и, следовательно, точкой в которой функция $P(x)$ на промежутке $[0, +\infty)$ принимает наибольшее значение $P_{наиб} = P(5) = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 50$.

Итак, оптимальное значение объёма выпускаемой продукции составляет 5 единиц, при этом максимальная прибыль составляет 50 ден.ед.

б) Находим средние издержки производства и среднюю прибыль при $x_0 = 5$:

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{80x + 2x^2}{x} = 80 + 2x \quad \Rightarrow \quad AC(5) = 80 + 2 \cdot 5 = 90;$$

$$AP(x) = \frac{P(x)}{x} = \frac{20x - 2x^2}{x} = 20 - 2x \quad \Rightarrow \quad AP(5) = 20 - 2 \cdot 5 = 10.$$

Итак, в расчёте на единицу выпускаемой продукции издержки производства составляют 90 ден.ед., а прибыль – 10 ден.ед.

в) Находим эластичность издержек производства и прибыли при $x_0 = 5$:

$$E_x(C) = \frac{x \cdot (80x + 2x^2)'}{80x + 2x^2} = \frac{x \cdot (80 + 4x)}{80x + 2x^2} = \frac{40 + 2x}{40 + x} \Rightarrow E_5(C) = \frac{50}{45} = 1.11.$$

$$E_x(P) = \frac{x \cdot (20x - 2x^2)'}{20x - 2x^2} = \frac{x \cdot (20 - 4x)}{20x - 2x^2} = \frac{10 - 2x}{10 - x} \Rightarrow E_5(P) = 0.$$

Итак, при увеличении объёма $x_0 = 5$ выпуска продукции на 1%, издержки производства увеличатся на 1.11%, а прибыль не изменится.

Ответ: а) $x_0 = 5$, $P_{наиб} = P(5) = 50$; **б)** $AC(5) = 90$, $AP(5) = 10$;

в) $E_5(C) = 1.11$, $E_5(P) = 0$.

181 – 190. Для указанной функции $z = f(x, y)$ требуется: **а)** найти дифференциал dz и вторую частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; **б)** вычислить приближённо (с помощью первого дифференциала) значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$, если $z = arctg(x/y)$, $x = 0.03$, $y = 0.98$.

Первый дифференциал функции $z = f(x, y)$ имеет вид $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

Частные производные функции $z = f(x, y)$ вычисляются по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной, в предположении, что если производная берётся по аргументу x (аргументу y), то другой аргумент y (аргумент x) считается постоянным.

Решение.

а1) Находим частные производные первого порядка z'_x и z'_y функции

$$z = arctg\left(\frac{x}{y}\right): \; z'_x = \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x = \left(arctgu\bigg|_{u=\frac{x}{y}}\right)'_x = (arctgu)'_u \cdot u'_x =$$

$$= \frac{1}{1+u^2} u'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \left[\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y} \cdot (x)'_x = \frac{1}{y}\right] = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$z'_y = \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y = \left(arctgu\bigg|_{u=\frac{x}{y}}\right)'_y = (arctgu)'_u \cdot u'_y = \frac{1}{1+u^2} u'_y =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \left[\left(\frac{x}{y}\right)'_y = x\left(\frac{1}{y}\right)'_y = x\left(-\frac{(y)'_y}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2} \right] = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Тогда первый дифференциал dz функции имеет вид:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{y}{x^2+y^2} dx + \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

а2) Вторую частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (или кратко z''_{xy}) находим как первую частную производную по аргументу y от функции $z'_x = f'_x(x,y)$ **:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{(y)'_y \cdot (x^2+y^2) - y \cdot (x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} (y)'_y = 1 \\ (x^2+y^2)'_y = (x^2)'_y + (y^2)'_y = 0 + 2y = 2y \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Формула для приближённого вычисления значений функции $z = f(x,y)$ в малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, в которой функция дифференцируема, имеет вид: $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Формула тем точнее, чем меньше значение $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

б) Вычисляем значения частных производных $z'_x = f'_x(x,y)$, $z'_y = f'_y(x,y)$ и значение функции $z = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = x - \Delta x = 0.03 - 0.03 = 0$, $y_0 = y - \Delta y = 0.98 - (-0.02) = 1$:

$$f(0,1) = 0, \ f'_x(0,1) = \frac{1}{0^2+1^2} = 1, \ f'_y(0,1) = -\frac{0}{0^2+1^2} = 0.$$

Тогда, учитывая, что $\Delta x = 0.03$, $\Delta y = -0.02$, получим:

$$f(0.03, 0.98) \approx 0 + 1 \cdot 0.03 + 0 \cdot (-0.02) = 0.03.$$

Ответ: а) $dz = \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ **; б)** $f(0.03, 0.98) \approx 0.03$.

191 – 200. Найти локальные экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ $(x > 0, y > 0)$.

Для нахождения локальных экстремумов дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ необходимо: **1)** Найти область определения $D(z)$ функции. **2)** Найти первые частные производные z'_x и z'_y функции. **3)** Решить систему уравнений (необходимое условие экстремума) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найти точки $M_i(x_i, y_i) \in D(z)$ (с учётом возможных дополнительных ограничений на значения аргументов x и y) возможного локального экстремума функции. **4)** Найти вторые частные производные $A(x, y) = z''_{xx}$, $B(x, y) = z''_{xy}$, $C(x, y) = z''_{yy}$; составить выражение $D(x, y) = A \cdot C - B^2$ и вычислить значения $D\big|_{M_i}$ и $A\big|_{M_i}$ в каждой точке M_i возможного экстремума. **5)** Сделать вывод о наличии экстремумов функции $z = f(x, y)$, используя достаточное условие экстремума: если $D\big|_{M_i} < 0$, то в точке M_i экстремума нет; если $D\big|_{M_i} > 0$ и $A\big|_{M_i} > 0$, то в точке M_i - локальный минимум; если $D\big|_{M_i} > 0$ и $A\big|_{M_i} < 0$, то в точке M_i - локальный максимум; если $D\big|_{M_i} = 0$, то требуется дополнительное исследование точки M_i (например, по определению). **6)** Найти локальные экстремумы (экстремальные значения) функции.

Решение.

1) Находим область определения функции $D(z) = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \right\}$.

2) Находим первые частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_x = (x^3)'_x + (3xy^2)'_x - (15x)'_x - (12y)'_x =$$
$$= (x^3)'_x + 3y^2(x)'_x - 15(x)'_x - 0 = 3x^2 + 3y^2 \cdot 1 - 15 \cdot 1 = 3x^2 + 3y^2 - 15;$$
$$z'_y = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_y = (x^3)'_y + (3xy^2)'_y - (15x)'_y - (12y)'_y =$$

$$= 0 + 3x(y^2)'_y - 0 - 12(y)'_y = 3x \cdot 2y - 12 \cdot 1 = 6xy - 12 .$$

3) Составим систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15 \\ xy = 2 \end{cases}$ и решим её. Получим четыре решения: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$. Из них точками возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $D(z)$ являются только две точки: $M_1(1, 2)$ и $M_2(2, 1)$.

4) Находим вторые частные производные:

$$A(x, y) = z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_x = (3x^2)'_x + (3y^2)'_x - (15)'_x =$$
$$= 3(x^2)'_x + 0 - 0 = 3 \cdot 2x = 6x ;$$

$$B(x, y) = z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_y = (3x^2)'_y + (3y^2)'_y - (15)'_y =$$
$$= 0 + 3(y^2)'_y - 0 = 3 \cdot 2y = 6y ;$$

$$C(x, y) = z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6xy - 12)'_y = (6xy)'_y - (12)'_y = 6x(y)'_y - 0 = 6x ,$$

составляем выражение $D(x, y) = AC - B^2 = 6x \cdot 6x - (6y)^2 = 36x^2 - 36y^2$ и вычисляем:

$D\Big|_{M_1(1,\, 2)} = 36 \cdot 1^2 - 36 \cdot 2^2 = -108 < 0$; $D\Big|_{M_2(2,\, 1)} = 36 \cdot 2^2 - 36 \cdot 1^2 = 108 > 0$,

$A\Big|_{M_2(2,\, 1)} = 6 \cdot 2 = 12 > 0$.

5) Делаем вывод о наличии экстремумов. Так как:

$D\Big|_{M_1} = -108 < 0$, то в точке $M_1(1, 2)$ экстремума нет;

$D\Big|_{M_2} = 108 > 0$, $A\Big|_{M_2} = 12 > 0$, то в точке $M_2(2, 1)$ - локальный минимум.

6) Находим локальный минимум

$$z_{\min} = f(2, 1) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28 .$$

Ответ: $z_{\min} = f(2, 1) = -28$ **.**

6.2. Краткие теоретические сведения.

Тема. <u>Определители.</u>

Квадратной матрицей порядка n называется квадратная таблица из чисел a_{ij} $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, состоящая из n строк и n столбцов. У квадратной матрицы различают главную диагональ: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ и побочную диагональ: $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$. Любой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, составленных определённым образом из элементов a_{ij} матрицы A, называемое определителем матрицы. Кратко обозначается $|A|$, Δ.

Определителем 1-ого порядка называется число $|A|=|a_{11}|=a_{11}$.

Определителем 2-ого порядка называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Определителем 3-его порядка называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Минором элемента a_{ij} называется определитель M_{ij}, полученный из определителя $|A|$ вычёркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} ***элемента*** a_{ij} называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \textit{если } (i+j) - \textit{чётное число} \\ -M_{ij} & \textit{если } (i+j) - \textit{нечётное число} \end{cases}.$$

Определителем порядка n называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

Разложением определителя $|A|$ ***по*** i ***-ой строке*** $(i = \overline{1,n})$ называется соотношение: $$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Разложением определителя $|A|$ ***по*** j ***-ому столбцу*** $(j = \overline{1,n})$ называется соотношение: $$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Определители обладают следующими ***свойствами*****:**

1) определитель не изменится при замене всех его строк столбцами с теми же номерами;

2) определитель изменит знак на противоположный, если переставить местами любые две строки (два столбца) определителя;

3) общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

4) определитель равен нулю, если он содержит нулевую строку (столбец), две одинаковые или пропорциональные строки (столбца);

5) определитель не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число;

6) определитель треугольного вида (когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей равны нулю) равен произведению диагональных элементов: $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Тема. <u>Матрицы.</u>

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$): $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, состоящая из m строк и n столбцов. Если необходимо указать размеры матрицы, то пишут $A_{m \times n}$.

Если $m = n$, то матрица A называется ***квадратной***.

Нулевой называется матрица O, все элементы которой равны нулю, например: $O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ***Единичной*** называется квадратная матрица E, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, например: $E_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ***Треугольной*** называется квадратная матрица A, все элементы которой расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю, например: $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$. ***Трапециевидной (ступенчатой)*** называется матрица $A_{m\times n}$ $(m < n)$, все элементы которой, расположенные ниже элементов $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ равны нулю, например: $A_{3\times4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Матрицы A и B называются ***равными*** и пишут $A = B$, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Матрицы можно транспонировать, складывать, вычитать, умножать на число, умножать на другую матрицу.

Транспонированной к матрице $A_{m\times n}$ называется матрица $A^T_{n\times m}$, столбцами которой являются соответствующие строки матрицы $A_{m\times n}$.

Суммой (разностью) матриц A и B одного размера $m \times n$, называется матрица $C = A \pm B$ того же размера, для которой:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ ***на число*** α называется матрица $B = \alpha A$ того же размера, для которой: $b_{ij} = \alpha a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}$.

Линейной комбинацией матриц A и B одного размера $m \times n$, называется матрица $C = \alpha A + \beta B$ того же размера (α и β - произвольные числа), для которой: $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$,

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ ***на матрицу*** $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times k}$, каждый элемент которой c_{ij} вычисляется по правилу:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\ ,\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,k}.$$

Операция умножения матрицы на матрицу определена не для всех матриц, а только для таких у которых число столбцов левой матрицы A равно числу строк правой матрицы B. Такие матрицы называются согласованными для умножения. Поэтому прежде чем выполнять операцию умножения матрицы на матрицу следует проверить их согласованность для умножения и определить размерность матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$. Особенность операции умножения матриц состоит в том, что в общем случае: $A \cdot B \neq B \cdot A$, т.е. переместительное свойство места не имеет.

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

4) вычёркивание нулевой строки (столбца).

Матрицы A и B, полученные одна из другой в результате элементарных преобразований называются ***эквивалентными*** и пишут $A \Leftrightarrow B$.

Обратной к квадратной матрице A порядка n, называется матрица A^{-1} того же порядка, если: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица порядка n.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если её определитель $|A| \neq 0$. Обратная матрица всегда существует для невырожденных матриц.

Основными методами вычисления обратной матрицы являются:

Метод присоединённой матрицы. Если A -невырожденная матрица, то $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\hat{A}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^T$, где $\hat{A}$ - присоединённая матрица, для которой: $\hat{a}_{ij}=A_{ji}\quad i,j=\overline{1,n}$. Здесь A_{ji} - алгебраические дополнения элементов a_{ji} матрицы A.

В частности, если $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, то $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^T$

Метод элементарных преобразований. Для данной квадратной матрицы A порядка n строится прямоугольная матрица $(A\,|\,E)$ размера $n\times 2n$ приписыванием к A справа единичной матрицы. Далее, с помощью элементарных преобразований над строками, матрица $(A\,|\,E)$ приводится к виду $(E\,|\,A^{-1})$, что всегда возможно, если A - невырожденная.

Матричными называются уравнения вида: $AX=C$, $XA=C$, $AXB=C$, где матрицы A, B, C - известны, матрица X - неизвестна. Если квадратные матрицы A и B - невырожденные, то решения матричных уравнений записываются, соответственно, в виде: $X=A^{-1}C$, $X=CA^{-1}$, $X=A^{-1}CB^{-1}$.

Минором k-ого порядка матрицы A размера $m\times n$ называется определитель M_k квадратной матрицы порядка k, образованной элементами матрицы A, стоящими на пересечении произвольно выбранных её k строк и k столбцов $(k\le\min(m,n))$.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A, называется её ***рангом*** и обозначается $rangA$ или $r(A)$, а любой минор порядка r, отличный от нуля – ***базисным минором***.

Тема. <u>Системы линейных уравнений. Модель Леонтьева.</u>

…Система уравнений вида: $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$ называется ***системой m линейных уравнений с n неизвестными***. Числа a_{ij} называются коэффициентами системы, b_i - свободными членами системы, x_j - неизвестными системы.

В матричной форме система имеет вид: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Здесь A -матрица системы, X -матрица-столбец неизвестных, B -матрица-столбец свободных членов.

Если $B = O$, то система называется ***однородной,*** в противном случае ***неоднородной.***

Система, матрица A которой является треугольной с диагональными элементами $a_{ii} \neq 0$, называется ***треугольной.*** Система, матрица A которой является трапециевидной, называется ***трапециевидной.***

Решением системы называется всякий упорядоченный набор чисел $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, обращающий каждое уравнение системы в равенство. Совокупность всех решений называется ***множеством решений системы***.

Система называется ***совместной***, если она имеет, по крайней мере, одно решение; ***определённой***, если она имеет только одно решение; ***неопределённой***, если она имеет бесконечно много решений; ***несовместной,*** если она не имеет решений.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Треугольная система является определённой, трапециевидная система – неопределённой.

Две системы называются ***эквивалентными***, если множества их решений совпадают.

Элементарными преобразованиями систем уравнений называются:

1) перестановка уравнений;

2) перестановка местами слагаемых $a_{ij} \cdot x_j$ в каждом из уравнений системы;

3) умножение уравнения на число, отличное от нуля;

4) прибавление к уравнению другого, умноженного на любое число;

5) вычёркивание уравнения вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Основными точными методами решения систем линейных уравнений являются методы: Крамера, обратной матрицы и Гаусса.

Если число уравнений в системе m совпадает с числом неизвестных n и определитель матрицы системы $\Delta = |A| \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти:

а) ***методом Крамера*** по формулам: $x_j = \Delta_j / \Delta,\ j = \overline{1,n}$, где Δ_j - определитель, получаемый из определителя матрицы системы Δ заменой j-ого столбца на столбец свободных членов;

б) ***методом обратной матрицы*** по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Методом Гаусса находят решение произвольной системы линейных уравнений. Метод состоит в приведении системы уравнений, с помощью элементарных преобразований, к системе специального вида, эквивалентной исходной, решение которой очевидно. Преобразования по методу Гаусса выполняют в два этапа. Первый этап называют прямым ходом, второй - обратным.

В результате **прямого хода** выясняют: совместна или нет система и если совместна то, сколько имеет решений - одно или бесконечно много, а также, в случае бесконечного множества решений, указывают базисные и свободные неизвестные для записи общего решения системы. Преобразования прямого хода выполняют, как правило, над расширенной матрицей системы $\widetilde{A} = (A \mid B)$, которую получают, приписывая справа к матрице системы A столбец свободных членов B. В результате элементарных преобразований строк и перестановкой столбцов, матрица системы A должна быть приведена к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$. При этом, система уравнений, матрица которой A', является треугольной с диагональными элементами $a'_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,...,n)$, будет иметь единственное решение; система уравнений, матрица которой A', является трапециевидной с элементами $a'_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,...,k, \quad где\ k < n)$, будет иметь бесконечно много решений. Если, при выполнении преобразований расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появится строка $\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & \mid b'\end{pmatrix}$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений. Базисные неизвестные указывают, выписывая базисный минор преобразованной матрицы системы A'. Базисными являются неизвестные преобразованной системы, столбцы коэффициентов a'_{ij} при которых образуют базисный минор (определитель максимального порядка, отличный от нуля). Свободными являются неизвестные, не являющиеся базисными.

В результате **обратного хода** находят решение системы, записывая его в виде общего решения, если их бесконечно много. Преобразования обратного хода часто выполняют, над уравнениями системы, соответствующей последней расширенной матрице $\widetilde{A}'$ прямого хода. В случае единственного решения, его получают, находя последовательно значения всех неизвестных из уравнений системы, начиная с последнего. В случае, когда решений бесконечно много, их записывают в виде общего решения. Для этого свободным неизвестным придают разные произвольные постоянные значения: C_1, C_2,…, C_{n-k}, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находят значения всех базисных неизвестных. Полученное решение называют общим. Придавая произвольным постоянным, конкретные значения, находят частные решения системы уравнений.

Уравнениями межотраслевого баланса, описывающими процесс производства и потребления продукции n-отраслевой экономикой, называют уравнения $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$, где x_i - объём выпуска валовой продукции i-ой отраслью, x_{ij} - объём продукции i-ой отрасли, потребляемый j-ой отраслью для производства своей продукции, y_i - объём выпуска конечной продукции i-ой отраслью, предназначенной для реализации в непроизводственной сфере.

Если предположить, что $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ (гипотеза линейности), где a_{ij} - постоянные числа, характеризующие технологию производства (показывают затраты продукции i-ой отрасли на производство 1 единицы продукции j-ой отрасли) и называемые ***коэффициентами прямых затрат,*** то уравнения межотраслевого баланса запишутся в виде: $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$.

Их называют уравнениями линейного межотраслевого баланса или ***линейной моделью Леонтьева многоотраслевой экономики*** и записывают, как правило, в матричном виде: $(E - A) \cdot X = Y$, где E - единичная матрица; $A = (a_{ij})$ - матрица коэффициентов прямых затрат; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - векторы (матрицы-столбцы) валового и конечного продукта, соответственно.

Основная задача линейного межотраслевого баланса состоит в отыскании вектора $X \ge 0$, который при известной матрице прямых затрат $A \ge 0$ обеспечивает заданный вектор конечного продукта $Y \ge 0$. Вектор X находится по формуле $X = (E - A)^{-1} \cdot Y = S \cdot Y$, где $S = (s_{ij})$ - матрица ***коэффициентов полных затрат***, элемент s_{ij} которой показывает величину валового выпуска продукции i-ой отрасли, необходимой для обеспечения выпуска 1 единицы конечного продукта j-ой отрасли. Решение такой задачи существует только для продуктивных матриц $A \geq 0$.

Матрица $A \geq 0$ называется ***продуктивной***, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения Леонтьева: $(E - A)^{-1} \cdot X = Y$.

Матрица $A \geq 0$ будет продуктивной, если сумма элементов по каждому её столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1 \right)$, причём хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Чистой продукцией отрасли называется разность между валовой продукцией этой отрасли и затратами продукции всех отраслей на производство данной отрасли. Объёмы z_j выпуска чистой продукции j-ой отрасли вычисляют по формулам: $z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Тема. Системы векторов. N-мерное векторное пространство. Евклидово пространство.

Арифметическим вектором называют упорядоченную совокупность из n чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначают $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа x_i называют ***компонентами*** вектора $\overline{x}$, число компонент называют его ***размерностью***.

Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называют ***равными***, если они одинаковой размерности и их соответствующие компоненты равны: $x_i = y_i, i = \overline{1, n}$.

Суммой векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ одной размерности, называют вектор $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$ той же размерности, для которого: $z_i = x_i + y_i$, $i = \overline{1, n}$.

Произведением вектора $\overline{x}$ ***на число*** α называют вектор $\overline{y} = \alpha \overline{x}$ той же размерности, для которого: $y_i = \alpha x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Линейной комбинацией векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ одной размерности, называют вектор $\overline{z} = \alpha \overline{x} + \beta \overline{y}$ той же размерности (α и β - произвольные числа), для которого: $z_i = \alpha x_i + \beta y_i$, $i = \overline{1, n}$.

Множество всех n-мерных векторов, в котором введены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие определённым требованиям (аксиомам) называют ***векторным пространством*** и обозначают R^n.

Систему векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ называют ***линейно зависимой***, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $\neq 0$ одновременно, такие, что $\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \ldots + \alpha_k \bar{x}_k = \bar{0}$ (где $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ - нулевой вектор), в противном случае, систему называют ***линейно независимой***.

Базисом системы векторов $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ называют упорядоченную систему векторов $B_S = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\bar{b}_i \in S$, $i = \overline{1, m}$; **2)** система B_S линейно независима; **3)** для любого вектора $\bar{x} \in S$ найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ такие, что $\bar{x} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \ldots + \alpha_m \bar{b}_m$. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, однозначно определяемые вектором $\bar{x}$, называют ***координатами вектора*** в базисе B_S, а формулу называют ***разложением вектора*** $\bar{x}$ ***по базису*** B_S и пишут: $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{B_S}$.

В пространстве R^n базисом является каждая упорядоченная система из n линейно независимых векторов: $B_{R^n} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$. Формулу $\bar{x} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{b}_n$ называют ***разложением вектора*** $\bar{x} \in R^n$ ***по базису*** B_{R^n}, коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - ***координатами вектора* в базисе** B_{R^n} и пишут $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{B_{R^n}}$.

Всякая упорядоченная система из n векторов $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$ образует базис R^n, если определитель, столбцами которого являются компоненты векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$, не равен нулю.

Пространство R^n, в котором введено скалярное произведение векторов, удовлетворяющее определённым требованиям (аксиомам), называют евклидовым.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ называют число: $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

Два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называют ***ортогональными***, если $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

Базис $B^{\perp}=(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_n)$ n-мерного евклидова пространства называют ***ортогональным***, если $\overline{b}_i\cdot\overline{b}_j=0$ при $i\neq j$. В разложении вектора $\overline{x}$ по базису $B^{\perp}$: $\overline{x}=\alpha_1\overline{b}_1+\alpha_2\overline{b}_2+\ldots+\alpha_n\overline{b}_n$, числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ называемые ***координатами вектора*** $\overline{x}$ ***в ортогональном базисе*** $B^{\perp}$, определяют по формулам: $\alpha_i=(\overline{x}_i\cdot\overline{b}_i)\big/(\overline{b}_i\cdot\overline{b}_i)$, $(i=\overline{1,n})$.

Тема. Векторная алгебра.

Вектором (***геометрическим***) называется направленный отрезок, задаваемый упорядоченной парой точек (началом и концом вектора). Обозначают вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{a}$. Расстояние между началом и концом вектора называется его ***длиной*** и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $\overline{a}$. ***Углом между векторами*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол $\varphi=(\overline{a},\hat{\ }\overline{b})$, $0\leq\varphi\leq\pi$, на который следует повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением другого вектора, при условии, что их начала совпадают. ***Проекцией вектора*** $\overline{a}$ ***на вектор*** $\overline{b}$ называется число $пр_{\overline{b}}\overline{a}=|\overline{a}|\cdot\cos(\overline{a},\hat{\ }\overline{b})$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются ***компланарными***, если они расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***равными*** и пишут $\overline{a}=\overline{b}$, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***противоположными*** и пишут $\overline{a}=-\overline{b}$, если они коллинеарны, направлены в разные стороны и имеют равные длины.

Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ и конец вектора $\overline{b}$, при условии, что конец вектора $\overline{a}$ совпадает с началом вектора $\overline{b}$ (***правило треугольника***). ***Произведением вектора*** $\overline{a}$ ***на действительное число*** λ называется вектор $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$:

1) коллинеарный вектору $\overline{a}$; **2)** имеющий длину $|\overline{b}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$; **3)** направленный одинаково с вектором $\overline{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно, если $\lambda<0$.

Ортом вектора $\overline{a}$, называется вектор $\overline{a}^0$, имеющий единичную длину и направление вектора $\overline{a}$: $\overline{a}^0 = \overline{a}/|\,\overline{a}\,|$.

Базисом в пространстве R^3 называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов, ***базисом на плоскости*** R^2 – упорядоченная пара неколлинеарных векторов, ***базисом на прямой*** R – любой ненулевой вектор на этой прямой. Базис, в котором все векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину, называется ***ортонормированным***. Векторы ортонормированного базиса обозначаются: $\bar{i}, \bar{j}$ и $\overline{k}$, и называются ***базисными ортами***. Различают правый и левый ортонормированные базисы. Базис $(\bar{i}, \bar{j})$ - называется правым, если кратчайший поворот от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ совершается против хода часовой стрелки, в противном случае он – левый. Базис $(\bar{i}, \bar{j}, \overline{k})$ - называется правым, если из конца вектора $\overline{k}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{i}$ к $\bar{j}$ виден совершающимся против хода часовой стрелки, в противном случае он – левый.

Условием коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является равенство: $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$, где λ - некоторое число. ***Условием компланарности векторов*** $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ является равенство: $\overline{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}$, где α, β - некоторые числа.

Всякий геометрический вектор может быть разложен единственным образом по векторам базиса, коэффициенты разложения называются при этом ***координатами вектора*** в данном базисе. Например, если $B_{R^3} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3)$ - базис R^3 и $\overline{a} \in R^3$, то всегда существует единственное разложение: $\overline{a} = \alpha_1 \overline{b}_1 + \alpha_2 \overline{b}_2 + \alpha_3 \overline{b}_3$, где числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - координаты вектора $\overline{a}$ в базисе B_{R^3}, при этом пишут $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{B_{R^3}}$. Если в R^3 зафиксирован ортонормированный базис $(\bar{i}, \bar{j}, \overline{k})$ и $\overline{a} \in R^3$, то равносильны записи: $\overline{a} = \alpha_1 \bar{i} + \alpha_2 \bar{j} + \alpha_3 \overline{k}$ и $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (*в записи вектора в координатной форме ортонормированный базис не указывают*).

Представление геометрических векторов в координатной форме, позволяет выполнять действия над ними, как над арифметическими векторами:

$$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3);$$

$$\lambda \cdot \overline{a} = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3).$$

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называется совокупность точки O (начало координат) и правого ортонормированного базиса $\langle O,(\bar{i},\bar{j},\bar{k})\rangle$ и обозначается $Oxyz$. Прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются ***координатными осями:*** первая – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются ***координатными плоскостями***. Аналогично вводится система координат на плоскости: $\langle O,(\bar{i},\bar{j})\rangle = Oxy$.

Пусть M - произвольная точка пространства, в котором введена система координат $\langle O,(\bar{i},\bar{j},\bar{k})\rangle = Oxyz$. ***Радиус-вектором точки*** M называется вектор $\overline{OM}$, который всегда единственным образом можно представить в виде: $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x,y,z)$. Числа x,y,z, являющиеся координатами радиус-вектора, совпадают с проекциями вектора $\overline{OM}$ на базисные орты $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (на координатные оси Ox, Oy и Oz). ***Координатами точки*** M в системе координат $Oxyz$ называются координаты её радиус-вектора $\overline{OM}$ и пишут $M(x,y,z)$. В свою очередь, координаты точки $M(x,y,z)$ полностью определяют её радиус-вектор $\overline{OM} = (x,y,z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Всякий геометрический вектор $\bar{a} \in R^3$ в системе координат $Oxyz$, всегда можно представить как радиус-вектор некоторой точки и записать в виде: $\bar{a} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j} + z_a\bar{k} = (x_a, y_a, z_a)$.

Длина $|\bar{a}|$ вектора $\bar{a}$, заданного координатами $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)$, определяется формулой: $|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$. ***Направляющими косинусами вектора*** $\bar{a}$ называются числа: $\cos\alpha = \cos(\bar{a},\hat{O}x) = \dfrac{x_a}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \cos(\bar{a},\hat{O}y) = \dfrac{y_a}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \cos(\bar{a},\hat{O}z) = \dfrac{z_a}{|\bar{a}|}$, при этом $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Координаты вектора $\overline{AB}$, заданного точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяются по формуле: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Расстояние $\rho(A,B)$ между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяется как длина вектора $\overline{AB}$ и находится по формуле:

$$\rho(A,B)=|\overline{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\ .$$

Координаты точки $C(x_C,y_C,z_C)$ делящей отрезок AB пополам находятся по формулам: $x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}$, $y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}$, $z_C=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos(\overline{a},\overline{b})$. Скалярное произведение обладает свойствами:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ **;** **2)** $(\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})$ где λ - число**;**

3) $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ **;** **4)** $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$

5) $\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$**;** **6)** $\overline{i}\cdot\overline{j}=0$**,** $\overline{i}\cdot\overline{k}=0$**,** $\overline{j}\cdot\overline{k}=0$, $\overline{i}^2=1$, $\overline{j}^2=1$, $\overline{k}^2=1$.

Для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, заданных своими координатами $\overline{a}=x_a\overline{i}+y_a\overline{j}+z_a\overline{k}=(x_a,y_a,z_a)$, $\overline{b}=x_b\overline{i}+y_b\overline{j}+z_b\overline{k}=(x_b,y_b,z_b)$ скалярное произведение вычисляется по формуле: $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b$.

Скалярное произведение применяют: **1)** для вычисления угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по формуле: $cos(\overline{a},\overline{b})=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$; **2)** для вычисления проекции вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ по формуле: $np_{\overline{b}}\overline{a}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}$; **3)** для вычисления длины вектора $\overline{a}=\alpha\cdot\overline{p}+\beta\cdot\overline{q}$ по формуле: $|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}=\sqrt{(\alpha\cdot\overline{p}+\beta\cdot\overline{q})^2}$; **4)** в качестве условия перпендикулярности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$, определяемый условиями: **1)** $|\overline{c}|=|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin(\overline{a},\overline{b})$;

2) $\overline{c}\perp\overline{a}$ и $\overline{c}\perp\overline{b}$; **3)** $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ - правая тройка векторов.

Упорядоченная тройка $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ некомпланарных векторов называется ***правой тройкой***, если из конца третьего вектора $\overline{c}$, кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко второму $\overline{b}$, виден совершающимся против хода часовой стрелки. В противном случае, тройка $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ называется левой.

Векторное произведение обладает свойствами:

1) $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$ **;** **2)** $(\lambda\cdot\overline{a})\times\overline{b}=\lambda\cdot(\overline{a}\times\overline{b})$**,** где λ - число**;**

3) $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$ **;** **4)** $\overline{a}\times\overline{a}=\overline{0}$ **5)** $\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$ **;**
6) $\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}$ **,** $\overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}$ **,** $\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}$, $\overline{i}\times\overline{i}=\overline{0}$, $\overline{j}\times\overline{j}=\overline{0}$, $\overline{k}\times\overline{k}=\overline{0}$.

Для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, заданных своими координатами $\overline{a}=x_a\overline{i}+y_a\overline{j}+z_a\overline{k}=(x_a,y_a,z_a)$, $\overline{b}=x_b\overline{i}+y_b\overline{j}+z_b\overline{k}=(x_b,y_b,z_b)$ векторное произведение вычисляется по формуле: $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$.

Векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ применяют: **1)** для вычисления площадей треугольника и параллелограмма, построенных на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как на сторонах, по формуле: $2S_\Delta=S_{пар}=|\overline{a}\times\overline{b}|$; **2)** в качестве условия параллельности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$.

Смешанное произведение обладает свойствами:
1) $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$ **;** **2)** $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-\overline{a}\overline{c}\overline{b}=-\overline{c}\overline{b}\overline{a}$ **;**
3) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\overline{b}\overline{c}\overline{a}=\overline{c}\overline{a}\overline{b}$ **;** **4)** $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ **-**компланарны $\Leftrightarrow\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$ **;**
5) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\pm V$ **,** где V -объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$ **.**

Для векторов $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$, заданных своими координатами $\overline{a}=x_a\overline{i}+y_a\overline{j}+z_a\overline{k}=(x_a,y_a,z_a)$, $\overline{b}=x_b\overline{i}+y_b\overline{j}+z_b\overline{k}=(x_b,y_b,z_b)$, $\overline{c}=x_c\overline{i}+y_c\overline{j}+z_c\overline{k}=(x_c,y_c,z_c)$ смешанное произведение вычисляется по формуле: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}$.

Смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ применяют: **1)** для вычисления объёмов тетраэдра и параллелепипеда, построенных на векторах $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$, как на рёбрах, по формуле: $6V_{тетр}=V_{пар}=|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$; **2)** в качестве условия компланарности векторов $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0\Leftrightarrow\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ - компланарны.

Тема. <u>Прямые линии и плоскости.</u>

Нормальным вектором прямой L, называется всякий ненулевой вектор $\overline{N}$ перпендикулярный данной прямой. ***Направляющим вектором прямой*** L, называется всякий ненулевой вектор $\overline{q}$ параллельный данной прямой.

Прямая L ***на плоскости*** в системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ - ***общее уравнение*** прямой, где $(A, B) = \overline{N}$ - нормальный вектор прямой;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{N} = (A, B)$;

3) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору $\overline{q} = (l, m)$ (***каноническое уравнение***);

4) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$;

5) $y = \begin{cases} y_0 + k(x - x_0) \\ kx + b \end{cases}$ **-** уравнения прямой ***с угловым коэффициентом*** $k = tg\alpha$, где $M_0(x_0, y_0)$ - точка через которую прямая проходит; α ($-\pi/2 < \alpha < \pi/2$) – угол, который прямая составляет с осью Ox; b - длина отрезка (со знаком $\pm$), отсекаемого прямой на оси Oy (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

6) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ **-** уравнение прямой ***в отрезках,*** где a и b - длины отрезков (со знаком $\pm$), отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

Расстояние от точки $M^*(x^*, y^*)$ ***до прямой*** L, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$ на плоскости, находится по формуле:

$$\rho(M^*, L) = \frac{|\,Ax^* + By^* + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Угол $\varphi = (\widehat{L_1, L_2})$, $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ ***между прямыми*** L_1 и L_2, заданными общими уравнениями или уравнениями с угловым коэффициентом, находится по одной из следующих формул:

$$\cos\varphi = |\cos(\overline{N}_1, \overline{N}_2)| = \frac{|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2|}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}; \qquad tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

$L_1 \parallel L_2$, если $\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ или $k_1 = k_2$.

$L_1 \perp L_2$, если $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ или $k_1 k_2 = -1$

Координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2 находятся как решение системы линейных уравнений: $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$.

Тема. Кривые второго порядка.

Алгебраической кривой второго порядка в системе координат Oxy называется кривая Γ, ***общее уравнение*** которой имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где числа A, B, C - не равны нулю одновременно. Существует следующая классификация кривых второго порядка: **1)** если $AC - B^2 > 0$, то общее уравнение определяет кривую ***эллиптического типа*** (окружность (при $B = 0$, $A = C$), эллипс (при $B = 0$, $A \ne C$), пустое множество, точку); **2)** если $AC - B^2 < 0$, то - кривую ***гиперболического типа*** (гиперболу, пару пересекающихся прямых); **3)** если $AC - B^2 = 0$, то - кривую **параболического типа** (параболу, пустое множество, прямую, пару параллельных прямых). Окружность, эллипс, гипербола и парабола называются ***невырожденными кривыми второго порядка.***

Общее уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где $B = 0$, определяющее невырожденную кривую (окружность, эллипс, гиперболу, параболу), всегда (методом выделения полных квадратов) можно привести к уравнению одного из следующих видов:

1а) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ **-** уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r (рис. 7).

1б) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ - уравнение эллипса с центром в точке (x_0, y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям. Числа $a>0$ и $b>0$ - называются ***полуосями эллипса***; прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии и центром в точке (x_0, y_0) - ***основным прямоугольником эллипса;*** точки пересечения основного прямоугольника с осями симметрии - ***вершинами эллипса***.

Для построения эллипса в системе координат Oxy :**1)** отмечаем центр (x_0, y_0) эллипса; **2)** проводим через центр пунктирной линией оси симметрии эллипса; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник эллипса с центром (x_0, y_0) и сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии; **4)** изображаем сплошной линией эллипс, вписывая его в основной прямоугольник так, чтобы эллипс касался его сторон только в вершинах эллипса (рис.8) .

Аналогично строится и окружность, основной прямоугольник которой имеет стороны $2a=2b=2r$ (рис. 5).

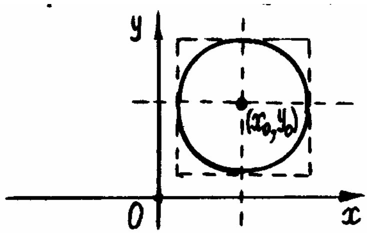


Рис.7

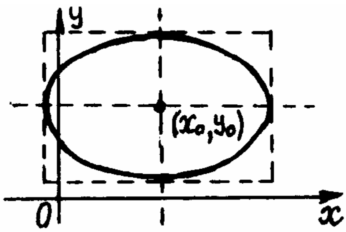


Рис 8

2) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$ - уравнения гипербол (называемых *сопряжёнными*) с центром в точке (x_0, y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям. Числа $a>0$ и $b>0$ - называются ***полуосями гипербол***; прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии и центром в точке (x_0, y_0) - ***основным прямоугольником гипербол;*** точки пересечения основного прямоугольника с осями симметрии - ***вершинами гипербол;*** прямые $a(y-y_0)=\pm b(x-x_0)$, проходящие через противоположные вершины основного прямоугольника – ***асимптотами гипербол***.

Для построения гиперболы в системе координат Oxy : **1)** отмечаем центр гиперболы (x_0, y_0); **2)** проводим через центр (x_0, y_0) пунктирной линией оси симметрии гиперболы; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник гиперболы с центром (x_0, y_0) и сторонами $2a$ и $2b$ параллельными осям симметрии; **4)** проводим через противоположные вершины основного прямоугольника пунктирной линией прямые, являющиеся асимптотами гиперболы, к которым неограниченно близко, при бесконечном удалении от начала координат, приближаются ветви гиперболы, не пересекая их; **5)** изображаем сплошной линией ветви гиперболы $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ (рис. 9) или гиперболы $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$ (рис. 10).

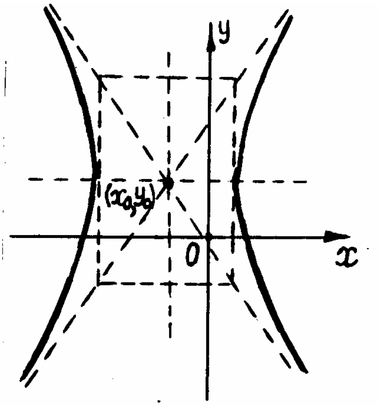


Рис.9

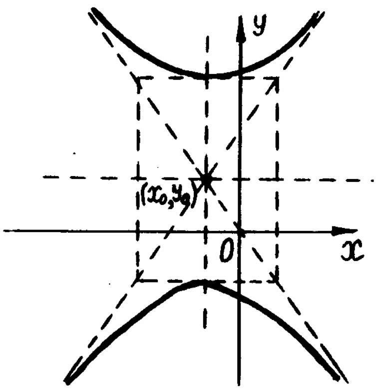


Рис.10

3а) $(x-x_0)^2 = 2p\cdot(y-y_0)$ - уравнение параболы с вершиной в точке (x_0, y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Oy (рис. 9).

3б) $(y-y_0)^2 = 2p\cdot(x-x_0)$ - уравнение параболы с вершиной в точке (x_0, y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Ox (рис. 10).

Для построения параболы в системе координат Oxy : **1)** отмечаем вершину параболы (x_0, y_0); **2)** проводим через вершину (x_0, y_0) пунктирной линией ось симметрии параболы; **3)** изображаем сплошной линией параболу, направляя её ветвь, с учётом знака параметра параболы p: при $p > 0$ - в положительную сторону координатной оси, параллельной оси симметрии параболы (рис. 11а и 12а); при $p < 0$ - в отрицательную сторону координатной оси (рис.11б и 12б) .

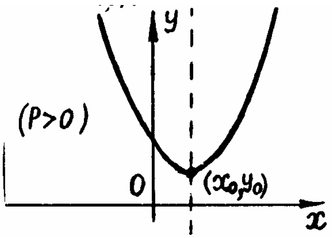


Рис. 11а

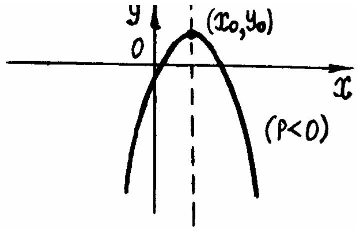


Рис. 11б

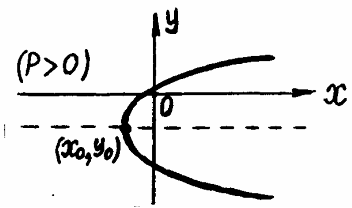


Рис. 12а

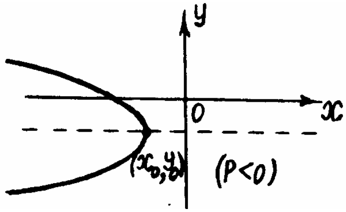


Рис. 12б

Тема. Множества. Числовые множества. Функция.

Под ***множеством*** понимают некоторую совокупность объектов любой природы, различимых между собой и мыслимую как единое целое. Объекты, составляющие множество называют его ***элементами***. Множество может быть бесконечным (состоит из бесконечного числа элементов), конечным (состоит из конечного числа элементов), пустым (не содержит ни одного элемента). Множества обозначают: $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$, а их элементы: $a, b, c, ..., x, y, z, ...$. Пустое множество обозначают $\varnothing$.

Множество B называют ***подмножеством*** множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A и пишут $B \subset A$.

Множества A и B называют ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов и пишут $A = B$. Два множества A и B будут равны тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Множество U называют ***универсальным*** (в рамках данной математической теории), если его элементами являются все объекты, рассматриваемые в данной теории.

Множество можно задать: **1)** перечислением всех его элементов, например: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (только для конечных множеств); **2)** заданием правила P определения принадлежности элемента u универсального множества U, данному множеству A: $A = \{u \in U \mid P(u)\}$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{u \in U \mid u \in A \text{ или } u \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{u \in U \mid u \in A \text{ и } u \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{u \in U \mid u \in A \text{ и } u \notin B\}.$$

Дополнением множества A (до универсального множества U) называется множество $\overline{A} = U \setminus A$.

Два множества A и B называются ***эквивалентными*** и пишут $A \sim B$, если между элементами этих множеств может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Множество A называется ***счётным***, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел N: $A \sim N$. Пустое множество по определению относится к счётным.

Понятие мощности множества возникает при сравнении множеств по числу содержащихся в них элементов. Мощность множества A обозначают $|A|$. Мощностью конечного множества является число его элементов. Эквивалентные множества обладают равной мощностью. Множество A называется ***несчётным***, если его мощность больше мощности множества N.

Действительным (вещественным) ***числом*** называется бесконечная десятичная дробь, взятая со знаком «+» или «$-$». Действительные числа отождествляют с точками числовой прямой.

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа x называется неотрицательное число: $|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0 \\ x, & \text{если } x \ge 0 \end{cases}$

Множество X называется ***числовым***, если его элементами x являются действительные числа. Числовыми ***промежутками*** называются множества чисел: (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty.,+\infty)$.

Множество всех точек x на числовой прямой, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - сколь угодно малое число, называется ε***-окрестностью*** (или просто окрестностью) точки x_0 и обозначается $O_\varepsilon(x_0)$. Множество всех точек x условием $|x| > \mathrm{E}$, где $\mathrm{E} > 0$ - сколь угодно большое число, называется E***-окрестностью*** (или просто окрестностью) бесконечности и обозначается $O_{\mathrm{E}}(\infty)$.

Величина, сохраняющая одно и тоже числовое значение, называется ***постоянной.*** Величина, принимающая различные числовые значения, называется ***переменной. Функцией*** f называется правило, по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие одно вполне определённое число $y \in Y$, и пишут $y = f(x)$. Множество X называется ***областью определения*** функции, Y - ***множеством (***или областью***) значений*** функции, $x \in X$ - ***аргументом***, $y \in Y$ - ***значением функции***. Наиболее распространённым способом задания функции является аналитический способ, при котором функция задаётся формулой. ***Естественной областью определения*** функции $y = f(x)$ называется множество D значений аргумента x, для которого данная формула имеет смысл. ***Графиком функции*** $y = f(x)$, $x \in D$ в прямоугольной системе координат Oxy, называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in D$.

Функция $f(x)$ называется ***чётной*** на множестве X, симметричном относительно точки $x = 0$, если для всех $x \in X$ выполняется условие: $f(-x) = f(x)$ и ***нечётной***, если выполняется условие $f(-x) = -f(x)$. В противном случае $f(x)$ - функция общего вида или ***ни чётная, ни нечётная***.

Функция $f(x)$ называется ***периодической*** на множестве X, если существует число $T \neq 0$ (***период функции***), такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее число $T > 0$ называется основным периодом.

Функция $f(x)$ называется ***монотонно возрастающей*** (***убывающей***) на множестве X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве X, если существует число $M > 0$, такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие: $|f(x)| \leq M$. В противном случае функция - ***неограниченная***.

Обратной к функции $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ называется такая функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена на множестве Y и каждому $y \in Y$ ставит в соответствие такое $x \in X$, что $f(x) = y$. Для нахождения функции $x = f^{-1}(y)$, обратной к функции $y = f(x)$, нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x. Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ является строго монотонной на X, то она всегда имеет обратную, при этом, если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Функция $y = f(x)$, представляемая в виде $y = f(x) = F(\varphi(x))$, где $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ - некоторые функции такие, что область определения функции $F(u)$ содержит всё множество значений функции $\varphi(x)$, называется

сложной функцией независимого аргумента x. Переменную u называют при этом промежуточным аргументом. Сложную функцию $f(x) = F(\varphi(x))$ называют также композицией функций F и φ, и пишут: $f = F \circ \varphi$.

Основными элементарными функциями считаются: ***степенная*** функция $y = x^{\alpha}$, ***показательная*** функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ***логарифмическая*** функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), ***тригонометрические*** функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, ***обратные тригонометрические*** функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$. ***Элементарной*** называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их арифметических операций и композиций.

Если задан график Γ функции $y = f(x)$, $x \in X$, то построение графика функции $y = c\,f(ax+b)+d$ сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие или растяжение, отображение) графика Γ:

1) преобразование $-f(x)$ симметрично отображает график Γ, относительно оси Ox; **2)** преобразование $f(-x)$ симметрично отображает график Γ, относительно оси Oy; **3)** преобразование $f(x-a)$ сдвигает график Γ по оси Ox на $|a|$ единиц ($a > 0$ - вправо, $a < 0$ - влево); **4)** преобразование $f(x)+b$ сдвигает график Γ по оси Oy на $|a|$ единиц ($a > 0$ - вверх, $a < 0$ - вниз); **5)** преобразование $kf(x)$ график Γ вдоль оси Oy растягивает в k раз, если $k > 1$ или сжимает в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$; **6)** преобразование $f(kx)$ график Γ вдоль оси Ox сжимает в k раз, если $k > 1$ или растягивает в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$. Последовательность преобразований при построении графика функции $y = c\,f(ax+b)+d$ можно представить символически в виде:

$$f(x) \to f(ax) \to f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right) \to c\,f(ax+b) \to c\,f(ax+b)+d.$$

При выполнении преобразования $f(ax) \to f(ax+b)$ следует иметь в виду, что величина сдвига вдоль оси Ox определяется той константой, которая прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу ax.

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, ветви которой направлены вверх, если $a > 0$ или вниз, если $a < 0$. Графиком дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ является гипербола с центром в точке $\left(-d/c\,, a/c\right)$, асимптоты которой проходят через центр, параллельно осям координат.

В некоторых случаях при построении графика функции целесообразно разбить её область определения на несколько непересекающихся промежутков и последовательно строить график на каждом из них. Например, при построении графика функции, в аналитическое выражение которой входит функция $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$, следует выделить и рассмотреть отдельно промежутки, на которых выражение под знаком модуля не меняет знак.

Тема. <u>Предел функции.</u>

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to x_0$ (или в точке x_0), и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Рассматривают также односторонние пределы функций: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, где x стремится к x_0, $+\infty$, $-\infty$ или только с левой стороны или только с правой стороны.

Основные утверждения, используемые для вычисления пределов функций при $x \to a$ (в дальнейшем a - или число x_0 или символ ∞):

1) Если c - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

2) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$, то:

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm d$; **б)** $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b\cdot d$;

в) $\lim\limits_{x\to a}(cf(x)) = c\cdot b \quad (c = const)$; **г)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{d}$, если $d \ne 0$.

При вычислении пределов постоянно пользуются и тем, что для любой основной элементарной функции $f(x)$ и точки x_0 из её области определения справедливо соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Основные утверждения для бесконечно больших функций, используемые для вычисления пределов при $x \to a$:

1) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$,если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$

2) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$, то $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \infty$.

3) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

4) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

5) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} (f(x)/g(x)) = 0$.

6) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} (f(x)/g(x)) = \infty$.

Если непосредственное применение свойств конечных пределов и бесконечно больших функций приводит к неопределённым выражениям, символически обозначаемым: $0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$, то для вычисления предела – «раскрытия неопределённости» - преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить.

Первым замечательным пределом называется предел: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Его следствиями являются пределы: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$

Вторым замечательным пределом называются пределы:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e,$$

где $e = 2.71828...$-основание натуральных логарифмов (число Непера). Он используется для вычисления предела степенно-показательной функции $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \infty$.

При нахождении пределов $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ следует иметь в виду:

1) Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b > 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = d$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = b^d$.

2) Если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b \neq 1$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ вычисляют, учитывая, что: $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ v(x)\to+\infty}} b^{v(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < b < 1 \\ +\infty, & b > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ v(x)\to-\infty}} b^{v(x)} = \begin{cases} +\infty, & 0 < b < 1 \\ 0, & b > 1 \end{cases}$.

Тема. **Числовые последовательности. Предел последовательности.**

Если каждому натуральному числу n по некоторому правилу f поставлено в соответствие одно вполне определённое действительное число $x_n = f(n)$, то говорят, что задана ***числовая последовательность*** $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Кратко обозначают (x_n). Число x_n называется ***общим членом последовательности***. Последовательность называют также функцией натурального аргумента. Последовательность всегда содержит бесконечно много элементов, среди которых могут быть равные.

Число a называется ***пределом последовательности*** (x_n), и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность (x_n), имеющая конечный предел, называется ***сходящейся***, в противном случае – ***расходящейся***.

Последовательность (x_n) называется: **1)** ***убывающей***, если $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$; **2)** ***возрастающей***, если $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$; **3)** ***неубывающей***, если $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le \dots$; **4)** ***невозрастающей***, если $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n \ge \dots$. Все вышеперечисленные последовательности называются ***монотонными***.

Последовательность (x_n) называется ***ограниченной***, если существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется условие: $|x_n| \le M$. В противном случае последовательность - ***неограниченная***.

Теорема Вейерштрасса. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Последовательность (x_n) называется ***бесконечно большой*** (сходящейся к бесконечности) и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого числа $E > 0$ найдётся номер $N(E)$ такой, что при всех $n > N(E)$ выполняется неравенство $|x_n| > E$.

Числом e называется предел последовательности (x_n), где $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Постоянную $e = 2.718281....$ называют неперовым числом. Логарифм числа x по основанию e называется натуральным логарифмом числа x и обозначается $\log_e x = \ln x$.

Тема. Непрерывность функции.

Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки x_0 (левой полуокрестности, правой полуокрестности) и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$), то функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 (непрерывной слева, непрерывной справа).

Каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения и непрерывна слева (справа) в крайней правой (крайней левой) точке области определения.

Если в точке x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$. При этом различают следующие случаи:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$.

2) Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но они не равны друг другу, то x_0 называется ***точкой разрыва 1-ого рода.***

3) В остальных случаях x_0 называется ***точкой разрыва 2-ого рода***.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке (в точке a - непрерывна справа, в точке b - непрерывна слева). Функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ обладает свойствами: **1)** ограничена на $[a,b]$; **2)** достигает на отрезке $[a,b]$ своего наименьшего значения m и наибольшего значения M; **3)** для любого числа C, заключённого между числами $f(a)$ и $f(b)$, всегда найдётся точка $c \in [a,b]$

такая, что $f(c)=C$; **4)** если $f(a)f(b)<0$, то всегда найдётся точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(c)=0$.

Тема. <u>Комплексные числа и многочлены.</u>

Комплексным числом называется число вида $z=x+iy$, где x, y - действительные числа, символ i - мнимая единица, для которой $i^2=-1$. Число $x=\operatorname{Re} z$ - называется действительной частью комплексного числа z, число $y=\operatorname{Im} z$ - мнимой частью. Комплексное число $x+i0$ совпадает с действительным, а число iy называется чисто мнимым. Множество всех комплексных чисел обозначается C.

Комплексное число $z=x+iy$ изображается на плоскости с системой координат Oxy (называемой комплексной плоскостью) точкой, обозначаемой той же буквой z и имеющей координаты (x,y). Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые – оси ординат (поэтому ось Ox называется действительной осью, а ось Oy - мнимой осью). Комплексное число на комплексной плоскости изображается также радиус-вектором точки (x,y). Длина радиус-вектора называется ***модулем комплексного числа:*** $r=\sqrt{x^2+y^2}$, а угол его φ с осью Ox называется ***аргументом комплексного числа***: $\begin{cases}\cos\varphi=x/r\\ \sin\varphi=y/r\end{cases}$, $0\le\varphi<2\pi$. Аргумент φ комплексного числа вычисляют, как правило, по формуле:

$$\varphi=\begin{cases} arctg(y/x) & \text{если } z\in\{I\ \text{квадранту}\}\\ \pi+arctg(y/x) & \text{если } z\in\{II\ \text{или}\ III\ \text{квадранту}\}\\ 2\pi+arctg(y/x) & \text{если } z\in\{IV\ \text{квадранту}\}\end{cases}.$$

Комплексно-сопряжённым числу $z=x+iy$ называется число $\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy$.

Представление комплексного числа выражением $z=x+iy$ называется ***алгебраической формой*** комплексного числа, а выражением $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ - ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение) над комплексными числами в алгебраической форме выполняют по правилам действий над многочленами, с учётом того, что $i^2=-1$:

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) .$$

Деление комплексных чисел выполняют следующим образом: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$.

Возведение комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n выполняют, используя ***формулу Муавра:*** $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$**.** Полученный результат представляют затем в алгебраической форме.

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (не равного нулю) выполняют по формуле:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

(здесь $\sqrt[n]{r}$ - действительное положительное число). Таким образом, корень степени n из комплексного числа имеет n различных значений, расположенных на комплексной плоскости на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Алгебраическим многочленом степени n называется выражение вида:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n ,$$

где $z \in C$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - некоторые числа (вообще говоря, комплексные), называемые коэффициентами многочлена, причём $a_0 \neq 0$.

Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение вида $P_n(z) = 0.$ Число z_0 , для которого $P_n(z_0) = 0$ называется ***корнем*** многочлена или уравнения.

Теорема Безу. Число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится на $(z - z_0)$, т.е. когда $P_n(z)$ представляется в виде: $P_n(z) = (z - z_0) \cdot Q_{n-1}(z)$, где $Q_{n-1}(z)$ - многочлен степени $(n-1)$.

Число z_0 называется ***корнем кратности*** k многочлена $P_n(z)$, если $P_n(z) = (z - z_0)^k \cdot Q_{n-k}(z)$, где $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Для многочленов имеет место следующая теорема:

Теорема Гаусса (*основная теорема алгебры*). Всякий многочлен ненулевой степени n имеет ровно n корней, если каждый корень считать ровно столько раз, какова его кратность .

Всякий многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами всегда можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Всякий квадратный многочлен az^2+bz+c с действительными коэффициентами на множестве комплексных чисел всегда можно разложить в произведение линейных множителей: $a\,z^2+bz+c=a\,(z-z_1)\,(z-z_2)$, где корни многочлена z_1 и z_2 находятся по формулам:

1) если $D=b^2-4ac\geq 0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ - действительные;

2) если $D=b^2-4ac<0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}\pm i\cdot\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ - комплексно-сопряжённые.

Для нахождения корней алгебраического уравнения $P_n(z)=0$ $(n\geq 3)$ с действительными коэффициентами поступают, как правило, следующим образом: находят один из корней подбором (например, корнем может быть целый делитель свободного слагаемого a_n), а затем, последовательно применяя теорему Безу, сводят нахождение корней уравнения $P_n(z)=0$ к нахождению корней линейных и квадратных уравнений.

Тема. <u>Производные и дифференциалы функции одной переменной.</u>

Приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента $\Delta x\neq 0$ называется выражение $\Delta y=\Delta f(x_0,\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Производной 1-ого порядка функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x}$. Геометрический смысл производной состоит в том, что число $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0: $f'(x_0)=tg\alpha$, где α - угол наклона касательной к оси Ox прямоугольной декартовой системы координат Oxy.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке. Необходимым условием дифференцируемости в точке является непрерывность функции в данной точке.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x}=\infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет ***бесконечную производную.*** В этом случае касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 перпендикулярна к оси Ox.

Числа $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x}$ и $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta f(x_0,\Delta x)}{\Delta x}$ называются, соответственно ***левой*** и ***правой производными*** функции $y=f(x)$ в точке x_0. Условие $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ равносильно дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0, при этом $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

Любая элементарная функция $y=f(x)$ дифференцируема во всякой внутренней точке x естественной области определения D функции $f(x)$, в которой аналитическое выражение её производной $y'=f'(x)$ имеет смысл. Производная $f'(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек x, где она существует, сама является функцией. Операция нахождения производной $f'(x)$ называется также ***дифференцированием*** функции $f(x)$**.**

Основные правила дифференцирования элементарных функций.

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые функции, C - постоянная, то:

$(C)'=0$	$(f\cdot g)'=f'g+fg'$
$(f\pm g)'=f'\pm g'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$, $g\neq 0$
$(Cf)'=Cf'$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)'=-\dfrac{g'}{g^2}$, $g\neq 0$

2. Если функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y=F(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(x)=F(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и имеет производную:

$$\boxed{f'(x_0)=F'(u_0)\varphi'(x_0)} \quad \text{или кратко} \quad \boxed{y'_x=y'_u u'_x}..$$

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е. $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Применение предварительного логарифмирования функции приводит к следующему, часто более простому, способу вычисления её производной: $y'=y\cdot(\ln y)'$. Например, для степенно-показательной функции $y=f(x)=u^v$, где $u(x)>0$, $v(x)$ - дифференцируемые функции:

$$\left(u^v\right)'=u^v(v\cdot\ln u)'.$$

Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y(x)) = 0$, то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $F'_x(x, y) = 0$, линейного относительно $y'(x)$, где $F(x, y(x))$ -рассматривается как сложная функция переменной x.

Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ -взаимно обратные дифференцируемые функции и $y'_x \neq 0$, то справедлива формула: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ (***правило дифференцирования обратной функции***).

Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha < t < \beta)$, где $x(t)$, $y(t)$ -дифференцируемые функции и $x'_t \neq 0$, то справедлива формула: $y'_x = y'_t / x'_t$ (***правило дифференцирования функции заданной параметрически)***.

При дифференцировании сложных и обратных функций, а также функций заданных неявно и параметрически для производной используют обозначения типа y'_x, x'_y, y'_t, x'_t там, где необходимо уточнить, по какой переменной ведётся дифференцирование.

Производной 2-ого порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от её первой производной и обозначается $y'' = f''(x)$, т. е. $y'' = (y')'$. В общем ***производной порядка*** n **(**n***-ой производной*****)** называется производная от $(n-1)$-ой производной и обозначается $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$, т.е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.Для производной $y^{(n)}$ используется также обозначение $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Производная $y^{(n)}$ функции $y = f(x)$ вычисляется её последовательным дифференцированием: y', $y'' = (y')'$, $y''' = (y'')'$, …, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Если функция $y = f(x)$ задана параметрически, то её производные высших порядков находятся по формулам: $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$,….

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то её приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \text{, где } \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0 .$$

Дифференциалом dy функции $y = f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения Δy функции:

$dy = f'(x)\Delta x$. В частности, для функции $y = x$ имеем $dy = \Delta x$, т.е. дифференциал независимого переменного x совпадает с приращением Δx. Поэтому дифференциал функции $y = f(x)$ записывается в виде $dy = f'(x)dx$. Форма записи первого дифференциала не изменится и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (***свойство инвариантности формы первого дифференциала***).

Для функции одной переменной $y = f(x)$ существование в точке x её дифференциала dy и производной $f'(x)$ равносильны.

Дифференциалом 2-ого порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от её первого дифференциала и обозначается d^2y, т. е. $d^2y = d(dy)$. В общем ***дифференциалом порядка*** n называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка и обозначается $d^n y$, т.е. $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Если x - независимая переменная, то для нахождения дифференциала $d^n y$ функции $y = f(x)$ справедлива формула $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Первый дифференциал применяют для приближённого вычисления значений функции $y = f(x)$ в малой окрестности точки x_0, в которой функция дифференцируема, по формуле:

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \text{ где } x = x_0 + \Delta x.$$

Чем меньше значение $|\Delta x|$, тем точнее приближённая формула.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, а ***уравнение нормали*** - вид: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Пусть некоторая экономическая величина (издержки производства, прибыль, производительность и т.д.) задаётся непрерывной функцией $y = f(x)$. Тогда, ***предельной*** для $f(x)$ называется величина $Mf(x) = f'(x)$, ***средней*** – величина $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Буква M - сокращение от слова *Marginal* (предельный), буква A - сокращение от слова *Average* (средний). Предельная величина $Mf(x)$ является мерой реагирования одной переменной величины на изменение другой и показывает приближённый абсолютный прирост $f(x)$ при изменении x на единицу.

Эластичностью функции $y = f(x)$ в точке x называется предел $E_x(y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y / y}{\Delta x / x}$. Эластичность $E_x(y)$, также как и $Mf(x)$, является мерой реагирования одной переменной величины на изменение другой и показывает приближённый процентный прирост $f(x)$ при изменении x на один процент. Находят эластичность $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ по формуле $E_x(y) = \dfrac{x}{y} \cdot y'$

Тема. <u>Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.</u>

Теорема Роля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$, то на (a,b) существует точка c такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то на (a,b) существует точка c такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$ (***формула Лагранжа***).

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a,b)$, то на интервале (a,b) существует точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (\textbf{\textit{формула Коши}}).$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух дифференцируемых или бесконечно малых или бесконечно больших функций при $x \to a$ (a - число x_0 или символ ∞) равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя используют для раскрытия неопределённостей видов $0/0$ и ∞/∞. На каждом этапе применения правила Лопиталя следует пользоваться упрощающими отношение тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с любыми другими приёмами вычисления пределов. В некоторых случаях может потребоваться неоднократное применение данного правила.

Раскрытие неопределённостей видов $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} путём преобразований:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f}{1/g},\ f(x)-g(x)=\frac{(1/g)-(1/f)}{(1/f)\cdot(1/g)},\ f(x)^{g(x)}=e^{g\ln f}=e^{\frac{\ln f}{1/g}}$$

приводится к раскрытию неопределенностей видов $0/0$ и ∞/∞.

Тема. <u>Исследование функций с помощью производных, построение их графиков.</u>

1. <u>Возрастание, убывание функций. Экстремум.</u>

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей*** **(*убывающей*)** на интервале (a,b), если для любых $x_1,x_2\in(a,b)$, удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) при всех $x\in(a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на (a,b).

Точка x_0, принадлежащая области определения D функции $y=f(x)$, называется ***критической точкой*** функции, если в этой точке $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует. Критические точки функции $y=f(x)$ разбивают её область определения D на интервалы монотонности (интервалы возрастания и убывания).

Точка $x_0\in D$ называется ***точкой минимума*** **(*максимума*)** функции $y=f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех точек $x\neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ ($f(x)<f(x_0)$), а число $f(x_0)$ - ***минимумом*** **(*максимумом*)** функции. Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума*,** а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Необходимое условие экстремума. Если $x_0\in D$ - точка экстремума функции $y=f(x)$, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $x_0\in D$, в которой $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует. Тогда, если производная $f'(x)$, при переходе слева направо через точку x_0: **1)** меняет знак с «+» на « − », то x_0 - точка максимума; **2)**

меняет знак с знак с « $-$ » на «+», то x_0 - точка минимума; **3)** сохраняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x_0 \in D$, в которой $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда: **1)** если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума; **2)** если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума.

2. <u>Наибольшее и наименьшее значения функции.</u>

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ непрерывной и кусочно-дифференцируемой (дифференцируемой, за исключением, быть может, конечного числа точек) на отрезке $[a, b]$ достигается или во внутренних критических точках или на концах отрезка.

3. <u>Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты.</u>

Функция $y = f(x)$ называется ***выпуклой*** **(*вогнутой*)** на интервале (a, b), если её график лежит под касательной (над касательной), проведённой к графику данной функции, в любой точке интервала (a, b) .

Иногда выпуклость называют выпуклостью вверх, а вогнутость – выпуклостью вниз.

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) при всех $x \in (a, b)$, то функция является вогнутой (выпуклой) на (a, b) .

Точка x_0, принадлежащая области определения D функции $y = f(x)$, называется ***точкой перегиба*** функции, если при переходе через неё меняется направление выпуклости функции. Точка $(x_0, f(x_0))$ при этом называется ***точкой перегиба графика*** функции.

Точка $x_0 \in D$ называется ***точкой возможного перегиба*** функции $y = f(x)$, если в этой точке $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Эти точки разбивают область определения D функции $y = f(x)$ на интервалы выпуклости и вогнутости.

Необходимое условие перегиба. Если $x_0 \in D$ - точка перегиба функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточное условие перегиба. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in D$, в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда, если производная $f''(x)$, при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Прямая L называется асимптотой графика Γ функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M \in \Gamma$ до прямой L стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат.

Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности.

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y = f(x)$. Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$), если $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$). Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является ***горизонтальная асимптота***.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (при $x \to +\infty$) тогда и только тогда, когда одновременно существуют пределы: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = b$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$).

4. <u>Построение графиков функций.</u>

Для построения графика функции $y = f(x)$ нужно: **1)** найти область определения функции; **2)** найти область непрерывности функции и точки разрыва; **3)** исследовать функцию на чётность, нечётность и периодичность; **4)** найти точки пересечения графика с осями координат; **5)** найти асимптоты графика функции; **6)** найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции; **7)** найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Тема. <u>Основные понятия о функции нескольких переменных</u>.

Всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***точкой*** n***-мерного арифметического*** (координатного) ***пространства*** R^n и обозначается $\bar{x}$ или $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при этом числа x_i называются её ***координатами***.

Пространство R^n называется ***евклидовым***, если расстояние между любыми двумя его точками $M(x_1,\ldots,x_n)$ и $M_0(x_{10},\ldots,x_{n0})$ определяется формулой $\rho(M,M_0)=\sqrt{(x_1-x_{10})^2+\ldots+(x_n-x_{n0})^2}$.

Пусть $X\subset R^n$ и $Y\subset R$ - некоторые множества точек R^n и R . Если каждой точке $M\in X$ ставится в соответствие по некоторому правилу f одно вполне определённое действительное число $y\in Y$, то говорят, что на множестве X задана числовая функция от n переменных и пишут $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ или кратко $y=f(M)$ и $y=f(\bar{x})$, при этом X называется ***областью определения***, Y - ***множеством значений***, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ - ***аргументами*** (независимыми переменными) функции.

Функцию двух переменных часто обозначают $z=f(x,y)$, функцию трёх переменных - $u=f(x,y,z)$. Область определения функции $z=f(x,y)$ представляет собой некоторое множество точек плоскости, функции $u=f(x,y,z)$ - некоторое множество точек пространства.

Наиболее распространённым способом задания функции является аналитический способ, при котором функция задаётся формулой. ***Естественной областью определения*** функции $y=f(M)$ называется множество $D\subset R^n$ точек $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, для координат которых формула имеет смысл.

Графиком функции $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$, называется множество точек пространства с координатами $(x,y,f(x,y))$, $(x,y)\in D$, представляющее собой, вообще говоря, некоторую поверхность в R^3 .

Линией уровня функции $z=f(x,y)$ называется линия $f(x,y)=C$ на плоскости Oxy , в точках которой функция принимает одно и тоже значение $z=C$.

Число b называется ***пределом функции*** $y=f(M)$ при $M\to M_0$ (или в точке M_0), и пишут $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при всех M , удовлетворяющих условию $0<\rho(M,M_0)<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(M)-b|<\varepsilon$. Для функции $z=f(x,y)$ пишут $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$. Вычисление предела функции нескольких переменных часто сводят к вычислению предела функции одной переменной с помощью замены переменных.

Функция $y = f(M)$ называется ***непрерывной в точке*** M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$. Функция непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в*** этой ***области.*** Если в точке M_0 нарушено хотя бы одно из следующих условий: **1)** функция $f(M)$ определена в точке M_0; **2)** существует конечный предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$; **3)** $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, то M_0 называется ***точкой разрыва*** функции $y = f(M)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва.

Тема. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных, их приложения.

Частной производной (1-ого порядка) функции $y = f(M)$ в точке $M(x_1, \ldots x_k, \ldots, x_n)$ по переменной x_k называется предел $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$, если этот предел существует. Частную производную обозначают $\dfrac{\partial y}{\partial x_k}$ или y'_{x_k}.

Частные производные вычисляются по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной, в предположении, что все аргументы функции, кроме аргумента x_k, по которому берётся производная, постоянны.

Частными производными второго порядка функции $y = f(M)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка. При этом используются обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_k^2} = y''_{x_k x_k}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_m} = y''_{x_k x_m} \ (k \neq m).$$

Производные $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_m}$ ($k \neq m$) называются ***смешанными.*** Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго. Для функции $z = f(x, y)$ частные производные обозначаются:

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots$ или $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy},\ldots$.

Если смешанные частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от порядка дифференцирования.

Полным приращением функции $y = f(M)$ в точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ называется разность $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Функция $y = f(M)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если её полное приращение может быть представлено в виде $\Delta y = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2} \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - числа, не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Полным дифференциалом dy функции $y = f(M)$ в точке M называется главная, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ часть $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n$ полного приращения Δy функции, равная $dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$, где $dx_1 = \Delta x_1, \ldots, dx_n = \Delta x_n$.

Функция $y = f(M)$, обладающая в точке M непрерывными частными производными, всегда имеет в этой точке полный дифференциал dy. Для функции $y = f(M)$ дифференцируемость в точке равносильна существованию в этой точке её полного дифференциала.

Форма записи первого дифференциала не изменится и в том случае, если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются функциями новых, независимых переменных (***свойство инвариантности формы первого дифференциала***).

Дифференциалом 2-ого порядка функции $y = f(M)$ называется дифференциал от её первого дифференциала и обозначается $d^2 y$, т. е. $d^2 y = d(dy)$. В общем ***дифференциалом порядка*** m называется дифференциал от дифференциала $(m-1)$-ого порядка и обозначается $d^m y$, т.е. $d^m y = d(d^{m-1} y)$.

Если x - независимая переменная, то для нахождения дифференциала $d^m y$ функции $y = f(M)$ справедлива символическая формула $d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m y$, формально раскрываемая по биномиальному закону. Например, для функции $z = f(x, y)$ справедливы формулы: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, $\quad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$,

а для функции $u = f(x, y, z)$ - формулы: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$,

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz.$$

Первый дифференциал применяют для приближённого вычисления значений функции $y = f(M)$ в малой окрестности точки M_0, в которой функция дифференцируема, по формуле: $f(M) \approx f(M_0) + df(M_0)$.

В частности, для функции $z = f(x, y)$ по формуле: $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Чем меньше значение $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, тем точнее формула.

Если уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, где F - дифференцируемая функция по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, определяет y как функцию независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то частные производные этой неявной функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вычисляются по формулам: $\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}, \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_y}$ при условии, что $F'_y \neq 0$.

В частности, для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$ справедлива формула $y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, при условии $F'_y \neq 0$, а для функции $y = f(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$

справедливы формулы: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$, при условии $F'_z \neq 0$.

Частные производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данных формул.

Множество точек $X \subset R^n$ называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками A и B, оно содержит и отрезок AB.

Функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, определённая на выпуклом множестве $D \subset R^n$ называется ***выпуклой вверх***, если для всех точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D$, где $\bar{x}_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $\bar{x}_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$ и для любого $t \in [0,1]$ выполняется неравенство $f(t\bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_2) > t f(\bar{x}_1) + (1-t) f(\bar{x}_2)$ и ***выпуклой вниз***, если выполняется неравенство $f(t\bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_2) < t f(\bar{x}_1) + (1-t) f(\bar{x}_2)$.

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{k}.$$

Производная *функции* $u = f(x, y, z)$ ***по направлению*** произвольного вектора $\vec{\ell} = \ell_x \vec{i} + \ell_y \vec{j} + \ell_z \vec{k}$ вычисляется по формуле $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$.

Градиент функции $u = f(M)$ в точке $M(x, y, z)$ направлен по нормали к поверхности уровня $f(x, y, z) = C$, проходящей через $M(x, y, z)$ в сторону возрастания функции, а его модуль $|grad u|$ равен наибольшей производной по направлению в этой точке.

Тема. Экстремумы функций нескольких переменных.

Точка $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$, принадлежащая области определения D функции $y = f(x_1, \ldots, x_n) = f(M)$, называется ***стационарной точкой*** функции, если в этой точке каждая из её частных производных равна нулю, т.е. $f'_{x_1}(M_0) = 0, \ldots, f'_{x_n}(M_0) = 0$ или $df(M_0) = 0$.

Точка M_0 называется ***точкой минимума*** (***максимума***) функции $y = f(M)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M \neq M_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$).

Точки минимума и максимума функции называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами функции***.

Необходимое условие экстремума. Если M_0 - точка локального экстремума функции $y = f(M)$, дифференцируемой в точке M_0, то M_0 - стационарная точка функции.

Достаточное условие экстремума. Пусть M_0 - стационарная точка дважды дифференцируемой в точке M_0 функции $y = f(M)$. Тогда, если при всевозможных наборах значений $dx_1, \dots, dx_n$, не равных одновременно нулю: **1)** $d^2 f(M_0) < 0$, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет максимум; **2)** $d^2 f(M_0) > 0$, то в точке M_0 функция имеет минимум; **3)** $d^2 f(M_0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке M_0 функция $f(M)$ не имеет экстремума.

В частности, функция $z = f(x, y)$ в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$, при условии $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0$, где $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$: **1)** имеет максимум, если $D > 0$ и $A < 0$; **2)** имеет минимум, если $D > 0$ и $A > 0$; **3)** не имеет экстремума, если $D < 0$.

Точка $M_0 \in D$ называется ***точкой условного минимума*** (***максимума***) функции $y = f(x_1, \dots, x_n) = f(M)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M \neq M_0$ этой окрестности, удовлетворяющих уравнениям связи $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \varphi_k(M) = 0$ ($k = \overline{1, m}$, $m < n$) выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$). Точки условного минимума и максимума функции называются ***точками условного экстремума***, а значения функции в этих точках – ***условными экстремумами функции.***

Задача нахождения условного экстремума сводится к нахождению обычного экстремума ***функции Лагранжа*** $L(M, \lambda_1, \dots \lambda_m) = f(M) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(M)$, где λ_k ($k = \overline{1, m}$) –постоянные ***множители Лагранжа***.

Необходимое условие условного экстремума. Если M_0 - точка условного экстремума функции $y = f(M)$ при наличии уравнений связи $\varphi_k(M) = 0$ ($k = \overline{1, m}$, $m < n$), то в точке M_0 выполняются условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(M_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \\ \varphi_k(M_0) = 0 \quad (k = \overline{1, m}) \end{cases} .$$

Решая данную систему, находят неизвестные координаты точки M_0, в которой возможен условный экстремум и соответствующие ей значения множителей Лагранжа $\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{m0}$.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа $d^2L(M_0, \lambda_{10}, ..., \lambda_{m0})$ в точке M_0 при значениях $\lambda_{10}, ..., \lambda_{m0}$, где $dx_1, \ldots, dx_n$ связаны соотношениями: $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0$ ($k = \overline{1, m}$).

В частности, для функции $z = f(x, y)$ исследуется знак $d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$ при условии $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$.

Достаточное условие условного экстремума. Пусть M_0 - точка возможного условного экстремума функции $y = f(M)$, т.е. в этой точке выполнены необходимые условия условного экстремума. Тогда, если при всевозможных наборах значений $dx_1, \ldots, dx_n$, удовлетворяющих соотношениям $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0$ ($k = \overline{1, m}$) и не равных одновременно нулю: **1)** $d^2L(M_0, \lambda_{10}, ..., \lambda_{m0}) < 0$, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет условный максимум; **2)** $d^2L(M_0, \lambda_{10}, ..., \lambda_{m0}) > 0$, то в точке M_0 функция имеет условный минимум; **3)** $d^2L(M_0, \lambda_{10}, ..., \lambda_{m0})$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке M_0 функция $f(M)$ не имеет условного экстремума.

Если функция $y = f(M)$ дифференцируема в ограниченной и замкнутой области, то она достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Тема. Приложения к общей экономической теории.

Частные эластичности функции $z = f(x, y)$ вычисляются по формулам: $E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$, $E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$. Частные эластичности $E_x(z)$, $E_y(z)$ являются мерами реагирования переменной z на изменение переменных x и y, и показывают приближённый процентный прирост z при изменении x и y на один процент, соответственно.

Под ***производственной функцией*** понимается функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$, независимые переменные которой $x_1, \dots, x_n$ имеют смысл объёмов используемых ресурсов, а зависимая переменная y – объёма выпускаемой продукции.

Предельной по переменной x_i для $y = f(x_1, \dots, x_n)$ называется величина $M_{x_i}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, ***средней***– величина $A_{x_i}(f) = \dfrac{f(x_1, \dots, x_n)}{x_i}$. Буква M - сокращение от слова $M\arg inal$ (предельный), буква A - сокращение от слова $Average$ (средний).

Производственной функцией Кобба-Дугласа называется функция вида $Q = Q(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta}$, где A, α, β - некоторые постоянные, K - объём производственных фондов, L - объём трудовых ресурсов, Q - объём выпускаемой продукции.

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

Формулы тригонометрии:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$ **.**

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

7. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

10. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2]$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

12. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$

13. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ **14.** $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

Формулы приведения.

Функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	$df(x)$
1	$x^{\alpha}\ \ (\alpha \neq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1} dx$
2	$a^{x}\ \ (a>0, \neq 1)$	$a^{x} \ln a$	$a^{x} \ln a dx$
3	e^{x}	e^{x}	$e^{x} dx$
4	$\log_{a} x\ \ (a>0, \neq 1)$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\dfrac{dx}{x \ln a}$
5	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{dx}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$
8	tgx	$\dfrac{1}{\cos^{2} x}$	$\dfrac{dx}{\cos^{2} x}$
9	$ctgx$	$-\dfrac{1}{\sin^{2} x}$	$-\dfrac{dx}{\sin^{2} x}$
10	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
11	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
12	$arctgx$	$\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$\dfrac{dx}{1+x^{2}}$
13	$arcctgx$	$-\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$-\dfrac{dx}{1+x^{2}}$
14	chx	shx	$shxdx$
15	shx	chx	$chxdx$
16	thx	$\dfrac{1}{ch^{2} x}$	$\dfrac{dx}{ch^{2} x}$
17	$cthx$	$-\dfrac{1}{sh^{2} x}$	$-\dfrac{dx}{sh^{2} x}$

6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета»

кафедра математики

Контрольная работа

по дисциплине **«Математика»**

Вариант № ____

Номера выполняемых заданий

____

Выполнил: студент группы № _______

***Ф.И.О. студента*________**

зач. книжка - №_________

Проверил: **преподаватель кафедры математики**

***Ф.И.О. преподавателя*_____**

Набережные Челны

201…

6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	***Номера выполняемых заданий***									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**92**
12	**4**	**13**	**22**	**33**	**44**	**53**	**62**	**73**	**84**	**93**
13	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**
14	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**
15	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**
16	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**
17	**9**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**
18	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**
19	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**
20	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**
21	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**
22	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**
23	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**
24	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**
25	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**
26	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**
27	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**
28	**2**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**
29	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**
30	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Номер варианта	***Номера выполняемых заданий***									
	11	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
1	**107**	**118**	**129**	**140**	**149**	**158**	**167**	**176**	**185**	**194**
2	**106**	**117**	**128**	**139**	**150**	**159**	**168**	**177**	**186**	**195**
3	**105**	**116**	**127**	**138**	**149**	**160**	**169**	**178**	**187**	**196**
4	**104**	**113**	**122**	**133**	**144**	**153**	**162**	**173**	**184**	**193**
5	**103**	**112**	**121**	**132**	**143**	**152**	**161**	**172**	**183**	**192**
6	**110**	**120**	**130**	**140**	**150**	**160**	**170**	**180**	**190**	**200**
7	**109**	**119**	**129**	**139**	**149**	**159**	**169**	**179**	**189**	**199**
8	**106**	**115**	**124**	**133**	**142**	**151**	**162**	**173**	**184**	**195**
9	**107**	**117**	**127**	**137**	**147**	**157**	**167**	**177**	**187**	**197**
10	**106**	**116**	**126**	**136**	**146**	**156**	**166**	**176**	**186**	**196**
11	**105**	**115**	**125**	**135**	**145**	**155**	**165**	**175**	**185**	**195**
12	**104**	**114**	**124**	**134**	**144**	**154**	**164**	**174**	**184**	**194**
13	**103**	**113**	**123**	**133**	**143**	**153**	**163**	**173**	**183**	**193**
14	**102**	**112**	**122**	**132**	**142**	**152**	**162**	**172**	**182**	**192**
15	**101**	**111**	**121**	**131**	**141**	**151**	**161**	**171**	**181**	**191**
16	**104**	**113**	**122**	**131**	**142**	**153**	**164**	**175**	**186**	**197**
17	**103**	**112**	**121**	**132**	**143**	**154**	**165**	**176**	**187**	**198**
18	**102**	**111**	**122**	**133**	**144**	**155**	**166**	**177**	**188**	**199**
19	**110**	**119**	**128**	**137**	**146**	**155**	**164**	**173**	**182**	**191**
20	**109**	**118**	**127**	**136**	**145**	**154**	**163**	**172**	**181**	**192**
21	**108**	**117**	**126**	**135**	**144**	**153**	**162**	**171**	**182**	**193**
22	**107**	**116**	**125**	**134**	**143**	**152**	**161**	**172**	**183**	**194**
23	**108**	**118**	**128**	**138**	**148**	**158**	**168**	**178**	**188**	**198**
24	**105**	**114**	**123**	**132**	**141**	**152**	**163**	**174**	**185**	**196**
25	**104**	**115**	**126**	**137**	**148**	**159**	**170**	**179**	**188**	**197**
26	**103**	**114**	**125**	**136**	**147**	**158**	**169**	**180**	**189**	**198**
27	**102**	**113**	**124**	**135**	**146**	**157**	**168**	**179**	**190**	**199**
28	**101**	**112**	**123**	**134**	**145**	**156**	**167**	**178**	**189**	**200**
29	**109**	**120**	**129**	**138**	**147**	**156**	**165**	**174**	**183**	**192**
30	**108**	**119**	**130**	**139**	**148**	**157**	**166**	**175**	**184**	**193**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. Цели и задачи дисциплины, её место в учебном процессе………..**2**

2. Содержание и структура дисциплины……………………….......**3**

3. Рекомендуемая литература…………………..……………..**7**

4. Методические указания по изучению дисциплины…...………......**8**

5. Материалы для контроля знаний студентов……………......…..…**9**
5.1 Задания для контрольной работы……………………...……....**9**
5.2 Вопросы к экзамену…………………………………...…………**23**

6. Приложения…………………………………………...……..**28**
6.1 Образец решения контрольных задач типового варианта……......**28**
6.2 Краткие теоретические сведения…………………………............**71**
6.3 Основные математические формулы……………….…………..**116**
6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой…………..…**118**
6.5 Таблица номеров выполняемых заданий…………………...........**119**