УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 149, кн. 4 Физико-математические науки *2007*

УДК 517.934

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ВТОРОГО РОДА С ОБРАТНО СИЛЬНО МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

И.Н. Исмагилов, И.Б. Бадриев

Аннотация

В работе проведено исследование сходимости итерационного метода решения вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких функционалов, каждый из которых представляется в виде суперпозиции полунепрерывного снизу выпуклого собственного функционала и линейного непрерывного оператора. Подобные неравенства возникают, в частности, при математическом моделировании стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации с предельным градиентом.

Введение

В работе проведено исследование сходимости итерационного метода решения вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором [1] в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких функционалов, каждый из которых представляется в виде суперпозиции полунепрерывного снизу выпуклого собственного функционала и линейного непрерывного оператора. Подобные неравенства возникают, в частности, при математическом моделировании стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному анизотропному многозначному закону фильтрации с предельным градиентом (см., например, [2, 3]).

Для решения подобных вариационных неравенств в работах [4–6] предложены итерационные методы расщепления. Основную трудность при этом представляет решение возникающих на каждой итерации задач минимизации. В случае задач фильтрации с изотропным законом эту задачу удалось решить в явном виде (см. [7]) благодаря тому, что можно эффективно вычислить субдифференциал функционала, сопряженного к минимизируемому. В случае же анизотропного закона фильтрации, когда минимизируемый функционал является суммой нескольких функционалов, вычисление сопряженного функционала представляет из себя сложную задачу. В настоящей работе предложен алгоритм расщепления, позволяющий обойти указанную выше трудность. Исследована сходимость метода. Доказательство сходимости итерационного метода удалось провести благодаря записи его в виде метода последовательных приближений для отыскания неподвижной точки оператора перехода итерационного процесса. Получены соотношения, связывающие решение исходной задачи с неподвижной точки оператора перехода, получены условия непустоты множества неподвижных точек. Для оператора перехода доказано неравенство более сильное, чем неравенство нерастягиваемости, что и позволило получить результат о слабой сходимости итерационной последовательности. Использовались также результаты о сходимости метода последовательных приближений для определения неподвижных точек асимптотически регулярных операторов (см. [8]).

1. Постановка задачи

Пусть $V,\ H$ – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$ и $(\cdot,\cdot)_H$ соответственно, $A_0 : V \to V$ – обратно сильно монотонный оператор с постоянной $\sigma_0 > 0$ (см. [1]):

$$(A_0 u - A_0 \eta, u - \eta)_V \geq \sigma_0 \, \|A_0 u - A_0 \eta\|_V^2, \quad \sigma_0 > 0 \quad \forall\, u, \eta \in V, \tag{1}$$

$B_i : V \to H,\ i = 1, 2, \ldots, m,$ – линейные, непрерывные операторы, $G_i : H \to R^1$, $i = 1, 2, \ldots, m,$ – полунепрерывные снизу, выпуклые, собственные функционалы, $f \in V$ – заданный элемент.

Рассматривается задача поиска вектора $u \in V$, являющегося решением следующего вариационного неравенства второго рода

$$(A_0 u - f, \eta - u)_V + \sum_{i=1}^{m} G_i\big(B_i \eta\big) - \sum_{i=1}^{m} G_i\big(B_i u\big) \geq 0 \quad \forall\, \eta \in V. \tag{2}$$

Оператор A_0, очевидно, является монотонным, а также липшиц-непрерывным с константой $1/\sigma_0$, функционалы $F_i = G_i \circ B_i : V \to R^1$, $i = 1, 2, \ldots, m,$ – полунепрерывными снизу, выпуклыми, собственными. Функционал $F = \sum\limits_{i=1}^{m} F_i$ также является полунепрерывным снизу, выпуклым и собственным. Поэтому при дополнительном предположении о коэрцитивности оператора A_0 вариационное неравенство (2) имеет непустое, выпуклое, замкнутое множество решений (см., например, [9, 10]).

2. Итерационный метод

В дальнейшем будем рассматривать абстрактное вариационное неравенство (2), считая, что $B_i : V \to H$ – линейные, непрерывные операторы, $G_i : H \to R^1$ – выпуклые, липшиц-непрерывные функционалы, $i = 1, 2, \ldots, m$. Кроме того, будем предполагать, что выполняется равенство

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (B_i u, B_i \eta)_H = (u, \eta)_V \quad \forall\, u,\, \eta \in V. \tag{3}$$

Для решения вариационного неравенства (2) по аналогии с [5] рассмотрим следующий итерационный процесс.

Пусть $u^{(0)} \in V,\ y_i^{(0)} \in H,\ \lambda_i^{(0)} \in H,\ i = 0, 1, \ldots, m,$ – произвольные элементы. Для $k = 0, 1, 2, \ldots,$ зная $y_i^{(k)}$, $\mu_i^{(k)}$, определим $u^{(k+1)}$ как

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau \Big[A_0 u^{(k)} - f + r \sum_{i=1}^{m} B_i^* B_i\, u^{(k)} + \sum_{i=1}^{m} B_i^* \Big(\lambda_i^{(k)} - r\, y_i^{(k)} \Big) \Big]. \tag{4}$$

Затем находим $y_i^{(k+1)}$, решая задачи минимизации

$$\begin{aligned} r\, \big(y_i^{(k+1)},\, z_i - y_i^{(k+1)} \big)_H + G_i(z_i) - G_i\big(y_i^{(k+1)}\big) \geq \\ \geq \big(r\, B_i u^{(k+1)} + \lambda_i^{(k)},\, z_i - y_i^{(k+1)} \big)_H \quad \forall\, z_i \in H, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{5}$$

Наконец, вычисляем $\lambda_i^{(k+1)}$ по формуле

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} + r\Big[\, B_i u^{(k+1)} - y_i^{(k+1)} \Big], \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Здесь $\tau > 0$ и $r > 0$ – итерационные параметры, $B_i^* : H \to V$ – сопряженные к B_i операторы:

$$(B_i^* y_i, \eta)_V = (y_i, B_i \eta)_H \quad \forall\, \eta \in V,\ y_i \in H. \tag{7}$$

Для исследования сходимости описанного итерационного процесса выпишем явный вид оператора перехода этого процесса.

Обозначим через H^m прямое произведение m пространств H и введем в рассмотрение оператор $T : V \times H^m \times H^m \to V \times H^m \times H^m$, ставящий в соответствие вектору $q = (q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{2m}) = (u, y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, элементы $Tq = \big\{\, T_0 q, T_1 q, \ldots, T_{2m} q \,\big\}$ следующим образом:

$$T_0 q = q_0 - \tau\Big[\, A_0 q_0 - f + r \sum_{i=1}^{m} B_i^* B_i\, q_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i^* \big(q_{m+i} - r\, q_i \,\big) \Big], \tag{8}$$

$$T_i q = \operatorname{Prox}_{G_i/r}\Big(\, B_i\, T_0 q + \frac{1}{r}\, q_i \Big), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

$$T_{m+i} q = q_{m+i} + r\, \big[\, B_i\, T_0 q - T_i q \big], \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Здесь $\operatorname{Prox}_G : Z \to Z$ – проксимальное отображение, сопоставляющее каждому элементу p из гильбертова пространства Z элемент $v = \operatorname{Prox}_G(p)$, являющийся решением задачи минимизации

$$\frac{1}{2}\, \|\, v - p \,\|_Z^2 + G(v) = \min_{z \in Z} \Big\{\, \frac{1}{2}\, \|\, z - p \,\|_Z^2 + G(z) \Big\},$$

которая эквивалентна в случае, когда G – выпуклый, собственный, полунепрерывный снизу функционал, вариационному неравенству

$$(v - p, z - v)_Z + G(z) - G(v) \ge 0 \quad \forall\, z \in Z. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что проксимальное отображение является жестко нерастягивающим, то есть

$$\Big\|\, \operatorname{Prox}_G(p) - \operatorname{Prox}_G(z) \,\Big\|_Z^2 \le \Big(\, \operatorname{Prox}_G(p) - \operatorname{Prox}_G(z),\, p - z \Big)_Z \quad \forall\, p, z \in Z.$$

Используя определение проксимального отображения в виде вариационного неравенства (11), легко установить, что итерационный процесс (4)–(6) может быть записан в следующем виде:

$$\begin{cases} q_0 - \text{ произвольный элемент}, \\ q^{(k+1)} = T q^{(k)}, \\ q^{(k)} = \Big(u^{(k)}, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_m^{(k)}, \lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_m^{(k)} \Big),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{12}$$

то есть T – оператор перехода этого итерационного процесса.

Справедливы

Теорема 1. *Точка* $q = (u, B_1u, B_2u, \ldots, B_mu, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ *является неподвижной точкой оператора* T *в том и только в том случае, когда выполнены условия*

$$y_i = B_iu, \tag{13}$$

$$\lambda_i \in \partial G_i(B_iu), \tag{14}$$

$$-\sum_{i=1}^{m} B_i^*\lambda_i = A_0u - f, \quad i = 1, 2 \ldots, m. \tag{15}$$

При этом первая компонента u *любой неподвижной точки оператора* T *является решением задачи* (2).

Доказательство. Пусть $q = (u, B_1u, B_2u, \ldots, B_mu, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ является неподвижной точкой оператора T:

$$u = u - \tau\Big[A_0u - f + r\sum_{i=1}^{m} B_i^*B_iu - \sum_{i=1}^{m} B_i^*\big(\lambda_i - r\,y_i\big)\Big], \tag{16}$$

$$y_i = \operatorname{Prox}_{G_i/r}\left(B_iu + \frac{\lambda_i}{r}\right), \quad i = 1, 2 \ldots, m, \tag{17}$$

$$\lambda_i = \lambda_i + r\,(B_iu - y_i)\,, \quad i = 1, 2 \ldots, m. \tag{18}$$

Равенства (18) эквивалентны (13), ибо $r > 0$. Равенства (17) эквивалентны с учетом (13) неравенствам

$$\Big(-\frac{\lambda_i}{r},\, z_i - B_iu\Big)_H + \frac{1}{r}\Big[G_i(z_i) - G_i\,(B_iu)\Big] \geq 0 \quad \forall\, z_i \in H, \quad i = 1, 2 \ldots, m, \tag{19}$$

которые эквивалентны соотношениям $\lambda_i \in \partial G_i\big(B_iu\big)$, то есть включениям (14).

Также в силу (13) равенство (16) эквивалентно равенству (15)

$$A_0u - f + \sum_{i=1}^{m} B_i^*\lambda_i = 0,$$

или

$$-\sum_{i=1}^{m} B_i^*\lambda_i = A_0u - f, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{20}$$

Таким образом, установлена эквивалентность равенства $Tq = q$ соотношениям (13)–(15).

Проверим, что u – решение задачи (2). С этой целью, в неравенствах (19) положим $z_i = B_i\eta$, где η – произвольный элемент из V. Тогда, с учетом (7), сложив эти неравенства по $i = 1, 2, \ldots, m$, получим

$$-\Big(\sum_{i=1}^{m} B_i^*\mu_i,\, \eta - u\Big)_V + \sum_{i=1}^{m}\Big[G_i(B_i\eta) - G_i(B_iu)\Big] \geq 0 \quad \forall\, \eta \in V. \tag{21}$$

Складывая (20) и (21), получим, что u – решение задачи (2). □

Теорема 2. *Пусть существует по крайней мере одно решение задачи* (2). *Тогда множество неподвижных точек оператора* T *не пусто.*

Доказательство. Пусть u – решение задачи (2), $y_i = B_i u, \quad i = 1, 2 \ldots, m$. Вариационное неравенство (2) эквивалентно следующему включению:

$$f - A_0 u \in \partial\Big(\sum_{i=1}^{m} G_i \circ B_i\Big)(u). \tag{22}$$

Из предложений 5.6, 5.7 [10] следует, что

$$\partial\Big(\sum_{i=1}^{m} G_i \circ B_i\Big)(u) = \sum_{i=1}^{m} \partial\big(G_i \circ B_i\big)(u) = \sum_{i=1}^{m} B_i^* \partial G_i\big(B_i u\big). \tag{23}$$

Из равенства (23) и соотношения (22) следует, что существуют такие элементы $z_i \in \partial G_i\big(B_i u\big)$, для которых справедливо равенство

$$-\sum_{i=1}^{m} B_i^* z_i = A_0 u - f.$$

Поэтому для точки $q = (\, u, y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\,)$ имеют место соотношения (13)–(15), а значит, в силу теоремы 1 q – неподвижная точка оператора T. □

3. Сходимость итерационного метода

Из теоремы 1 следует, что исследование сходимости итерационного процесса (4)–(6) сводится к исследованию сходимости метода последовательных приближений отыскания неподвижной точки оператора T.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $Q = V \times H^m \times H^m$ со скалярным произведением

$$(\cdot,\cdot)_Q = \frac{(1 - m\tau\, r)}{\tau}\, (\cdot,\cdot)_V + r\, \sum_{i=1}^{m} (\cdot,\cdot)_H + \frac{1}{\tau}\, \sum_{i=1}^{m} (\cdot,\cdot)_H .$$

Для исследования сходимости итерационного процесса (12) нам потребуется следующая

Теорема 3. *Пусть $A_0 : V \to V$ – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma_0 > 0$ и выполнено условие:*

$$0 < \tau < \frac{2\,\sigma_0}{2\, m\, \sigma_0\, r + 1}. \tag{24}$$

Тогда оператор T, определяемый соотношениями (8)–(10), *является нерастягивающим.*

Более того, для любых $p, q \in Q$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\|\, Tq - Tp\,\|_Q^2 + \delta\,(A_0 q_0 - A_0 p_0, q_0 - p_0)_V + \\ &\quad + \frac{1}{\tau\,(1 - m\,\tau r)}\, \|(1 - \tau r)\big(q_0 - T_0 q - (p_0 - T_0 p)\big) - \tau(A_0 q_0 - A_0 p_0)\|_V^2 + \\ &\quad\quad + r \sum_{i=1}^{m} \Big\|\, q_i - B_i T_0 q - \big(p_i - B_i T_0 p\big)\, \Big\|_H^2 \le \|\, q - p\,\|_Q^2, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\delta = 2 - \tau/\big(\sigma_0(1 - m\,\tau r)\big)$.

Доказательство. По условию теоремы A_0 – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma_0 > 0$, то есть выполнено (1).

В силу условия (24) выполнены неравенства $\tau r < 1/m$ и $\delta > 0$, а значит, из (25) и (1) будет следовать нерастягиваемость оператора T.

Докажем неравенство (25). С учетом (3) перепишем равенство (8) в виде

$$T_0 q = (1 - m\,\tau r)\, q_0 - \tau A_0 q_0 + \tau f - \tau \sum_{i=1}^{m} B_i^*(q_{m+i} - r q_i) = S q_0 - \tau \sum_{i=1}^{m} B_i^*(q_{m+i} - r q_i),$$

где оператор $S : V \to V$ определяется соотношением

$$S q_0 = (1 - m\,\tau r) q_0 - \tau A_0 q_0 + \tau\, f.$$

Используя (1), получаем

$$\begin{aligned} \| S q_0 - S p_0 \|_V^2 &= (1 - m\,\tau r)^2 \| q_0 - p_0 \|_V^2 - 2\tau (1 - m\,\tau r) \left(A_0 q_0 - A_0 p_0,\, q_0 - p_0 \right)_V + \\ &+ \tau^2 \| A_0 q_0 - A_0 p_0 \|_V^2 \le (1 - m\,\tau r)^2 \| q_0 - p_0 \|_V^2 - \\ &- \tau \left[2\,(1 - m\,\tau\, r) - \frac{\tau}{\sigma_0} \right] \left(A_0 q_0 - A_0 p_0,\, q_0 - p_0 \right)_V. \end{aligned} \qquad (26)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \| T_0 q - T_0 p \|_V^2 &= \Big(T_0 q - T_0 p, S q_0 - S p_0 - \tau \sum_{i=1}^{m} B_i^* \left(q_{m+i} - p_{m+i} - r(q_i - p_i) \right) \Big)_V = \\ &= \left(T_0 q - T_0 p, S q_0 - S p_0 \right)_V - \tau \Big(T_0 q - T_0 p, \sum_{i=1}^{m} B_i^* \left(q_{m+i} - p_{m+i} - r(q_i - p_i) \right) \Big)_V. \end{aligned} \qquad (27)$$

Для произвольного числа ε имеем равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \| a - \varepsilon b \|_V^2 &= \frac{1}{2\varepsilon} \left[\| a \|_V^2 - 2\,\varepsilon\,(a,\, b)_V + \varepsilon^2 \| b \|_V^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \| a \|_V^2 - (a,\, b)_V + \frac{\varepsilon}{2} \| b \|_V^2, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$(a,\, b)_V = \frac{1}{2\varepsilon} \| a \|_V^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \| a - \varepsilon\, b \|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| b \|_V^2. \qquad (28)$$

Используя равенство (28) с $a = S q_0 - S p_0$, $b = T_0 q - T_0 p$, преобразуем (27):

$$\begin{aligned} \| T_0 q - T_0 p \|_V^2 &= \frac{1}{2\varepsilon} \| S q_0 - S p_0 \|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| T_0 q - T_0 p \|_V^2 - \\ - \frac{1}{2\varepsilon} \| (S q_0 - S p_0) - \varepsilon\, (T_0 q - T_0 p) \|_V^2 &- \tau \Big(T_0 q - T_0 p, \sum_{i=1}^{m} B_i^* \Big(q_{m+i} - p_{m+i} - r(q_i - p_i) \Big) \Big)_V. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (26) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|T_0q - T_0p\|_V^2 &\le \frac{1}{2\varepsilon}(1 - m\tau r)^2\,\|q_0 - p_0\|_V^2 - \\ &- \frac{\tau}{2\varepsilon}\left[2(1 - m\tau r) - \frac{\tau}{\sigma_0}\right](A_0q_0 - A_0p_0,\, q_0 - p_0)_V + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}\|T_0q - T_0p\|_V^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|(Sq_0 - Sp_0) - \varepsilon(T_0q - T_0p)\|_V^2 - \\ &- \tau\Big(T_0q - T_0p,\, \sum_{i=1}^m B_i^*(q_{m+i} - p_{m+i} - r(q_i - p_i))\Big)_V.\end{aligned}$$

После умножения получившегося неравенства на $2/\tau$ имеем

$$\begin{aligned}&\frac{2-\varepsilon}{\tau}\|T_0q - T_0p\|_V^2 + \frac{1}{\tau\varepsilon}\|(Sq_0 - Sp_0) - \varepsilon(T_0q - T_0p)\|_V^2 \le \\ &\le \frac{(1 - m\tau r)^2}{\tau\varepsilon}\|q_0 - p_0\|_V^2 - \frac{1}{\varepsilon}\left[2(1 - m\tau r) - \frac{\tau}{\sigma_0}\right](A_0q_0 - A_0p_0, q_0 - p_0)_V - \\ &- 2\Big(T_0q - T_0p, \sum_{i=1}^m B_i^*(q_{m+i} - p_{m+i} - r(q_i - p_i))\Big)_V.\end{aligned}$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon = 1 - m\tau r$, на основании определения оператора S получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau(1 - m\tau r)}\|(1 - m\tau r)[(q_0 - T_0q) - (p_0 - T_0p)] - \tau(A_0q_0 - A_0p_0)\|_V^2 + \\ &+ \frac{(1 + m\tau r)}{\tau}\|T_0q - T_0p\|_V^2 \le \frac{(1 - m\tau r)}{\tau}\|q_0 - p_0\|_V^2 - \delta(A_0q_0 - A_0p_0,\, q_0 - p_0)_V - \\ &- 2\sum_{i=1}^m\Big(T_0q - T_0p, B_i^*(q_{m+i} - p_{m+i} - r(q_i - p_i))\Big)_V = \\ &= \frac{(1 - m\tau r)}{\tau}\|q_0 - p_0\|_V^2 - \delta(A_0q_0 - A_0p_0,\, q_0 - p_0)_V - \\ &- 2\Big(\sum_{i=1}^m B_i(T_0q - T_0p),\, q_{m+i} - p_{m+i}\Big)_H + 2r\Big(\sum_{i=1}^m B_i(T_0q - T_0p),\, q_i - p_i\Big)_H.\end{aligned} \tag{29}$$

Применяя равенство (28) с $\varepsilon = 1$, $a = q_i - p_i$, $b = B_i(T_0q - T_0p)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, преобразуем (29) к следующему виду:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau(1 - m\tau r)}\|(1 - m\tau r)[(q_0 - T_0q) - (p_0 - T_0p)] - \tau(A_0q_0 - A_0p_0)\|_V^2 + \\ &+ r\sum_{i=1}^m\Big\|(q_i - B_iT_0q) - (p_i - B_iT_0p)\Big\|_H^2 + \delta(A_0q_0 - A_0p_0,\, q_0 - p_0)_V + \\ &+ \frac{(1 + m\tau r)}{\tau}\|T_0q - T_0p\|_V^2 \le; \frac{(1 - m\tau r)}{\tau}\|q_0 - p_0\|_V^2 + r\sum_{i=1}^m\|q_i - p_i\|_H^2 - \\ &- 2\sum_{i=1}^m\Big(B_i(T_0q - T_0p),\, q_{m+i} - p_{m+i}\Big)_H + r\sum_{i=1}^m\Big\|B_i(T_0q - T_0p)\Big\|_H^2.\end{aligned} \tag{30}$$

Далее, из (9) с учетом жесткой нерастягиваемости проксимального отображения для $i = 1, 2, \ldots, m$ имеем, что

$$\|T_iq - T_ip\|_H^2 \le \Big(B_iT_0q + \frac{1}{r}q_{m+i} - B_iT_0p - \frac{1}{r}p_{m+i},\, T_iq - T_ip\Big)_H,$$

откуда после умножения на $2\,r$ получаем

$$2\,r\,\big\|\,T_i\,q-T_i\,p\,\big\|_H^2\le 2\,r\,\big(\,B_i(\,T_0q-T_0p\,),\,T_i\,q\,-\,T_i\,p\,\big)_H+ \\ +\,2\,\big(\,q_{m+i}-p_{m+i},\,T_i\,q\,-\,T_i\,p\,\big)_H. \quad (31)$$

Из (10) для $i=1,2,\ldots,m$ следуют соотношения

$$\frac{1}{r}\,\big\|\,T_{m+i}q-T_{m+i}p\,\big\|_H^2=\frac{1}{r}\,\big\|\,q_{m+i}-p_{m+i}\,\big\|_H^2+r\,\big\|\,B_i\,(T_0q-T_0p)\,\big\|_H^2+ \\ +\,r\,\big\|\,T_i\,q-T_i\,p\,\big\|_H^2+\,2\,\big(\,B_i(\,T_0q-T_0p\,),\,q_{m+i}-p_{m+i}\,\big)_H- \\ -\,2\,\big(\,q_{m+i}-p_{m+i},\,T_i\,q-T_i\,p\,\big)_H-\,2\,r\,\big(B_i(\,T_0q-T_0p\,),\,T_i\,q-T_i\,p\,\big)_H. \quad (32)$$

Просуммируем соотношения (31) и (32) по $i=1,2,\ldots,m$, а затем эти результаты сложим с (30):

$$\frac{(1+m\,\tau\,r)}{\tau}\,\big\|\,T_0q-T_0p\,\big\|_V^2+2\,r\sum_{i=1}^{m}\big\|\,T_i\,q-T_i\,p\,\big\|_H^2+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\big\|\,T_{m+i}\,q-T_{m+i}\,p\,\big\|_H^2+ \\ +\,\frac{1}{\tau\,(1-m\,\tau\,r)}\,\big\|\,(1-m\,\tau\,r)\big[\,(q_0-T_0q)-(p_0-T_0p)\,\big]-\tau\,(A_0q_0-A_0p_0\,)\,\big\|_V^2+ \\ +\,r\sum_{i=1}^{m}\Big\|\,\big(q_i-B_i\,T_0q\,\big)-\big(p_i-B_i\,T_0p\,\big)\,\Big\|_H^2+\delta\,\big(\,A_0q_0-A_0p_0\,,\,q_0-p_0\,\big)_V\le \\ \le\,\frac{(1-m\,\tau\,r)}{\tau}\,\big\|\,q_0-p_0\,\big\|_V^2+r\sum_{i=1}^{m}\big\|\,q_i-p_i\,\big\|_H^2+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\big\|\,q_{m+i}-p_{m+i}\,\big\|_H^2+ \\ +\,r\sum_{i=1}^{m}\Big\|B_i\big(\,T_0q-T_0p\,\big)\,\Big\|_H^2+r\sum_{i=1}^{m}\Big\|\,B_i\big(\,T_0q-T_0p\,\big)\,\Big\|_H^2+r\sum_{i=1}^{m}\Big\|\,T_i\,q-T_i\,p\,\Big\|_H^2- \\ -\,2\sum_{i=1}^{m}\Big(B_i(\,T_0q-T_0p\,),\,q_{m+i}-p_{m+i}\Big)_H+2\sum_{i=1}^{m}\Big(B_i(\,T_0q-T_0p\,),\,q_{m+i}-p_{m+i}\Big)_H. \quad (33)$$

Учитывая при этом, что в силу условия (3)

$$\sum_{i=1}^{m}\big\|B_i\big(\,T_0q-T_0p\big)\,\big\|_H^2=m\,\big\|\,T_0q-T_0p\,\big\|_V^2,$$

после несложных преобразований неравенство (33) преобразуем к виду

$$\frac{(1-m\,\tau\,r)}{\tau}\,\big\|\,T_0q-T_0p\,\big\|_V^2+r\sum_{i=1}^{m}\big\|\,T_i\,q-T_i\,p\,\big\|_H^2+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\big\|\,T_{m+i}\,q-T_{m+i}\,p\,\big\|_H^2+ \\ +\,\frac{1}{(1-m\,\tau\,r)}\,\big\|\,(1-m\,\tau\,r)\,\big[\,(q_0-T_0q\,)-(p_0-T_0p\,)\,\big]-\tau(A_0q_0-A_0p_0\,)\,\big\|_V^2+ \\ +\,r\sum_{i=1}^{m}\Big\|\,\big(\,q_i-B_i\,T_0q\,\big)-\big(p_i-B_i\,T_0p\,\big)\,\Big\|_H^2+\delta\,\big(\,A_0q_0-A_0p_0,\,q_0-p_0\,\big)_V\le \\ \le\,\frac{(1-m\,\tau\,r)}{\tau}\,\big\|\,q_0-p_0\,\big\|_V^2+r\sum_{i=1}^{m}\big\|\,q_i-p_i\,\big\|_H^2+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\big\|\,q_{m+i}-p_{m+i}\,\big\|_H^2,$$

то есть неравенство (25) справедливо. Теорема доказана. □

Напомним (см. [8]), что оператор $T : Q \to Q$ называется асимптотически регулярным, если $T^{k+1}q - T^k q \to 0$ при $k \to +\infty$ для любого $q \in Q$.

Справедлива

Теорема 4. *Пусть $A_0 : V \to V$ – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma_0 > 0$, выполнены условия* (1), (24), *задача* (2) *имеет по крайней мере одно решение, итерационная последовательность $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, построенная по формуле $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, $q^{(0)} \in Q$ – произвольно заданный элемент. Тогда эта последовательность сходится слабо в Q при $k \to +\infty$, ее предел q^* является неподвижной точкой оператора T и справедливы равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| y_i^{(k)} - B_i\, u^{(k)} \right\|_H = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{34}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \right\|_Q = 0. \tag{35}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (25), положив в нем $q = q^{(k)}$ и считая p неподвижной точкой оператора T (в силу теоремы 2 существует хотя бы одна такая точка). Учитывая, что по определению итерационной последовательности $Tq^{(k)} = q^{(k+1)}$, а для неподвижной точки согласно теореме 1 выполнены равенства $p_i - B_i\, T_0 p = p_i - B_i\, p_0 = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $p_0 - T_0 p = 0$, получаем

$$\begin{gathered}
\| \, q^{(k+1)} - p \, \|_Q^2 + \delta \left(A_0 u^{(k)} - A_0 p_0, u^{(k)} - p_0 \right)_V + \\
+ \frac{1}{\tau\,(1 - m\tau r)} \, \| \, (1 - m\,\tau\, r)\big(u^{(k)} - u^{(k+1)}\big) - \tau \left(A_0 u^{(k)} - A_0 p_0 \right) \|_V^2 + \\
+ r \sum_{i=1}^{m} \| \, y_i^{(k)} - B_i u^{(k+1)} \, \|_H^2 \le \| \, q^{(k)} - p \, \|_Q^2 .
\end{gathered} \tag{36}$$

Из неравенства (36) следует, что ограниченная снизу (нулем) числовая последовательность $\left\{ \| \, q^{(k)} - p \, \|_Q \right\}_{k=0}^{+\infty}$ не возрастает, и следовательно, имеет конечный предел:

$$\lim_{k\to+\infty} \| \, q^{(k)} - p \, \|_Q = \lambda_p,$$

и значит, выполнены соотношения:

$$\lim_{k\to+\infty} \left(A_0 u^{(k)} - A_0 p_0, \, u^{(k)} - p_0 \right)_V = 0, \tag{37}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \| \, (1 - m\,\tau\, r) \left(u^{(k)} - u^{(k+1)} \right) - \tau \left(A_0 u^{(k)} - A_0 p_0 \right) \|_V^2 = 0, \tag{38}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \| \, y_i^{(k)} - B_i u^{(k+1)} \, \|_H = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{39}$$

Используя (37) и (1), получаем

$$\lim_{k\to+\infty} \| \, A_0 u^{(k)} - A_0 p_0 \, \|_V = 0. \tag{40}$$

Из (38) и (40) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \| \, u^{(k)} - u^{(k+1)} \, \|_V = 0. \tag{41}$$

Далее, используя (39), (41), (3) и неравенства

$$\| \, y_i^{(k)} - B_i u^{(k)} \, \|_H \le \| \, y_i^{(k)} - B_i\, u^{(k+1)} \, \|_H + \| \, B_i\, u^{(k)} - u^{(k+1)} \, \|_H , \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

получаем соотношения (34), из которых с учетом условия (41) и равенств

$$y_i^{(k)} - y_i^{(k+1)} = \big(\, y_i^{(k)} - B_i\, u^{(k)}\,\big) + \big(\, B_i\, u^{(k)} - B_i\, u^{(k+1)}\,\big) + \\ + \big(\, B_i\, u^{(k+1)} - y_i^{(k+1)}\,\big), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \|\, y_i^{(k)} - y_i^{(k+1)}\,\|_H = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{42}$$

Наконец, используя (10) и (34), имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \|\, \lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}\,\|_H = r \lim_{k\to+\infty} \|\, B_i\, u^{(k)} - y_i^{(k)}\,\|_H = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{43}$$

Равенства (41)–(43) означают, что условие (35) выполнено, и, поскольку $q^{(0)} \in$ $\in Q$ – произвольный заданный элемент, то оператор T является асимптотически регулярным. Кроме того, оператор T является нерастягивающим, и поэтому итерационная последовательность $\big\{q^{(k)}\big\}_{k=0}^{+\infty}$ сходится слабо в Q при $k \to +\infty$ и ее предел q^* является неподвижной точкой оператора T. Теорема доказана. □

Отметим, что если выполнены условия теоремы 1, то из теорем 2, 4 вытекает, что последовательности $\big\{u^{(k)}\big\}_{k=0}^{+\infty}$, $\big\{y_i^{(k)}\big\}_{k=0}^{+\infty}$, построенные согласно (4)–(6), при $k \to +\infty$ сходятся слабо к u в V и к $B_i u$ в H, $i = 1, 2, \ldots, m$, соответственно, где u – решение вариационного неравенства (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00633-а).

Summary

I.N. Ismagilov, I.B. Badriev. On the convergence of iterative method for solving a variational inequality of the second kind with inversely strongly monotone operator.

In the paper the convergence of the iterative method for solving a variational inequality of the second kind with inversely strongly monotone operator in Hilbert space is investigated. The functional occurring in this variational inequality is a sum of several functionals. Each of these functionals is a superposition of lower semi-continuous convex proper functional and a linear continuous operator. Such variational inequalities arise, in particular, during mathematical modeling of stationary problems of filtration of a non-compressible fluid follows the nonlinear multi-valued anisotropic filtration law with limiting gradient.

Литература

1. *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.* Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

2. *Бадриев И.Б., Исмагилов И.Н.* Исследование некоторых нелинейных краевых задач с вырождением по градиенту // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 6-го Всерос. семинара. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. – С. 50–53.

3. *Бадриев И.Б., Исмагилов И.Н.* Математическое моделирование стационарных анизотропных задач теории фильтрации с многозначным законом // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. – 2007. – № 1. – С. 3–8.

4. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами// Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.

5. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Методы декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 888–895.

6. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.

7. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н.* Применение метода декомпозиции для численного решения некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации // Исслед. по прикл. матем. и информ. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 12–24.

8. *Browder F.E., Petrushin W.V.* The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces // Bull. American. Math. Soc. – 1996. – V. 72. – P. 571–575.

9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

10. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.

Поступила в редакцию
01.10.07

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Ildar.Badriev@ksu.ru*

Исмагилов Ирек Наилевич – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Irek.Ismagilov@mail.ru*