Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, № 8, с. 23–33 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0080*

М.Ю. КОКУРИН

МЕТОД ТОЧНОГО ШТРАФА ДЛЯ МОНОТОННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПОРЯДКУ АЛГОРИТМЫ ПОИСКА СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК

Аннотация. Для вариационных неравенств в банаховом пространстве обосновывается способ снятия функциональных ограничений при помощи точного штрафа. Результат применяется при построении оптимальных по трудоемкости итерационных схем поиска седловых точек при наличии функциональных ограничений.

Ключевые слова: вариационное неравенство, монотонный оператор, банахово пространство, точный штраф, седловая точка, трудоемкость.

УДК: 517.988

Abstract. We consider variational inequalities in a Banach space. We propose an exact penalty method which enables one to refuse functional constraints. The obtained result is used for constructing optimal (in laboriousness) iterative schemes for finding saddle points under functional constraints.

Keywords: variational inequality, monotone operator, Banach space, exact penalty, saddle point, laboriousness.

1. Объектом исследования в работе являются вариационные неравенства (ВН) вида

$$x \in Q : \langle F(x),\, x - z\rangle \le 0 \quad \forall z \in Q. \tag{1}$$

Здесь Q — выпуклое замкнутое множество из вещественного рефлексивного банахова пространства X, $F : D_F \subset X \to 2^{X^*}$ — монотонное точечно-множественное отображение в сопряженное пространство X^*. Предполагается, что $Q \subset \operatorname{int} D_F$. Монотонность отображения F по определению означает, что

$$\langle f(x_1) - f(x_2),\, x_1 - x_2\rangle \ge 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in D_F; \quad f(x_1) \in F(x_1), \quad f(x_2) \in F(x_2). \tag{2}$$

Здесь и далее $\langle f, x\rangle$ есть значение функционала $f \in X^*$ на элементе $x \in X$. Если пространство X гильбертово, то X^* канонически отождествляется с X, и через $\langle f, x\rangle$ будем обозначать скалярное произведение элементов $f, x \in X$. Дополнительно будем предполагать, что F — максимально монотонное отображение, т. е. его график не является собственной частью графика никакого монотонного отображения. Важнейшими примерами таких отображений

Поступила 07.05.2010

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 09-01-00273а.

являются определенные на всем X однозначные хеминепрерывные монотонные операторы ([1], с. 64), а также субдифференциальные отображения, порожденные собственными выпуклыми и выпукло-вогнутыми функционалами ([2], сс. 149, 153).

Под решением ВН (1) понимается такая точка $x_* \in Q$, что для некоторого элемента $f(x_*) \in F(x_*)$ выполняется соотношение

$$\langle f(x_*),\, x_* - z\rangle \le 0 \quad \forall z \in Q. \tag{3}$$

В дальнейшем считаем, что множество Q имеет вид

$$Q = Q_0 \cap Q_1, \quad Q_1 = \bigl\{x \in X : \varphi_j(x) \le 0,\ j \in J = \{1, 2, \dots, m\}\bigr\}, \tag{4}$$

где Q_0 — выпуклое замкнутое множество из X, φ_j, $j \in J$, — выпуклые полунепрерывные снизу функционалы. Предполагается, что

$$Q_0 \subset \operatorname{int} D_F \bigcap \bigcap_{j\in J} \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi_j.$$

Тем самым функционалы φ_j, $j \in J$, локально липшицевы и субдифференцируемы на Q_0 ([2], с. 113; [3], с. 197–198). К виду (1) приводится широкий спектр задач математической физики, оптимизации и исследования операций [1]–[6]. Среди них отметим задачу выпуклого программирования

$$\min\{\varphi_0(x) : x \in Q\} \tag{5}$$

и задачу отыскания седловой точки выпукло-вогнутого функционала.

Наличие в определении множества Q функциональных ограничений затрудняет реализацию многих итеративных методов аппроксимации x_* ([1], гл. III), требующих на каждом шаге решения тех или иных вспомогательных задач на множестве Q. В связи с этим интерес представляет сведение задачи (1), (4) к решению ВН или серии ВН, поставленных на множестве Q_0, которое в приложениях часто имеет более простую по сравнению с Q структуру. Указанное сведение может быть реализовано путем добавления к оператору F в (1) подходящего штрафного оператора, учитывающего ограничение $x \in Q_1$ [1], [5], [6]. Согласно ([1], с. 67) в качестве штрафного оператора может быть взят, например, оператор $\tau\partial\Bigl(\sum\limits_{j\in J}(\varphi_j^+(x))^p\Bigr)$, $p \ge 1$, где $\tau > 0$ — параметр штрафа, $\partial\varphi(x)$ есть субдифференциал выпуклого функционала φ в точке x, $a^+ = \max\{a, 0\}$. Если при этом исходный оператор F является однозначным хеминепрерывным и равномерно монотонным, то последовательность $\{x_\tau\}$ решений ВН со штрафом

$$x \in Q_0 : \Bigl\langle F(x) + \tau\partial\Bigl(\sum_{j\in J}(\varphi_j^+(x))^p\Bigr),\, x - z\Bigr\rangle \le 0 \quad \forall z \in Q_0 \tag{6}$$

при $\tau \to +\infty$ сильно сходится к единственному решению x_* задачи (1), (4). Равномерная монотонность F означает, что выполняется усиливающее (2) соотношение

$$\langle f(x_1) - f(x_2),\, x_1 - x_2\rangle \ge \|x_1 - x_2\|_X\,\gamma(\|x_1 - x_2\|_X) \quad \forall x_1, x_2 \in D_F, \tag{7}$$

где $f(x_1) \in F(x_1)$, $f(x_2) \in F(x_2)$, $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — строго возрастающая непрерывная на $[0,\infty)$ функция, $\gamma(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = \infty$.

В случае, когда $F(x) = \partial\varphi_0(x)$, φ_0 — выпуклый функционал, ВН (1), (4) сводится к задаче (4), (5), а ВН (6) — к задаче

$$\min\Bigl\{\varphi_0(x) + \tau\sum_{j\in J}(\varphi_j^+(x))^p : x \in Q_0\Bigr\}, \quad p \ge 1. \tag{8}$$

С другой стороны, в теории выпуклого программирования [7]–[9] установлено, что в случае $p = 1$ при выполнении условий регулярности функциональных ограничений в задаче (5) множества решений задач (5) и (8) совпадают при достаточно большом конечном $\tau > \tau^*$. В данной статье метод конечного (точного) штрафа для задач выпуклого программирования распространяется на задачи (1) с максимально монотонным отображением F. В конечномерном случае возможность такого распространения ранее отмечалась различными авторами (например, [10], [11]). Наш интерес к ВН в банаховых пространствах связан с развитием результатов из ([4], гл. VI), относящихся к конструированию оптимальных по трудоемкости итерационных методов решения выпукло-вогнутых игр в таких пространствах (п. 3–4). Следующий п. 2 посвящен строгой формулировке и обоснованию схемы снятия функциональных ограничений в (1) при помощи точного штрафа.

2. Обозначим через Q_* множество решений ВН (1). Всюду далее предполагается, что $Q_* \neq \emptyset$. Согласно (3) для любого $x_* \in Q_*$ найдется элемент $f(x_*) \in F(x_*)$ такой, что

$$\langle f(x_*),\, x_*\rangle = \min\{\langle f(x_*),\, z\rangle : z \in Q\}. \tag{9}$$

Выпишем функционал Лагранжа задачи выпуклого программирования (9)

$$L(z,\lambda) = \langle f(x_*),\, z\rangle + \sum_{j\in J} \lambda^j \varphi_j(z),$$
$$\lambda = (\lambda^j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^m_+ = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda^j \geq 0,\ j \in J\},\quad z \in Q_0,$$

и будем считать выполненным

Условие А. *Для любой точки $x_* \in Q_*$ и элемента $f(x_*)$, соответствующего x_* согласно (3), найдется вектор $\lambda_* \in \mathbb{R}^m_+$ такой, что пара $(z,\lambda) = (x_*,\lambda_*)$ является седловой точкой функционала Лагранжа L на множестве $Q_0 \times \mathbb{R}^m_+$, т. е.*

$$L(x_*,\lambda) \leq L(x_*,\lambda_*) \leq L(z,\lambda_*) \quad \forall (z,\lambda) \in Q_0 \times \mathbb{R}^m_+.$$

Условие А имеет место, например, если выполняется условие Слейтера: существует такая точка $\overline{x} \in Q_0$, что $\varphi_j(\overline{x}) < 0$, $j \in J$ ([12], с. 38).

Обозначим через Λ_* множество таких векторов $\lambda_* \in \mathbb{R}^m_+$, что некоторая пара (x_*,λ_*), $x_* \in Q_*$, является седловой точкой функционала L на $Q_0 \times \mathbb{R}^m_+$ при подходящем $f(x_*) \in F(x_*)$. В силу условия А множество $\Lambda_* \neq \emptyset$.

Для вектора $y \in \mathbb{R}^m$ определим нормы

$$|y|_l = \left(\sum_{j=1}^m |y^j|^l\right)^{1/l},\quad 1 \leq l < \infty;\quad |y|_\infty = \max_{1\leq j\leq m} |y^j|.$$

Образуем выпуклый полунепрерывный снизу функционал

$$\varphi(x) = |(\varphi_1^+(x), \varphi_2^+(x), \ldots, \varphi_m^+(x))|_l,\quad 1 \leq l \leq \infty.$$

Поскольку $Q_0 \subset \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, функционал φ локально липшицев и субдифференцируем на Q_0. Рассмотрим ВН со штрафом

$$x \in Q_0 : \langle F(x) + \tau\partial\varphi(x),\, x - z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in Q_0, \tag{10}$$

где $\tau > 0$. Через Q_*^τ обозначим множество решений ВН (10). Следующая теорема устанавливает, что при выполнении условия А задачи (1) и (10) с достаточно большим значением штрафного параметра τ эквивалентны.

Теорема 1. *Пусть выполняются условие* A *и соотношение* $\tau > |\lambda_*|_{l'}$, $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = 1$, *для некоторого вектора множителей Лагранжа* $\lambda_* \in \Lambda_*$. *Тогда*

1) *для элемента* $x_* \in Q_*$, *соответствующего* λ_*, *и такого, что* (x_*, λ_*) *есть седловая точка функционала* L, *выполняется* $x_* \in Q_*^\tau$;

2) *справедливо соотношение* $Q_*^\tau \subset Q_*$.

Доказательство. 1) Пусть точка $x_* \in Q_*$ такова, что пара (x_*, λ_*) является седловой точкой L на множестве $Q_0 \times \mathbb{R}^m_+$. Тогда x_* будет решением задачи выпуклого программирования (9). Применяя к (9) теорему ([8], с. 173; [9]) о снятии функциональных ограничений при помощи конечного штрафа, для некоторого $f(x_*) \in F(x_*)$ получим

$$\begin{aligned}\langle f(x_*),\, x_*\rangle &= \min\{\langle f(x_*),\, z\rangle : z \in Q_0;\ \varphi_j(z) \le 0,\ j \in J\} = \\ &= \min\{\langle f(x_*),\, z\rangle + \tau\varphi(z) : z \in Q_0\},\end{aligned}$$

если $\tau > |\lambda_*|_{l'}$. При этом множества решений записанных экстремальных задач совпадают. Поскольку $\varphi(x^*) = 0$, для всех $z \in Q_0$ имеем

$$\begin{aligned}\langle f(x_*),\, x_*\rangle &\le \langle f(x_*),\, z\rangle + \tau(\varphi(z) - \varphi(x_*)) \le \\ &\le \langle f(x_*),\, z\rangle + \tau\langle g(z),\, z - x_*\rangle \quad \forall g(z) \in \partial\varphi(z).\end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что для всех $f(z) \in F(z)$ в силу (2) выполняется

$$\langle f(z),\, x_* - z\rangle \le \langle f(x_*),\, x_* - z\rangle.$$

Объединяя последнее неравенство с (11), получаем

$$\langle f(z) + \tau g(z),\, x_* - z\rangle \le 0 \quad \forall z \in Q_0, \quad f(z) \in F(z), \quad g(z) \in \partial\varphi(z). \tag{12}$$

По условию $Q_0 \subset \operatorname{int} D_F \cap \operatorname{int} D_{\partial\varphi}$, следовательно, оператор $F + \partial\varphi$ является максимально монотонным ([6], с. 61). Кроме того, $Q_0 \subset \operatorname{int} D_{F+\partial\varphi}$, так что оператор $F + \partial\varphi$ локально ограничен на Q_0 ([6], с. 27). Из (12) в силу леммы 3.3 [1] теперь следует

$$\langle f(x_*) + \tau g(x_*),\, x_* - z\rangle \le 0 \quad \forall z \in Q_0$$

при некоторых $f(x_*) \in F(x_*)$, $g(x_*) \in \partial\varphi(x_*)$, так что $x_* \in Q_*^\tau$.

2) Отметим, что в силу доказанного в п. 1) множество $Q_*^\tau \ne \emptyset$. Выберем произвольно $x_*^\tau \in Q_*^\tau$. Покажем, что $x_*^\tau \in Q$. Поскольку $x_*^\tau \in Q_0$, достаточно установить $\varphi(x_*^\tau) = 0$. Пусть пара (x_*, λ_*) образует седловую точку функционала Лагранжа L. Для некоторых элементов

$$f(x_*^\tau) \in F(x_*^\tau), \quad g(x_*^\tau) \in \partial\varphi(x_*^\tau), \quad f(x_*) \in F(x_*)$$

при всех $z \in Q_0$ по выбору x_*^τ, x_* выполняется

$$\langle f(x_*^\tau) + \tau g(x_*^\tau),\, x_*^\tau - z\rangle \le 0, \tag{13}$$

$$\langle f(x_*),\, x_* - z\rangle + \sum_{j\in J} \lambda_*^j(\varphi_j(x_*) - \varphi_j(z)) = L(x_*, \lambda_*) - L(z, \lambda_*) \le 0. \tag{14}$$

Полагая в (13) $z = x_*$, в (14) $z = x_*^\tau$, складывая и используя (2), получаем

$$\sum_{j\in J} \lambda_*^j(\varphi_j(x_*) - \varphi_j(x_*^\tau)) + \tau(\varphi(x_*^\tau) - \varphi(x_*)) \le 0. \tag{15}$$

Здесь $\lambda_*^j\varphi_j(x_*) = 0$, $j \in J$ ([12], с. 37), и в силу неравенства Гёльдера

$$\sum_{j\in J} \lambda_*^j\varphi_j(x_*^\tau) \le \sum_{j\in J} \lambda_*^j\varphi_j^+(x_*^\tau) \le |\lambda_*|_{l'}|(\varphi_1^+(x_*^\tau), \varphi_2^+(x_*^\tau), \ldots, \varphi_m^+(x_*^\tau))|_l = |\lambda_*|_{l'}\varphi(x_*^\tau).$$

Поскольку $\varphi(x^*)=0$, из (15) следует $(\tau-|\lambda_*|_{l'})\varphi(x_*^\tau)\le 0$, откуда $\varphi(x_*^\tau)=0$ и, значит, $x_*^\tau\in Q$. Из (13) вытекает, что для всех $z\in Q\subset Q_0$ и выбранного выше элемента $f(x_*^\tau)\in F(x_*^\tau)$ имеем

$$\langle f(x_*^\tau),\, x_*^\tau - z\rangle = \langle f(x_*^\tau),\, x_*^\tau - z\rangle + \tau(\varphi(x_*^\tau)-\varphi(z)) \le \langle f(x_*^\tau)+\tau g(x_*^\tau),\, x_*^\tau - z\rangle \le 0.$$

Поскольку при этом $x_*^\tau\in Q$, то $x_*^\tau\in Q_*$. □

Замечание. В случае $l=\infty$ подобный способ снятия функциональных ограничений при решении класса равновесных задач в банаховом пространтве рассматривался в [13].

Согласно доказанной теореме в случае ограниченности множества Λ_*, выбирая

$$\tau>\tau^*=\sup\{|\lambda_*|_{l'}:\lambda_*\in\Lambda_*\},$$

будем иметь $Q_*^\tau=Q_*$. Ограниченность Λ_* имеет место, например, если множество Q ограничено, выполняется условие Слейтера, а оператор F переводит ограниченные множества в ограниченные. Действительно, в этом случае для любой точки $x_*\in Q_*$ в силу $L(x_*,\lambda_*)\le L(z,\lambda_*)\quad\forall z\in Q_0$ с учетом $\lambda_*^j\varphi_j(x^*)=0$, $j\in J$, справедливо

$$\langle f(x_*),\, x_*\rangle \le \langle f(x_*),\, \overline{x}\rangle + \max_{j\in J}\varphi_j(\overline{x})\sum_{j\in J}\lambda_*^j,$$

откуда

$$\max_{j\in J}\lambda_*^j \le \sum_{j\in J}\lambda_*^j \le C^* = \big(\min_{j\in J}|\varphi_j(\overline{x})|\big)^{-1}\sup_{x_*\in Q_*,\, f(x_*)\in F(x_*)}\|f(x_*)\|_{X^*}\|\overline{x}-x_*\|_X<\infty. \qquad (16)$$

Таким образом, $\tau^*\le C^*$, и при любом выборе параметра штрафа $\tau>C^*$ имеем $Q_*^\tau=Q_*$.

В математическом программировании при сравнении методов точного штрафа с асимптотическими штрафными методами, отвечающими случаю $p>1$ в (8), обычно указывают на необходимость решения бесконечной последовательности вспомогательных задач, обусловленность которых растет при $\tau\to+\infty$. Отмечается, что это негативное обстоятельство компенсируется дифференцируемостью минимизируемых в (8) функционалов, позволяющей применять для решения (8) быстросходящиеся итерационные процессы. В случае вариационных неравенств аналогом свойства гладкости штрафного функционала является однозначность и гладкость штрафного оператора $\partial\Big(\sum_{j\in J}(\varphi_j^+(x))^p\Big)$ в (6) при достаточно больших значениях $p>1$. Необходимые требования гладкости обычно бывают обеспечены при выборе $p\ge 2$. Следовательно, оператор ВН (6) является однозначным и гладким, если таков оператор F. Наличие свойства гладкости у оператора ВН заметно расширяет спектр эффективных численных методов, применимых для его решения. В качестве примера укажем итерационные процессы ньютоновского типа ([1], гл. III, § 5). В методе негладкого штрафа (10) штрафной оператор $\partial\varphi(x)$ в силу негладкости функционала φ определяет точечно-множественное отображение, так что оператор ВН (10) оказывается точечно-множественным, даже если F является однозначным и гладким. Утрата свойств однозначности и гладкости оператора вспомогательного ВН при переходе от асимптотического штрафа к точному компенсируется возможностью эквивалентного сведения исходной задачи к единственному ВН на множестве Q_0 простой структуры вместо сведения к семейству таких ВН с $\tau\to+\infty$. Отметим и еще одно важное преимущество точной штрафной схемы по сравнению с асимптотической схемой (6) при $p>1$. Оно заключается в том, что обоснование схемы точного штрафа не требует от оператора F основной задачи (1) каких-либо свойств равномерной монотонности вида (7).

3. Теорема 1 позволяет обосновать метод снятия конечным штрафом ограничений в задаче об отыскании седловой точки выпукло-вогнутого функционала в банаховом пространстве. Пусть P_0 и G_0 — выпуклые замкнутые подмножества рефлексивных банаховых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\xi, \eta)$ — функционал, выпуклый по $\xi \in P_0$ и вогнутый по $\eta \in G_0$ при любых фиксированных $\eta \in G_0$ и $\xi \in P_0$ соответственно, причем $P_0 \times G_0 \subset \operatorname{int}\operatorname{dom}\mathcal{L}$ ([2], с. 118). Ставится задача отыскания его седловой точки $(\xi_*, \eta_*) \in P \times G$,

$$\mathcal{L}(\xi_*, \eta) \leq \mathcal{L}(\xi_*, \eta_*) \leq \mathcal{L}(\xi, \eta_*) \quad \forall (\xi, \eta) \in P \times G, \tag{17}$$

где выпуклые замкнутые множества

$$P = \big\{\xi \in P_0 : p(\xi) \leq 0\big\}, \quad G = \big\{\eta \in G_0 : g(\eta) \leq 0\big\} \tag{18}$$

определяются полунепрерывными снизу выпуклыми функционалами p, g такими, что $P_0 \subset \operatorname{int}\operatorname{dom} p$ и $G_0 \subset \operatorname{int}\operatorname{dom} g$. Для простоты анализируем случай единственного функционального ограничения на ξ и η. При наличии нескольких таких ограничений, например, $p_i(\xi) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, достаточно положить $p(\xi) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} p_i(\xi)$. Рассматриваемая задача сводится к ВН (1), (4) с $x = (\xi, \eta) \in X$, $X = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $Q_0 = P_0 \times G_0$, $J = \{1, 2\}$,

$$\varphi_1(x) = p(\xi), \quad \varphi_2(x) = g(\eta); \quad F(x) = (\partial_\xi \mathcal{L}(\xi, \eta), -\partial_\eta \mathcal{L}(\xi, \eta)). \tag{19}$$

В построениях п. 2 для простоты примем $l = 1$, так что $\varphi(x) = p^+(\xi) + g^+(\eta)$, $l' = \infty$. При этом решение ВН со штрафом (10) эквивалентно отысканию седловой точки выпукло-вогнутого функционала

$$\mathcal{L}_\tau(\xi, \eta) = \mathcal{L}(\xi, \eta) + \tau(p^+(\xi) - g^+(\eta)) \tag{20}$$

на множестве $P_0 \times G_0$. Для функционала $\mathcal{L}_\tau$ имеем

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathcal{L}_\tau(\xi, \eta) &= \partial_\xi \mathcal{L}(\xi, \eta) + \tau \partial p^+(\xi), \\ \partial_\eta \mathcal{L}_\tau(\xi, \eta) &= \partial_\eta \mathcal{L}(\xi, \eta) - \tau \partial g^+(\eta). \end{aligned} \tag{21}$$

Отметим, что для выпуклого субдифференцируемого функционала ρ получим $\partial\rho^+(x) = 0$, если $\rho(x) < 0$; $\partial\rho^+(x) = \operatorname{conv}\{0, \partial\rho(x)\}$, если $\rho(x) = 0$; $\partial\rho^+(x) = \partial\rho(x)$, если $\rho(x) > 0$.

Условие A в рассматриваемом случае выполняется, если для всех субдифференциалов $h_\xi(\xi_*, \eta_*) \in \partial_\xi \mathcal{L}(\xi_*, \eta_*)$, $h_\eta(\xi_*, \eta_*) \in \partial_\eta \mathcal{L}(\xi_*, \eta_*)$, $(\xi_*, \eta_*) \in Q_*$, существуют седловые точки $(\xi_*, \eta_*; \lambda_{p*}, \lambda_{g*})$ функции Лагранжа задачи выпуклого программирования

$$\min\big\{\langle h_\xi(\xi_*, \eta_*), \xi\rangle - \langle h_\eta(\xi_*, \eta_*), \eta\rangle : p(\xi) \leq 0,\ \xi \in P_0;\ g(\eta) \leq 0,\ \eta \in G_0\big\}. \tag{22}$$

Из сказанного вытекает

Предложение. *Пусть множество Q_* седловых точек функционала $\mathcal{L}$ непусто, множество Λ_{ξ_*, η_*} множителей Лагранжа в задаче* (22) *равномерно по $(\xi_*, \eta_*) \in Q_*$ ограничено. Тогда при*

$$\tau > \tau^* = \sup\big\{|\lambda_{p*}| + |\lambda_{g*}| : (\lambda_{p*}, \lambda_{g*}) \in \Lambda_{\xi_*, \eta_*}\big\}$$

множество седловых точек на $P_0 \times G_0$ определенного в (20) *функционала $\mathcal{L}_\tau$ совпадает с Q_*.*

Непосредственно из определения субдифференциала следует, что если выпукло-вогнутый функционал $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию Липшица на $\widetilde{P}_0 \times \widetilde{G}_0$, $P_0 \subset \operatorname{int}\widetilde{P}_0$, $G_0 \subset \operatorname{int}\widetilde{G}_0$, так что

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\xi_1, \eta) - \mathcal{L}(\xi_2, \eta)| &\leq l_{\mathcal{X}}\|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathcal{X}} \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \widetilde{P}_0; \quad \eta \in \widetilde{G}_0, \\ |\mathcal{L}(\xi, \eta_1) - \mathcal{L}(\xi, \eta_2)| &\leq l_{\mathcal{Y}}\|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{Y}} \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in \widetilde{G}_0; \quad \xi \in \widetilde{P}_0, \end{aligned} \tag{23}$$

то для всех $(\xi,\eta) \in P_0 \times G_0$,

$$\|h_\xi(\xi,\eta)\|_{\mathcal{X}^*} \le l_{\mathcal{X}} \quad \forall h_\xi(\xi,\eta) \in \partial_\xi \mathcal{L}(\xi,\eta),$$
$$\|h_\eta(\xi,\eta)\|_{\mathcal{Y}^*} \le l_{\mathcal{Y}} \quad \forall h_\eta(\xi,\eta) \in \partial_\eta \mathcal{L}(\xi,\eta).$$

Тем самым обеспечивается ограниченность на Q_0 отображения (19). Если еще предположить ограниченность множеств P_0, G_0 и выполнение *условия Слейтера* по каждой из переменных ξ, η:

$$p(\overline{\xi}) < 0, \quad \overline{\xi} \in P_0; \quad g(\overline{\eta}) < 0, \quad \overline{\eta} \in G_0, \tag{24}$$

то аналогично (16) получаем, что при

$$\tau > C^* = \bigl(\min\{|p(\overline{\xi})|, |g(\overline{\eta})|\}\bigr)^{-1}(l_{\mathcal{X}} \operatorname{diam} P_0 + l_{\mathcal{Y}} \operatorname{diam} G_0) \tag{25}$$

множество седловых точек функционала $\mathcal{L}$ на $P \times G$ совпадает с множеством седловых точек $\mathcal{L}_\tau$ на $P_0 \times G_0$. Тем самым обоснован способ снятия функциональных ограничений в задаче поиска седловых точек в банаховом пространстве.

4. Применим результат п. 3 к проблеме построения оптимальных по трудоемкости итерационных методов решения задачи отыскания седловой точки (17)–(18). Сохраним введенное в п. 3 условие ограниченности множеств P_0, G_0, условия (23), (24) и, кроме того, следуя ([4], гл. VI), будем предполагать пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ равномерно выпуклыми. В силу ограниченности множеств P_0, G_0 множество X_* седловых точек $\mathcal{L}$ на $P \times G$ непусто ([4], с. 212). Определим функции

$$\overline{\mathcal{L}}(\xi) = \max_{\eta \in G} \mathcal{L}(\xi,\eta), \quad \xi \in P_0; \quad \underline{\mathcal{L}}(\eta) = \min_{\xi \in P} \mathcal{L}(\xi,\eta), \quad \eta \in G_0,$$

и величины

$$\begin{gathered} \varepsilon_P(\xi) = \overline{\mathcal{L}}(\xi) - \min_{\xi \in P} \overline{\mathcal{L}}(\xi), \quad \varepsilon_G(\eta) = \max_{\eta \in G} \underline{\mathcal{L}}(\eta) - \underline{\mathcal{L}}(\eta), \\ \varepsilon(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\varepsilon_P(\xi) + \varepsilon_G(\eta)), \quad (\xi,\eta) \in P_0 \times G_0. \end{gathered} \tag{26}$$

Имеет место представление $X_* = P_* \times G_*$, где

$$P_* = \{\xi_* \in P : \overline{\mathcal{L}}(\xi_*) = \min_{\xi \in P} \overline{\mathcal{L}}(\xi)\}, \quad G_* = \{\eta_* \in G : \underline{\mathcal{L}}(\eta_*) = \max_{\eta \in G} \underline{\mathcal{L}}(\eta)\}.$$

Достижимость верхних и нижних граней в записанных экстремальных задачах следует из ограниченности множеств P, G, слабой полунепрерывности снизу функционалов $\mathcal{L}(\cdot,\eta)$, $\overline{\mathcal{L}}$ и слабой полунепрерывности сверху функционалов $\mathcal{L}(\xi,\cdot)$, $\underline{\mathcal{L}}$ ([12], с. 49). Погрешность, допускаемую при выборе пары (ξ,η) в качестве аппроксимации множества X_*, будем характеризовать величиной $\varepsilon(\xi,\eta)$. Последняя аналогична погрешности решения задачи выпуклого программирования при измерении этой погрешности по функционалу. Абсолютную погрешность $\varepsilon(\xi,\eta)$ удобно нормировать делением на постоянную, включающую константы Липшица $l_{\mathcal{X}}$, $l_{\mathcal{Y}}$ и радиусы множеств P, G. Именно, обозначим через $r(P)$ нижнюю грань радиусов шаров с центрами в P, содержащих P, и аналогично определим $r(G)$. Под относительной погрешностью приближения (ξ,η) понимается величина

$$\nu(\xi,\eta) = \varepsilon(\xi,\eta)/(2\max\{l_{\mathcal{X}} r(P), l_{\mathcal{Y}} r(G)\}), \quad (\xi,\eta) \in P_0 \times G_0.$$

Как и в случае общей задачи выпуклого программирования, без дополнительных условий равномерной выпуклости близость точки (ξ,η) к X_* в смысле погрешности $\nu(\xi,\eta)$ не влечет близость (ξ,η) к X_* в смысле нормы пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

В качестве информационной базы для конструирования приближенных методов решения рассматриваемой задачи в ([4], гл. VI) выбирается оракул $\mathcal{O}$, выдающий по запросу в точке $(\xi,\eta)\in P\times G$ пару субградиентов $(h_\xi(\xi,\eta),h_\eta(\xi,\eta))\in\partial_\xi\mathcal{L}(\xi,\eta)\times\partial_\eta\mathcal{L}(\xi,\eta)$. Под трудоемкостью метода понимается минимальное количество $N(\nu)$ обращений к оракулу, гарантирующее получение приближения с заданной относительной погрешностью $\nu>0$. Ясно, что решение произвольной задачи рассматриваемого типа не может быть проще решения с той же погрешностью задачи выпуклой оптимизации вида $\min_{\xi\in P}\mathcal{L}(\xi)$. Последняя задача совпадает с (17)–(18) при $\mathcal{L}(\xi,\eta)\equiv\mathcal{L}(\xi)$. С другой стороны, установлено ([4], с. 144), что в задаче выпуклой оптимизации

$$N(\nu)\geq C_1\nu^{-2}, \tag{27}$$

где константа C_1 зависит от геометрических характеристик множества P, $\operatorname{int}P\neq\emptyset$. Таким образом, (27) доставляет нижнюю оценку трудоемкости алгоритмов решения задачи (17)–(18). В [4] исследовался вопрос о построении для этой задачи итерационных процессов, оптимальных по порядку в смысле трудоемкости, т. е. процессов, реализующих асимптотику (27) по порядку величины ν при $\nu\to 0$. Переходя к схематическому изложению результатов [4], заметим, что сопряженное пространство X^* к произвольному равномерно выпуклому банахову пространству X является равномерно гладким ([6], с. 8). Тем самым определено нормализованное дуальное отображение $J_*: X^*\to X$, $J_*(y^*)=\frac{1}{2}\operatorname{grad}\|y^*\|^2_{X^*}$, $y^*\in X^*$. Определим модуль непрерывности ω_X отображения J_*,

$$\omega_X(t)=\sup\{\|J_*(y_1^*)-J_*(y_2^*)\|_X : y_1^*,y_2^*\in X^*,\ \|y_1^*-y_2^*\|_{X^*}\leq t\},$$

а также функцию $\gamma_X(s)=\sup\{t:\omega_X(t)\leq s\}$. Из построения следует, что $\gamma_X(s)>0$ при $s>0$ и $\gamma_X(s)$ не убывает с ростом s. В случае гильбертова пространства X, очевидно, имеем $\omega_X(t)=\gamma_X(t)=t$. Известно также, что для пространств $X=L_p$ при $1<p\leq 2$ $\gamma_X(t)\geq c(p)t$ и $\gamma_X(t)\geq c(p)t^{p-1}$ при $p>2$.

В ([4], гл. VI, § 2) описан итерационный процесс, обеспечивающий получение приближения $(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})$ с относительной погрешностью $\nu>0$ при количестве обращений к оракулу, не превосходящем

$$M_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(\nu)=\max\{M_{\mathcal{X}}(2\nu),\ M_{\mathcal{Y}}(2\nu)\}.$$

Здесь $M_{\mathcal{X}}(\nu)=[(\nu\gamma_{\mathcal{X}}(\nu/2))^{-1}]+2$; $M_{\mathcal{Y}}(\nu)$ определяется аналогично с заменой пространства $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$. Видим, что в случае гильбертовых пространств $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, а также в случае $\mathcal{X}=L_{p_1}$, $\mathcal{Y}=L_{p_2}$, $1<p_1,p_2\leq 2$, справедливо $M_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(\nu)=O(\nu^{-2})$, поэтому упомянутый процесс является оптимальным по порядку в смысле трудоемкости. Не останавливаясь на его детальном описании, приведем лишь формулу итерационного перехода в частном случае гильбертовых пространств $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned}
&\xi_0\in P,\quad \xi_{n+1}=\Pi_P(\xi_n-\rho_n h_\xi(\xi_n,\eta_n)),\quad h_\xi(\xi_n,\eta_n)\in\partial_\xi\mathcal{L}(\xi_n,\eta_n);\\
&\eta_0\in G,\quad \eta_{n+1}=\Pi_G(\eta_n+\rho_n h_\eta(\xi_n,\eta_n)),\quad h_\eta(\xi_n,\eta_n)\in\partial_\eta\mathcal{L}(\xi_n,\eta_n).
\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь Π_P и Π_G — операторы метрического проектирования из пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ на множества P и G соответственно, $\rho_n>0$ — адаптивно выбираемые шаговые множители. В качестве приближенного решения задачи (17)–(18) выдается

$$(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})=\Big(\sum_{n=0}^{\widetilde{m}}\rho_n\Big)^{-1}\sum_{n=0}^{\widetilde{m}}\rho_n(\xi_n,\eta_n), \tag{29}$$

где $\widetilde{m}=\widetilde{m}(\nu)$ — настроенный на погрешность $\nu>0$ момент останова, который также определяется в ходе реализации алгоритма.

Вычислительная схема оптимального по трудоемкости алгоритма (28)–(29) не предполагает наличия в определении множеств P, G функциональных ограничений, поэтому ее эффективное применение возможно, лишь если эти множества имеют простую структуру, допускающую реализуемые схемы проектирования на P, G. Подчеркнем, что принимаемое в [4] определение трудоемкости учитывает лишь общее количество обращений к оракулу и не принимает во внимание трудоемкость обработки его ответов. С практической точки зрения целесообразно предусмотреть возможность задания множеств P, G в виде (18), включающем наряду с множествами простой структуры P_0, G_0 и функциональные ограничения. Под результатом работы оракула $\mathcal{O}_\tau$ в точке $(\xi,\eta) \in P_0 \times G_0$ будем понимать расширенный набор субградиентов, представляющий произвольный элемент из $\partial_\xi \mathcal{L}(\xi,\eta) \times \partial_\eta \mathcal{L}(\xi,\eta) \times \partial p(\xi) \times \partial g(\eta)$. При выполнении условий предложения 1 задача отыскания седловой точки функционала $\mathcal{L}$ на множестве $P \times G$ эквивалентна аналогичной задаче для функционала $\mathcal{L}_\tau$ на $P_0 \times G_0$. Поэтому в качестве приближения к множеству X_* может быть выбран результат работы вышеупомянутого алгоритма из [4], настроенного на относительную погрешность $\nu > 0$, в применении к задаче отыскания седловой точки $\mathcal{L}_\tau$ на $P_0 \times G_0$. Соответствующая итерационная схема получается заменой функционала $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_\tau$ и множеств P, G на P_0, G_0. В случае гильбертовых пространств $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ эту замену необходимо произвести в (28), (29). Из (21) следует, что описанный выше оракул обеспечивает реализуемость данного процесса. Обозначим через $\nu_\tau(\xi,\eta)$ относительную погрешность, допускаемую при выборе (ξ,η) в качестве приближенной седловой точки $\mathcal{L}_\tau$ на $P_0 \times G_0$. Величина $\nu_\tau(\xi,\eta)$ определяется аналогично $\nu(\xi,\eta)$ с заменой функционала $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_\tau$ и множеств P, G на P_0, G_0 соответственно. В результате работы процесса за не более чем $M_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(\nu)$ шагов (обращений к оракулу $\mathcal{O}_\tau$) будет получено такое приближение $(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})$, что $\nu_\tau(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}) \le \nu$. Поясним последнее неравенство в терминах исходной задачи отыскания седловой точки $\mathcal{L}$ на $P \times G$.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (25). *Тогда*

$$\varepsilon_\tau(\xi,\eta) = \varepsilon(\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau(p^+(\xi) + g^+(\eta)), \quad (\xi,\eta) \in P_0 \times G_0. \tag{30}$$

Доказательство. Имеем

$$\varepsilon_\tau(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{P\tau}(\xi) + \varepsilon_{G\tau}(\eta)), \tag{31}$$

$$\varepsilon_{P\tau}(\xi) = \overline{\mathcal{L}}_\tau(\xi) - \min_{\xi \in P_0} \overline{\mathcal{L}}_\tau(\xi), \quad \varepsilon_{G\tau}(\eta) = \max_{\eta \in G_0} \underline{\mathcal{L}}_\tau(\eta) - \underline{\mathcal{L}}_\tau(\eta);$$

$$\overline{\mathcal{L}}_\tau(\xi) = \max_{\eta \in G_0} \mathcal{L}_\tau(\xi,\eta) = \tau p^+(\xi) + \max_{\eta \in G_0}(\mathcal{L}(\xi,\eta) - \tau g^+(\eta)), \tag{32}$$

$$\underline{\mathcal{L}}_\tau(\eta) = \min_{\xi \in P_0} \mathcal{L}_\tau(\xi,\eta) = -\tau g^+(\eta) + \min_{\xi \in P_0}(\mathcal{L}(\xi,\eta) + \tau p^+(\xi)). \tag{33}$$

Здесь

$$\max_{\eta \in G_0}(\mathcal{L}(\xi,\eta) - \tau g^+(\eta)) = \max_{\eta \in G} \mathcal{L}(\xi,\eta) = \overline{\mathcal{L}}(\xi),$$
$$\min_{\xi \in P_0}(\mathcal{L}(\xi,\eta) + \tau p^+(\xi)) = \min_{\xi \in P} \mathcal{L}(\xi,\eta) = \underline{\mathcal{L}}(\eta).$$

Ограничимся доказательством второго из этих равенств, первое доказывается аналогично. Имея в виду представление $P = \{\xi \in P_0 : p(\xi) \le 0\}$, запишем функционал Лагранжа задачи $\min\limits_{\xi \in P} \mathcal{L}(\xi,\eta)$:

$$\widehat{L}(\eta;\xi,\lambda) = \mathcal{L}(\xi,\eta) + \lambda p(\xi); \quad (\xi,\lambda) \in P_0 \times \mathbb{R}_+, \quad \eta \in G_0.$$

Поскольку для функционального ограничения выполняется условие Слейтера (24), функционал $\widehat{L}(\eta;\cdot,\cdot)$ имеет седловую точку $(\widehat{\xi}(\eta), \widehat{\lambda}(\eta)) \in P_0 \times \mathbb{R}_+$, при этом

$$\widehat{\lambda}(\eta) p(\widehat{\xi}(\eta)) = 0, \quad \widehat{L}(\eta;\widehat{\xi}(\eta),\widehat{\lambda}(\eta)) \le \widehat{L}(\eta;\xi,\widehat{\lambda}(\eta)) \ \ \forall \xi \in P_0, \quad \eta \in G_0.$$

Полагая здесь $\xi = \overline{\xi}$, с учетом (23) получаем

$$0 \le \widehat{\lambda}(\eta) \le |p(\overline{\xi})|^{-1}(\mathcal{L}(\overline{\xi}, \eta) - \mathcal{L}(\widehat{\xi}(\eta), \eta)) \le |p(\overline{\xi})|^{-1} l_{\mathcal{X}} \operatorname{diam} P_0. \tag{34}$$

Из (34) следует, что если выполняется условие (25), то

$$\tau > C^* > \widehat{\lambda}(\eta) \quad \forall \eta \in G_0.$$

Применяя теорему о снятии функционального ограничения линейным конечным штрафом [9], получаем, что требуемое равенство выполняется для всех $\eta \in G_0$. Таким образом, на основании (32), (33) имеем

$$\overline{\mathcal{L}}_\tau(\xi) = \tau p^+(\xi) + \overline{\mathcal{L}}(\xi), \quad \underline{\mathcal{L}}_\tau(\eta) = -\tau g^+(\eta) + \underline{\mathcal{L}}(\eta) \quad \forall (\xi, \eta) \in P_0 \times G_0.$$

Поэтому

$$\varepsilon_{P\tau}(\xi) = \overline{\mathcal{L}}_\tau(\xi) - \min_{\xi \in P_0} \overline{\mathcal{L}}_\tau(\xi) = \tau p^+(\xi) + \overline{\mathcal{L}}(\xi) - \min_{\xi \in P_0}(\tau p^+(\xi) + \overline{\mathcal{L}}(\xi)) \tag{35}$$

и аналогично

$$\varepsilon_{G\tau}(\eta) = \max_{\eta \in G_0} \underline{\mathcal{L}}_\tau(\eta) - \underline{\mathcal{L}}_\tau(\eta) = \tau g^+(\eta) - \underline{\mathcal{L}}(\eta) + \max_{\eta \in G_0}(-\tau g^+(\eta) + \underline{\mathcal{L}}(\eta)). \tag{36}$$

В (35), (36)

$$\min_{\xi \in P_0}(\tau p^+(\xi) + \overline{\mathcal{L}}(\xi)) = \min_{\xi \in P} \overline{\mathcal{L}}(\xi), \quad \max_{\eta \in G_0}(-\tau g^+(\eta) + \underline{\mathcal{L}}(\eta)) = \max_{\eta \in G} \underline{\mathcal{L}}(\eta). \tag{37}$$

Докажем, например, первое из этих соотношений. Обозначим через $(\widehat{\xi}, \widehat{\lambda})$ седловую точку функционала $\widehat{L}(\xi, \lambda) = \overline{\mathcal{L}}(\xi) + \lambda p(\xi)$ на $P_0 \times \mathbb{R}_+$. Подобно (34) получаем оценку

$$0 \le \widehat{\lambda} \le |p(\overline{\xi})|^{-1}(\overline{\mathcal{L}}(\overline{\xi}) - \overline{\mathcal{L}}(\widehat{\xi})). \tag{38}$$

Найдутся такие элементы $\overline{\eta}, \widehat{\eta} \in G_0$, что

$$\overline{\mathcal{L}}(\overline{\xi}) = \max_{\eta \in G_0} \mathcal{L}(\overline{\xi}, \eta) = \mathcal{L}(\overline{\xi}, \overline{\eta}), \quad \overline{\mathcal{L}}(\widehat{\xi}) = \max_{\eta \in G_0} \mathcal{L}(\widehat{\xi}, \eta) = \mathcal{L}(\widehat{\xi}, \widehat{\eta}).$$

Следовательно,

$$\overline{\mathcal{L}}(\overline{\xi}) - \overline{\mathcal{L}}(\widehat{\xi}) = \mathcal{L}(\overline{\xi}, \overline{\eta}) - \mathcal{L}(\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) = \\ = (\mathcal{L}(\overline{\xi}, \overline{\eta}) - \mathcal{L}(\widehat{\xi}, \overline{\eta})) + (\mathcal{L}(\widehat{\xi}, \overline{\eta}) - \mathcal{L}(\widehat{\xi}, \widehat{\eta})) \le l_{\mathcal{X}} \operatorname{diam} G_0 + l_{\mathcal{Y}} \operatorname{diam} P_0.$$

Отсюда и из (25), (38) заключаем, что $\tau > \widehat{\lambda}$. Доказательство первого соотношения из (37) завершается ссылкой на теорему из [9] о снятии конечным линейным штрафом функциональных ограничений в задаче выпуклого программирования в банаховом пространстве. Второе равенство в (37) доказывается аналогично. Объединяя (35)–(37), с учетом (26) получаем

$$\varepsilon_{P\tau}(\xi) = \tau p^+(\xi) + \varepsilon_P(\xi), \quad \varepsilon_{G\tau}(\eta) = \tau g^+(\eta) + \varepsilon_G(\eta), \quad (\xi, \eta) \in P_0 \times G_0.$$

Требуемое равенство (30) непосредственно следует отсюда в силу (26), (31). $\square$

Следствие. При выполнении условий теоремы 2 имеет место оценка

$$\frac{\max\{l_{\mathcal{X}} r(P), l_{\mathcal{Y}} r(G)\} \nu(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) + 0.25\tau(p^+(\widetilde{\xi}) + g^+(\widetilde{\eta}))}{\max\{l_{\mathcal{X}} r(P_0), l_{\mathcal{Y}} r(G_0)\}} \le \nu. \tag{39}$$

Оценка (39) показывает, что приближение $(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$ обеспечивает в смысле критерия $\nu(\xi, \eta)$ точность, пропорциональную ν, и с точностью того же порядка гарантирует выполнение функциональных ограничений. Поэтому в указанных выше случаях, в частности, для гильбертовых пространств $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ рассматриваемый штрафной метод приближенного отыскания седловых точек является оптимальным по порядку в смысле трудоемкости.

Литература

[1] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач* (Наука, М., 1989).

[2] Тынянский Н.Т. *Седловые функции* (Изд-во МГУ, М., 1985).

[3] Обэн Ж.-П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ* (Мир, М., 1988).

[4] Немировский А.С., Юдин А.Б. *Сложность задач и эффективность методов оптимизации. Теория и методы системного анализа* (Наука, М., 1979).

[5] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач* (Мир, М., 1972).

[6] Alber Ya., Ryazantseva I. *Nonlinear ill-posed problems of monotone type* (Springer, Dordrecht, 2006).

[7] Еремин И.И., Астафьев Н.Н. *Введение в теорию линейного и выпуклого программирования* (Наука, М., 1976).

[8] Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации* (Наука, М., 1982).

[9] Береснев В.В. *Метод негладких штрафов и теория выпуклых экстремальных задач в банаховом пространстве*, Кибернетика, №5, 100–105 (1979).

[10] Кокурин М.Ю. *Об использовании метода штрафа с регуляризацией для исследования вариационных неравенств*, ВИНИТИ, №2133-В90 (1990).

[11] Konnov I.V. *Combined relaxation methods for variational inequalities* (Springer, Berlin, 2001).

[12] Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач* (Наука, М., 1981).

[13] Konnov I.V., Pinyagina O.V. *D-gap functions for a class of equilibrium problems in Banach spaces*, Comput. Methods Appl. Math. **3** (2), 274–286 (2003).

М.Ю. Кокурин

профессор, кафедра математического анализа и теории функций,
Марийский государственный университет,
пл. Ленина, д. 1, г. Йошкар-Ола, 424000,

e-mail: kokurin@marsu.ru

M.Yu. Kokurin

Professor, Chair of Mathematical Analysis and Function Theory,
Mari State University,
1 Lenin sq., Yoshkar-Ola, 424000 Russia,

e-mail: kokurin@marsu.ru