Известия вузов. Математика
2008, №10, с. 3–16

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Ю.Б. ЕРМОЛАЕВ

ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ КАРТАНОВСКИХ ПРОДОЛЖЕНИЙ

Аннотация. Дано уточнение картановского продолжения. Приводятся подробные примеры простейших случаев известных картановских продолжений.

Ключевые слова: градуированная алгебра Ли, картановское продолжение, транзитивность, ползущее отображение, однородный элемент.

УДК: 512.815

Abstract. We revise the notion of Cartan extension and consider in detail simple examples of known Cartan extensions.

Keywords: graded Lie algebra, Cartan extension, transitivity, creeping mapping, homogeneous element.

1. Основные определения. Градуировка алгебры Ли $L = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{\infty} L_k$ над произвольным полем $\mathbb{K}$ называется *транзитивной*, если подалгебра $L^- = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{-1} L_k$ порождается (как алгебра Ли) однородной компонентой L_{-1} и $[L_{-1}, a] \neq 0$ для всякого ненулевого элемента $a \in L^+ = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} L_k$. Алгебру L будем называть *транзитивной*, если из контекста ясно, относительно какой градуировки идет речь. В частности, алгебра $L^- = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{-1} L_k$ транзитивна, если она порождается L_{-1}.

Пусть L — алгебра Ли с транзитивной градуировкой. Максимальная алгебра Ли $R = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{\infty} R_k$ с транзитивной градуировкой такая, что $R_k = L_k$ для всех $k < 0$ и $R_k \supseteq L_k$ для всех $k \geqslant 0$, называется *картановским продолжением* алгебры L.

Очевидно, если L и L' — две транзитивные алгебры Ли, у которых отрицательные части совпадают (т. е. $L^- = L'^-$), то и их картановские продолжения тоже совпадают, в частности, совпадают картановские продолжения L и ее отрицательной части, т. е. подалгебры L^-.

Картановское продолжение можно определить индуктивно. В силу последнего замечания полагаем $L = L^-$.

Поступила 02.11.2004, окончательный вариант 24.03.2008

Пусть $L=\bigoplus\limits_{i=-d}^{-1}L_i$ — транзитивная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$. Градуированная алгебра Ли $R=\bigoplus\limits_{i=-d}^{\infty}R_i$ над тем же полем $\mathbb{K}$, определенная условиями

1) $R_i=L_i$ для $i=-d,\dots,-1$ (т. е. можно отождествить $R^-=L^-$);

2) R_0 — множество всех однородных дифференцирований h алгебры L (т. е. таких, что $L_ih\subseteq L_i$, $i=-d,\dots,-1$, и $[x,y]h=[xh,y]+[x,yh]\quad\forall\, x,y\in L$);

3) R_i для $i>0$ есть множество всех дифференциальных операторов f, отображающих алгебру L^- в $R=\oplus_{j=i-d}^{i-1}R_j$ и таких, что $L_jf\subseteq R_{j+i}$ для $j=-d,\dots,-1$.

Лиево умножение на $R=\bigoplus\limits_{i=-d}^{\infty}L_i$ определяется тоже индуктивно: для $f\in R_i$, $g\in R_j$ и $x\in L=R^-$ элемент $[f,g]\in R_{i+j}$ определяется равенством $x[f,g]=[xf,g]+[f,xg]$ (так как однородный элемент однозначно определяется своим действием на L).

Полученная таким образом алгебра Ли R есть картановское продолжение L. Действительно, транзитивность R следует из построения, а максимальность — из того, что всякий однородный элемент f' (точнее, $\operatorname{ad} f'$) степени $k\geqslant 0$ любого транзитивного продолжения L является дифференциальным оператором, удовлетворяющим условию 2) или 3).

Пусть $\mathcal{L}$ — свободная алгебра Ли, порожденная образующими $\xi_1,\dots,\xi_r$ над произвольным полем $\mathbb{K}$ и $\mathcal{L}=\bigoplus\limits_{i=-\infty}^{-1}\mathcal{L}_i$ — ее стандартная градуировка, но с отрицательными степенями, в которой $\mathcal{L}_{-1}=\langle\xi_1,\dots,\xi_r\rangle$. Рассмотрим алгебру Кантора ([1]; универсальное картановское продолжение по [2]), т. е. картановское продолжение $\mathcal{R}$ этой алгебры. Пусть $\mathcal{T}_1=\mathcal{L}^*_{-1}=\langle x_1,\dots,x_r\rangle$ — сопряженное пространство с сопряженным базисом ($\xi_ix_j=\delta_{ij}$, $i,j=1,\dots,r$) и $\mathcal{T}$ — максимальный идеал тензорной алгебры, порожденный $\mathcal{T}_1$. Имеем $\mathcal{R}=\mathcal{L}\oplus\mathcal{F}$, [1] где $\mathcal{F}=\mathcal{T}\otimes\mathcal{L}_{-1}$. На $\mathcal{F}$ определяется градуировка $\mathcal{F}=\bigoplus\limits_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_k$, где $\mathcal{F}_k=\langle x_{i_1}\cdots x_{i_{k+1}}\xi_j\mid i_t,j=1,\dots,r\rangle$. Действие $\mathcal{F}$ на $\mathcal{L}_{-1}$ задается формулой

$$\xi x_{i_1}\cdots x_{i_m}\mu=\xi(x_{i_1})x_{i_2}\cdots x_{i_m}\mu \tag{1.1}$$

и продолжается на всю $\mathcal{L}$ (как дифференцирование).

Будем использовать также на $\mathcal{L}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{R}$ градуировку по *составу* σ, для которой $\sigma(\xi_i)=(0,\dots,-1,\dots,0)$, $\sigma(x_i)=(0,\dots,1,\dots,0)$ (±1 на i-м месте), и будем обозначать через $\mathcal{L}^{(i_1,\dots,i_r)}$, $\mathcal{T}^{(i_1,\dots,i_r)}$, $\mathcal{F}^{(i_1,\dots,i_r)}$ и $\mathcal{R}^{(i_1,\dots,i_r)}$ подпространства, однородные относительно состава.

Очевидно, *степень* однородного по составу элемента $v\in\mathcal{R}^{(i_1,\dots,i_r)}$ есть $\deg v=i_1+\dots+i_r$, и $\mathcal{R}_n=\bigoplus\limits_{i_1+\dots+i_r=n}\mathcal{R}^{(i_1,\dots,i_r)}$. В частности, для монома $f=x_{i_1}\cdots x_{i_n}\xi_j$ имеем $\sigma(f)=\sigma(x_{i_1})+\dots+\sigma(x_{i_1})+\sigma(\xi_j)$ и $\deg f=n-1$.

2. Подпространство F. Пусть $L=\bigoplus\limits_{k=-d}^{\infty}L_k$ — транзитивная алгебра Ли над произвольным полем $\mathbb{K}$, $\mathcal{L}$ — свободная алгебра Ли, порожденная L_{-1} над тем же полем с отрицательной градуировкой. Рассмотрим универсальное картановское продолжение $\mathcal{R}=\mathcal{R}(r,\mathbb{K})=\mathcal{L}\oplus\mathcal{F}$, где $r=\dim L_{-1}$. В силу транзитивности L имеем пару гомоморфизмов (φ^-,φ^+):

[1] Используем разные обозначения для отрицательной и положительной частей алгебры, полагая $\mathcal{R}^-=\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}^+=\mathcal{F}$, так как они играют в картановском продолжении разную роль.

$\varphi^- : \mathcal{L} \to L^-$ — эпиморфизм алгебр Ли (по первому свойству транзитивности), ограничение которого на $\mathcal{L}_{-1}$ есть линейный изоморфизм $\mathcal{L}_{-1} \cong L_{-1}$, и $\varphi^+ : L^+ \to \mathcal{F}$ — мономорфизм алгебр Ли (по второму свойству транзитивности), который каждому однородному элементу $f \in L^+$ сопоставляет дифференциальный оператор на $\mathcal{L}$, продолжающий действие $\operatorname{ad} f$ на $\mathcal{L}_{-1} \cong L_{-1}$ на все $\mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{I} = \ker \varphi^-$ — идеал в $\mathcal{L}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\widetilde{R}$ — подпространство всех элементов в $\mathcal{R}$, которые сохраняют подпространство $\mathcal{I}$. Тогда $R = \widetilde{R}/\mathcal{I}$ — картановское продолжение алгебры L.*

Доказательство. Очевидно, $\widetilde{R}$ — подалгебра, содержащая подпространство $\mathcal{I}$, которое является в ней идеалом. По построению $\mathcal{L}/\mathcal{I} \cong L^- \cong R^-$. Кроме того, R^+ можно отождествить с подалгеброй в $\mathcal{F}$, состоящей из всех элементов, сохраняющих $\mathcal{I}$, т. е. $R \cong L^- \oplus R^+$. Наконец, если f — однородный элемент картановского продолжения положительной степени, то он должен сохранять $\mathcal{I}$ (так как f можно рассматривать как дифференциальный оператор на $\mathcal{L}/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ играет роль нуля) и, значит, лежит в R^+. □

Пусть $\mathcal{I}^{(-d-1)}$ — подпространство элементов в $\mathcal{I}$, степень которых $\geqslant -d-1$ и $F = \{f \in \mathcal{F} \mid \mathcal{I}^{(-d-1)} f \in \mathcal{I}\}$ (т. е. подпространство в $\mathcal{F}$, состоящее из всех элементов, сохраняющих $\mathcal{I}^{(-d-1)}$ в $\mathcal{I}$, в частности, все образующие элементы $\mathcal{I}$). $\mathcal{F}$ индуцирует на F градуировки по степени и составу (соответствующие однородные подпространства будем обозначать через F_k и $F^{(i_1,\dots,i_r)}$).

Рассматриваем элементы из $\mathcal{T}_k$ как линейные отображения $\mathcal{L}_{-1} \to \mathbb{K} \bigoplus \mathcal{T}$, полагая $\xi_j x_{i_1} \cdots x_{i_k} = \xi_j(x_{i_1}) x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ и продолжая их действие на всю алгебру $\mathcal{L}$ в качестве дифференциальных операторов.

Лемма 2.2. *Пусть W — подпространство в T_{d+1}, состоящее из всех элементов, которые обращают $\mathcal{I}^{(-d-1)}$ в нуль. Тогда $F_n = W \cdot \mathcal{F}_{n-d-1}$ ($=W \otimes \mathcal{F}_{n-d-1}$) при $n \geqslant d$.*

Доказательство. Для $b \in \mathcal{I}^{(-d-1)}$ и $f \in \mathcal{F}_n$ при $n \geqslant d$ включение $bf \in \mathcal{I}$ означает $bf{=}0$ (так как если элемент $bf \neq 0$, то $\deg(bf) \geqslant -1$, и потому в $\mathcal{I}$ он лежать не может). Представим f в виде $f = \sum\limits_i g_i f_i$, где $\deg g_i = d+1$, $\deg f_i = n-d-1$ и все f_i — различные (а потому линейно независимые) мономы. Поэтому для однородного $b \in \mathcal{I}^{(-d-1)}$ имеем $bf = 0$ тогда и только тогда, когда $bg_i f_i = 0$ для каждого i ($bf = \sum\limits_i h_i f_i$, где $\deg h_i = d + 1 + \deg b$). В свою очередь, в силу формулы (1.1) имеем $bg_i f_i = 0$ тогда и только тогда, когда $bg_i = 0$, т. е. $g_i \in W$. Отсюда $F_n \subseteq W \cdot \mathcal{F}_{n-d-1}$. Обратное включение ввиду (1.1) очевидно. □

Подпространство W в $\mathcal{T}_{d+1}$ однородно относительно состава, т. е. $W = \oplus W^{(i_1,\dots,i_r)}$, где $i_k \geqslant 0$, $i_1 + \dots + i_r = d+1$ и каждое слагаемое лежит в W.

Лемма 2.3. *Подпространство F_0 сохраняет $\mathcal{I}$ (т. е. $R_0 = F_0$).*

Доказательство. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_k$ — образующие идеала $\mathcal{I}$ такие, что $\deg \eta_i \geqslant -d-1$ для всех $i = 1, \dots, k$. Всякий элемент γ идеала $\mathcal{I}$ есть линейная комбинация над $\mathbb{K}$ элементов вида $[\eta_i, a]$, где a — элемент $\mathcal{L}$. Поэтому достаточно убедиться, что элементы F_0 сохраняют в $\mathcal{I}$ такие элементы. Для $h \in F_0$ имеем $[[\eta_i, \alpha], h] = [[\eta_i, h], \alpha] + [\eta_i, [\alpha, h]] \in \mathcal{I}$, так как $[\alpha, h] \in \mathcal{L}$, а $[\eta_i, h] \in \mathcal{I}$ по определению F_0. □

Предложение 2.1. *Пусть $L = \bigoplus\limits_{k=-d}^{-1} L_k$ — транзитивная алгебра Ли над произвольным полем $\mathbb{K}$. Для того чтобы $f \in \mathcal{F}_k$ при $k > 0$ лежал в R_k, необходимо и достаточно* *выполнения двух условий*: f *должно лежать в* F_k *и* ξf *должно лежать в* R_{k-1} *для всякого* $\xi \in L_{-1}$.

Доказательство. Так как по лемме 2.3 $R_0 = F_0$, то утверждение предложения дает некоторое индуктивное (по степени) построение R^+, которое по существу есть иная форма индуктивного определения R, приведенного выше. Действительно, элемент $f \in \mathcal{F}_k$ можно рассматривать как однородный дифференциальный оператор, отображающий $L = \bigoplus_{k=-d}^{-1} L_k$ в $\bigoplus_{j=k-d}^{k-1} R_j$ тогда и только тогда, когда $f \in F_k$, поскольку для $-d \leqslant i \leqslant -1$ имеем $L_i \cong \mathcal{L}_i/\mathcal{I}_i$, а $f \in F_k$ действует на $\mathcal{I}_i$ по определению как нуль (и так как $\mathcal{F}_k$ есть множество всех однородных дифференциальных операторов $\mathcal{L}$ степени k). Поэтому условие 3) индуктивного определения выполнено. По этой же причине и лемме 2.3 выполнено условие 2). $\square$

Следствие 2.1. Каждый однородный элемент $f \in R_m$ состава $(m_1, \dots, m_r)$ (для $m_1 + \dots + m_r = m$) имеет вид

$$f = x_1 g_1 + \dots + x_r g_r, \tag{2.1}$$

где $g_i \in R_{m-1}$ — однородный элемент состава $(m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r)$ для всех $i = 1, \dots, r$.

Доказательство. По определению $\mathcal{F}$ каждый элемент $f \in \mathcal{F}_m$ состава $(m_1, \dots, m_r)$ имеет вид (2.1), в котором $g_i \in \mathcal{F}_{m-1}$ с составом $(m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r)$. Так как при этом $[\xi_i, f] = g_i$, то в случае $f \in R$ по предложению 1 должны иметь $g_i \in R_{i-1}$. $\square$

3. Ползущее отображение на $\mathcal{F}$. Введем отображения π_i для $i = 0, \dots, d$. Пусть $\mathcal{V}_i$ — некоторое пространство над $\mathbb{K}$ такое, что $\mathcal{V}_i = \oplus \mathcal{V}_i^{(i_1,\dots,i_r)}$, где суммирование проведено по всем составам пространства $\mathcal{F}_i$ $(i_1 + \dots + i_r = i)$, и $\dim \mathcal{V}_i^{(i_1,\dots,i_r)} = \dim \mathcal{F}_i^{(i_1,\dots,i_r)} - \dim F_i^{(i_1,\dots,i_r)}$ для $i = 0, \dots, d-1$, а $\mathcal{V}_d = \mathcal{V} = \oplus \mathcal{V}^{(d_1,\dots,d_r)}$, где суммирование проведено по всем составам пространства $\mathcal{T}_{d+1}$ $(d_1 + \dots + d_r = d+1)$, и $\dim \mathcal{V}^{(d_1,\dots,d_r)} = \dim \mathcal{T}_{d+1}^{(d_1,\dots,d_r)} - \dim W^{(d_1,\dots,d_r)}$.

Заметим, что если $(i_1, \dots, i_r)$ — состав ненулевого элемента $f \in \mathcal{F}^{(i_1,\dots,i_r)}$, то все индексы $i_k \geqslant -1$, причем равным -1 может быть разве лишь один, а если $f \in \mathcal{T}^{(d_1,\dots,d_r)}$, $f \neq 0$, то все $d_k \geqslant 0$, $k = 1, \dots, r$.

Определим $\pi_i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{V}_i$ для $i = 0, \dots, d-1$ так, что $\pi_i : \mathcal{F}_i^{(i_1,\dots,i_r)} \to \mathcal{V}_i^{(i_1,\dots,i_r)}$, и $(\ker \pi_i)^{(i_1,\dots,i_r)} = F_i^{(i_1,\dots,i_r)}$; а (*ползущее*) отображение $\pi = \pi_d : \mathcal{T}_{d+1} \to \mathcal{V}_{d+1}$ такое, что $\pi : \mathcal{T}_{d+1}^{(d_1,\dots,d_r)} \to \mathcal{V}_{d+1}^{(d_1,\dots,d_r)}$ и $(\ker \pi)^{(d_1,\dots,d_r)} = W^{(d_1,\dots,d_r)}$.

Ползущей будем также называть последовательность отображений $P = \{P_1, P_2, \dots\}$, в которой

$$P_k(x_{i_1} \cdots x_{i_{n+1}} \xi_j) = x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} \cdot \pi(x_{i_k} \cdots x_{i_{k+d}}) \cdot x_{i_{k+d+1}} \cdots x_{i_{n+1}} \xi_j \quad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n-d+1,$$
$$P_k(x_{i_1} \cdots x_{i_{n+1}} \xi_j) = x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} \cdot \pi_{n-k+1}(x_{i_k} \cdots x_{i_{n+1}} \xi_j), \quad \text{если } n-d+1 < k \leqslant n+1,$$
$$P_k(x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{i_{n+1}} \xi_j) = 0, \quad \text{если } n+1 < k.$$

Таким образом, $P_k : \mathcal{F}_n \to \mathcal{T}_{k-1} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{F}_{n-k-d}$ для $k = 1, \dots, n-d+1$ и $P_k : \mathcal{F}_n \to \mathcal{T}_{k-1} \otimes \mathcal{V}_k$ для $k = n-d+2, \dots, n+1$. Отметим также, что

$$P_k(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n+1}} \xi_j) = x_{i_1} P_{k-1}(x_{i_2} \cdots x_{i_{n+1}} \xi_j) \quad \text{для} \quad d \leqslant n \quad \text{и} \quad 2 \leqslant k \leqslant n+1. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $R = \ker P$ *(т. е. множество всех таких* $f \in F$*, что* $P_k(f) = 0$ *для всех* $k = 1, 2, \dots$*), тогда* $L \oplus R$ *есть картановское продолжение алгебры* L.

Доказательство. Индукцией по k докажем, что $R_k = (\ker P)_k$ (k-й однородной компоненте $\ker P$). Так как по лемме 2.3 $R_0 = F_0$, то $R_0 = (\ker P)_0$ по определению π_0 и P. Пусть $R_j = (\ker P)_j$ для $j < k$.

Каждый элемент $f \in \mathcal{F}_k$ состава $(k_1, \dots, k_r)$ имеет вид $f = x_1 g_1 + \dots + x_r g_r$, где $g_i \in \mathcal{F}_{k-1}^{(k_1,\dots,k_i-1,\dots,k_r)}$, $i = 1, \dots, r$. Равенство $P_1(f) = 0$ равносильно тому, что $f \in F_k$ (по лемме 2.1), а равенства $P_t(f) = 0$, $t = 2, 3, \dots$, означают, что $g_j \in (\ker P)_{k-1} = R_{k-1}$ для всех $j = 1, \dots, r$ (по предположению индукции). Действительно, так как $P_t(x_j g_j) = x_j P_{t-1}(g_j)$, $j = 1, \dots, r$, линейно независимы и потому $\sum_i P_t(x_i g_i) = 0$ влечет $P_t(x_i g_i) = 0$, то и $P_{t-1}(g_i) = 0$ для $t = 2, 3, 4, \dots$, т. е. все $g_i \in R_{k-1}$ по предположению индукции. Отсюда в силу предложения 2.1 $f \in R_k$. $\square$

Замечание. Основное отличие определения картановского продолжения, которое дает эта теорема, от определения предложения 2.1 заключается только в том, что здесь элементы каждой следующей компоненты R_k (переходящие под действием L_{-1} в R_{k-1}) выбираются не из всего пространства $\mathcal{F}_k$, а только из F_k.

4. Примеры. Не будем рассматривать свойства ползущей последовательности P, а приведем несколько примеров ее использования. Наша цель — продемонстрировать предложенный выше подход к построению картановских продолжений. В качестве примеров рассмотрим хорошо известные алгебры. Заодно докажем некоторые из утверждений статьи [2] для алгебр $L(r; q)$ (в основном, при $r = 2$), сформулированные там без доказательства. $L(r; q)$ — свободная алгебра Ли от r образующих, обрезанная по q, т.е. $\mathcal{L}$ — как и ранее, свободная алгебра Ли, порожденная пространством $\mathcal{L}_{-1} = \langle \xi_1, \dots, \xi_r \rangle$ над произвольным полем $\mathbb{K}$ со стандартной, но отрицательной градуировкой, и $\mathcal{I}$ — идеал в $\mathcal{L}$, порожденный однородной компонентой $\mathcal{L}_{-q-1}$. Под $L(r; q)$ понимается алгебра $L(r; q) \cong \mathcal{L}/\mathcal{I}$. Заметим, что для всех таких алгебр имеем $R_0 = F_0 = \mathcal{F}_0 = \langle x_i \xi_j,\ i, j = 1, \dots, r \rangle$ и $R_1 = F_1$ (это следует непосредственно из определения подпространств $\mathcal{F}_0$, F_0, R_0 и F_1, R_1 соответственно). Начнем со следующего простейшего случая.

5. Алгебра $L(r; 1)$. В случае $q = 1$ идеал $\mathcal{I}$ порожден компонентой $\mathcal{L}_{-2}$, т. е. элементами $[\xi_i, \xi_j]$, $1 \leqslant i < j \leqslant r$. Имеем $[\xi_s, \xi_t] x_i x_j = (-\delta_{si}\delta_{tj} + \delta_{ti}\delta_{sj})$. Отсюда $W = \langle x_i^2,\ x_i x_j + x_j x_i;\ 1 \leqslant i < j \leqslant r \rangle$. Последовательность отображений P определяется линейными отображениями $\pi_0 = 0$ (так как $F_0 = \mathcal{F}_0$) и $\pi : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{V}_2$, где $\mathcal{V}_2$ — множество однородных многочленов степени 2 от коммутирующих переменных $v_1, \dots, v_r$ над тем же полем $\mathbb{K}$, которое задается равенствами $\pi(x_i^2) = 0$ для $i = 1, \dots, r$ и $\pi(x_i x_j) = v_i v_j$, $\pi(x_j x_i) = -v_i v_j$ для $i < j$; $i, j = 1, \dots, r$.

Легко видеть, что ядро P линейно порождается элементами вида $f(x_1, \dots, x_r)\xi_j$, где $f(x_1, \dots, x_r)$ — симметричный элемент в $\mathcal{T}$. Это позволяет установить изоморфизм $\mathcal{R}$ с алгеброй Витта (W_r — бесконечномерная общая алгебра картановского типа) с помощью соответствия $f(x_1, \dots, x_r)\xi_j \to \overline{f}(t_1, \dots, t_r)\partial_j$, где f — соответствующий симметрический многочлен от коммутирующих переменных $t_1, \dots, t_r$.

6. Алгебра $L(2; 2)$. В случае $r = q = 2$ идеал $\mathcal{I}$ порожден элементами $[\xi_1, \xi_2, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2, \xi_2]$. Начальными компонентами F будут следующие:

$$F_0 = \mathcal{F}_0 = \langle g^{(-1,1)} = x_2\xi_1,\ g_1^{(0,0)} = x_1\xi_1,\ g_2^{(0,0)} = x_2\xi_2,\ g^{(1,-1)} = x_1\xi_2 \rangle;$$

$$F_1 = \langle g^{(-1,2)} = x_2^2\xi_1;\ g_1^{(0,1)} = 2x_1x_2\xi_1 + x_2x_1\xi_1,\ g_2^{(0,1)} = x_1x_2\xi_1 + x_2^2\xi_2;$$
$$g_1^{(1,0)} = x_1^2\xi_1 + x_2x_1\xi_2,\ g_2^{(1,0)} = x_1x_2\xi_2 + 2x_2x_1\xi_2;\ g^{(2,-1)} = x_1^2\xi_2 \rangle.$$

Однородные по составу элементы R будем записывать с указанием состава в качестве верхнего индекса. Пространство W линейно порождается элементами

x_2^3 $(0,3)$; $2x_1x_2^2 + x_2x_1x_2,\ x_1x_2^2 - x_2^2x_1$ $(1,2)$; $2x_1^2x_2 + x_1x_2x_1,\ x_1^2x_2 - x_2x_1^2$ $(2,1)$; x_1^3, $(3,0)$.

Отображения π_i определяются следующим образом. Так как $F_0 = \mathcal{F}_0$, то $\pi_0 = 0$ (на $\mathcal{F}_0$), а π_1 определяется на $\mathcal{F}_1$ равенствами

$$\pi_1(x_2^2\xi_1) = 0;\ \ \pi_1(x_1x_2\xi_1) = v_1v_2\partial_1,\ \ \pi_1(x_2x_1\xi_1) = -2v_1v_2\partial_1,\ \ \pi_1(x_2^2\xi_2) = -v_1v_2\partial_1;$$
$$\pi_1(x_1^2\xi_1) = v_1v_2\partial_2,\ \ \pi_1(x_1x_2\xi_2) = -v_1v_2\partial_2,\ \ \pi_1(x_2x_1\xi_2) = -2v_1v_2\partial_2;\ \ \pi_1(x_1^2\xi_2) = 0.$$

Наконец, π задается на $\mathcal{T}_3$ формулами

$$\pi(x_2^3) = 0\ (0,3);\ \ \pi(x_1x_2^2) = v_1v_2^2,\ \ \pi(x_2x_1x_2) = -2v_1v_2^2,\ \ \pi(x_2^2x_1) = v_1v_2^2\ (1,2);$$
$$\pi(x_1^2x_2) = v_1^2v_2,\ \ \pi(x_1x_2x_1) = -2v_1^2v_2,\ \ \pi(x_2x_1^2) = v_1^2v_2\ (2,1);\ \ \pi(x_1^3) = 0\ (3,0).$$

Легко видеть, что ядром π_1 является F_1, а ядром π является W.

Предложение 6.1. *Пусть* $R = \bigoplus\limits_{n=-2}^{\infty} R_n$ *— картановское продолжение* $L(2;2)$. *Тогда*

1) $R_n = R^{(-1,n+1)} \oplus R^{(0,n)} \oplus R^{(1,n-1)} \oplus \dots \oplus R^{(n-1,1)} \oplus R^{(n,0)} \oplus R^{(n+1,-1)}$, *где* $R^{(k,m)}$ *— пространство элементов состава* (k,m),

2) *при этом* $\dim R^{(k,m)} = \min\{k,m\} + 2$ *и образующие определяются индуктивно* (*по* $n = k+m$),

3) *при* $k < m$ *пространство* $R^{(k,m)}$ *порождено элементами вида*

$$g_i^{(k,m)} = \sum_{j=1}^{k+1} A_{ij}^{k,m} x_1 g_j^{(k-1,m)} + x_2 g_i^{(k,m-1)}, \quad i = 1,\dots,k+2, \quad \text{где } A_{ij}^{k,m} \in \mathbb{K},$$

4) *пространство* $R^{(k,k)}$ *порождено элементами вида*

$$g_i^{(k,k)} = \sum_{j=1}^{k+1} (A_{ij}^k x_1 g_j^{(k-1,k)} + B_{ij}^k x_2 g_j^{(k,k-1)}), \quad \text{где } A_{ij}^k, B_{ij}^k \in \mathbb{K},$$

5) *при* $k > m$ *пространство* $R^{(k,m)}$ *порождено элементами вида*

$$g_i^{(k,m)} = x_1 g_i^{(k-1,m)} + \sum_{j=1}^{m+1} B_{ij}^{k,m} x_2 g_j^{(k,m-1)}, \quad i = 1,\dots,m+2, \quad \text{где } B_{ij}^{k,m} \in \mathbb{K}.$$

В картановских продолжениях алгебр $L(r;q)$ естественно определяются автоморфизмы, индуцированные перестановкой переменных; в частности, при $r = 2$ на R имеем автоморфизм ρ, продолжающий соответствие:

$$\rho(\xi_1) = \xi_2,\ \ \rho(\xi_2) = \xi_1,\ \ \rho(x_1) = x_2,\ \ \rho(x_2) = x_1.$$

Ясно, что $\rho(R^{(k,m)}) = R^{(m,k)}$. Если $k < m$ и $\{g_i^{k,m};\ i = 1,\dots,k+2\}$ — базис $R^{k,m}$, то базис $\{g_i^{m,k};\ i = 1,\dots,k+2\}$ в $R^{m,k}$ будем выбирать так, чтобы $\rho(g_i^{k,m}) = g_{k+3-i}^{m,k}$. Это предположение для базиса сохраняем и при $m = k$, т. е. будем предполагать $\rho(g_i^{k,k}) = g_{k+3-i}^{k,k}$ за исключением случая, когда $k+3-i = i$ (k нечетно) и когда будем иметь $\rho(g_i^{k,k}) = -g_i^{k,k}$ (только для $i = \frac{1}{2}(k+3)$). Автоморфизм ρ будем называть *симметрией*.

В силу сделанных предположений для $j = 1,\dots,k+1$ будем иметь

$$B_{ij}^{m,k} = A_{k+3-i,k+2-j}^{k,m},\quad A_{ij}^{m,k} = B_{k+3-i,k+2-j}^{k,m}\ \ \text{при } k < m \text{ для } i = 1,\dots,k+2;$$

$$B^k_{i,j} = A^k_{k+3-i,k+2-j}, \quad A^k_{i,j} = B^k_{k+3-i,k+2-j} \ \text{при } i = 1, \dots, k+1, \text{ но } i \neq k+3-i,$$
$$B^k_{i,j} = -A^k_{i,k+2-j}, \quad A^k_{i,j} = -B^k_{i,k+2-j} \ \text{при } i = k+3-i.$$

Справедливость утверждений предложения 6.1 основана на нижеследующих предложениях 6.2 и 6.3. Сейчас только отметим, что $\dim R^{(k,m)} \leqslant \dim R^{(k-1,m)} + \dim R^{(k,m-1)}$ (так как $R^{(k,m)} = x_1 R^{(k-1,m)} + x_2 R^{(k,m-1)}$). Однако непосредственное вычисление начальных компонент показывает, что $\dim R^{(k,m)}$ при $k < m$ не зависит от m. Эти соображения с учетом симметрии позволяют высказать утверждения предложения 6.1 сначала как гипотезу.

Предложение 6.2. *Элементы $g_i^{(k,m)}$, определенные в предложении* 6.1, *принадлежат $R^{(k,m)}$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства*

$$A^{k,m}_{ij} - 2A^{k,m-1}_{ij} + A^{k,m-2}_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, k+1; \quad 1 \leqslant k \leqslant m-2, \tag{A}$$
$$A^{k,k+1}_{ij} - 2A^k_{ij} + B^k_{ij} = 0 \quad (m = k+1), \quad j = 1, \dots, k+1; \tag{A'}$$
$$\sum_{j=1}^{k+1} (-A^{k,m}_{ij} A^{k-1,m-2}_{js} + A^{k,m-1}_{ij} A^{k-1,m-1}_{js}) = 0, \quad s = 1, \dots, k; \quad 1 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{B}$$
$$\sum_{j=1}^{k+1} (-A^k_{ij} B^{k-1}_{jt} + B^k_{ij} A^{k-1}_{jt}) = 0, \quad t = 1, \dots, k. \tag{B'}$$

При выполнении этого условия элементы $g_i^{(k,m)}$, $i = 1, \dots, k+2$, образуют базис $R^{(k,m)}$.

Доказательство. Пусть первое утверждение предложения справедливо для элементов степени меньше n и пусть при $k + m = n$ и $k < m$ $\quad g_i^{(k,m)} = \sum_{j=1}^{k+1} A^{k,m}_{ij} x_1 g_j^{(k-1,m)} + \varepsilon x_2 g_i^{(k,m-1)}$, где $\varepsilon = 0$ или 1. Тогда, итерируя эту формулу трижды, получим

$$g_i^{(k,m)} = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{k-1} A^{k,m}_{ij} A^{k-1,m}_{js} A^{k-2,m}_{st} x_1^3 g_t^{(k-3,m)} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k+1} (A^{k,m}_{ij} A^{k-1,m}_{js} x_1^2 x_2 + A^{k,m}_{ij} A^{k-1,m-1}_{js} x_1 x_2 x_1 + \varepsilon A^{k,m-1}_{ij} A^{k-1,m-1}_{js} x_2 x_1^2) \right) g_s^{(k-2,m-1)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k+1} (A^{k,m}_{ij} x_1 x_2^2 + \varepsilon A^{k,m-1}_{ij} x_2 x_1 x_2 + \varepsilon A^{k,m-2}_{ij} x_2^2 x_1) g_j^{(k-1,m-2)} + \varepsilon x_2^3 g_i^{(k,m-3)}.$$

Найдем $P_1(g_i^{(k,m)})$. Будем иметь

$$P_1(g_i^{(k,m)}) = \sum_{s=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k+1} (A^{k,m}_{ij} A^{k-1,m}_{js} - 2A^{k,m}_{ij} A^{k-1,m-1}_{js} + \varepsilon A^{k,m-1}_{ij} A^{k-1,m-1}_{js}) \right) v_1^2 v_2 g_s^{(k-2,m-1)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k+1} (A^{k,m}_{ij} - 2\varepsilon A^{k,m-1}_{ij} + \varepsilon A^{k,m-2}_{ij}) v_1 v_2^2 g_j^{(k-1,m-2)}.$$

Равенство $P_1(g_i^{(k,m)}) = 0$ равносильно двум системам для каждого $i = 1, \dots, k+2$

$$\sum_{j=1}^{k+1}(A_{ij}^{k,m}A_{js}^{k-1,m} - 2A_{ij}^{k,m}A_{js}^{k-1,m-1} + \varepsilon A_{ij}^{k,m-1}A_{js}^{k-1,m-1}) = 0, \quad s = 1, \dots, k; \qquad (B_\varepsilon)$$

$$A_{ij}^{k,m} - 2\varepsilon A_{ij}^{k,m-1} + \varepsilon A_{ij}^{k,m-2} = 0, \quad j = 1, \dots, k+1. \qquad (A_\varepsilon)$$

(A_ε) при $\varepsilon = 1$ совпадает с (A), а (B_ε) при $\varepsilon = 1$ можно заменить на (B) (используя (A)): $\sum\limits_{j=1}^{k+1}(-A_{ij}^{k,m}A_{js}^{k-1,m-2} + A_{ij}^{k,m-1}A_{js}^{k-1,m-1}) = 0$, $s = 1, \dots, k$, что доказывает первое утверждение предложения для $k < m-2$.

Действительно, каждый элемент $f^{(k,m)} \in \mathcal{F}^{(k,m)}$ единственным образом представляется в виде $f^{(k,m)} = x_1 f^{(k-1,m)} + x_2 f^{(k,m-1)}$. Если при этом $f^{(k-1,m)}, f^{(k,m-1)} \in R$, то, для того чтобы $f^{(k,m)} \in R$, достаточно выполнения равенства $P_1(f^{(k,m)}) = 0$ (так как функция P_t линейная и $P_t(x_i g) = x_i P_{t-1}(g)$).

Отсюда, в частности, следует $\dim R^{(k,m)} \geqslant \dim R^{(k,m-1)}$ (элементы $g_i^{(k,m)}$, i=$1, \dots, k+2$, линейно независимы, так как $g_i^{(k,m-1)}$, $i = 1, \dots, k+2$, — базис). Поэтому $\dim R^{(k,m)}$ может быть больше $\dim R^{(k,m-1)}$ только в том случае, когда $R^{(k,m)}$ содержит ненулевые элементы из $x_1 R^{(k-1,m)}$. Однако равенства (A') при $\varepsilon = 0$ дают $A_{ij}^{k,m} = 0$, $j = 1, \dots, k+1$, т. е. таких элементов в $R^{(k,m)}$ не существует. Это доказывает второе утверждение предложения для $k < m-2$.

Случай $m = k+2$ ничем не отличается от рассмотренного, так как если в последней итерации (когда используются элементы из $R^{(k,k)}$) предполагать, что $g_i^{(k,m-3)}$ — произвольный элемент из $R^{(k,m-3)}$, то он все равно войдет в выражение исходного элемента с множителем x_2^3 слева и при нахождении P_1 пропадет.

Случаи $m = k+1$ и $m = k$ доказываются аналогично. □

Предложение 6.3. 1) *Пространство* $R^{(-1,m)}$ *порождено элементом* $g^{(-1,m)} = x_2 g^{(-1,m-1)} = x_2^m \xi_1$.

2) *Пространство* $R^{(k,m)}$ *при* $0 \leqslant k < m$ *порождено элементами*

$$g_i^{(k,m)} = (m-k)x_1 g_{i-1}^{(k-1,m)} + (m-k+1)x_1 g_i^{(k-1,m)} + x_2 g_i^{(k,m-1)} \quad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant i_0;$$

$$g_{i_0+1}^{(k,m)} = (m-k)x_1 g_{i_0}^{(k-1,m)} - (m-k+1)x_1 g_{i_0+1}^{(k-1,m)} + x_2 g_{i_0+1}^{(k,m-1)} \quad \text{при } i_0 < k+1;$$

$$g_i^{(k,m)} = -(m-k)x_1 g_{i-1}^{(k-1,m)} - (m-k+1)x_1 g_i^{(k-1,m)} + x_2 g_i^{(k,m-1)} \quad \text{при } i_0+1 < i < k+2;$$

при $m = k$ *— элементами*

$$g_i^{(k,k)} = x_1 g_i^{(k-1,k)} - x_2 g_{i-1}^{(k,k-1)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant i_0; \quad g_i^{(k,k)} = -x_1 g_{i+1}^{(k-1,k)} + x_2 g_i^{(k,k-1)}, \quad i_0 < i \leqslant k+2,$$

где $i_0 = [\frac{k+3}{2}]$ *и* $g_0^{(k-1,m)} = 0$, $g_1^{(-1,m)} = g^{(-1,m)}$, $g_2^{(-1,m)} = 0$, $g_{k+2}^{(k-1,m)} = 0$.

3) *Пространство* $R^{(k,m)}$ *при* $k > m$ *определяется с помощью симметрии* ρ.

Для доказательства достаточно проверить коэффициенты приведенных формул на выполнение соотношений (A), (A'), (B), (B'). □

7. Алгебра $L(2;3) = \mathcal{L}/\mathcal{I}$. Здесь $\mathcal{L}$ — опять свободная алгебра Ли, порожденная $L_{-1} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ над произвольным полем $\mathbb{K}$, и $\mathcal{I}$ — идеал в $\mathcal{L}$, порожденный $[\xi_1, \xi_2, \xi_1, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2, \xi_1, \xi_2]$,

$[\xi_1,\xi_2,\xi_2,\xi_2]$. Начальные компоненты пространства F:

$$F_0=\langle g^{(-1,1)}=x_2\xi_1,\ g_1^{(0,0)}=x_1\xi_1,\ g_2^{(0,0)}=x_2\xi_2,\ g^{(1,-1)}=x_1\xi_2\rangle,$$
$$F_1=F^{(0,1)}\oplus F^{(1,0)}=\langle g^{(0,1)}=3x_1x_2\xi_1-x_2x_1\xi_1+2x_2^2\xi_2,\ g^{(1,0)}=2x_1^2\xi_1-x_1x_2\xi_2+3x_2x_1\xi_2\rangle,$$
$$F_2=F^{(-1,3)}\oplus F^{(0,2)}\oplus F^{(1,1)}\oplus F^{(2,0)}\oplus F^{(3,-1)},$$

где

$$F^{(-1,3)}=\langle x_2^3\xi_1\rangle,\quad F^{(0,2)}=\langle 3x_1x_2^2\xi_1+x_2x_1x_2\xi_1,\ x_2x_1x_2\xi_1+x_2^2x_1\xi_1,\ x_2^2x_1\xi_1-3x_2^3\xi_2\rangle,$$
$$F^{(1,1)}=\langle 2x_1^2x_2\xi_1+x_1x_2x_1\xi_1,\ x_2x_1^2\xi_1,\ x_1x_2x_1\xi_1-x_2x_1x_2\xi_2,\ x_1x_2^2\xi_2,\ x_2x_1x_2\xi_2+2x_2^2x_1\xi_2\rangle,$$
$$F^{(2,0)}=\langle 3x_1^3\xi_1-x_1^2x_2\xi_2,\ x_1^2x_2\xi_2+x_1x_2x_1\xi_2,\ x_1x_2x_1\xi_2+3x_2x_1^2\xi_2\rangle,\quad F^{(3,-1)}=\langle x_1^3\xi_2\rangle.$$

Наконец, $W=W^{(0,4)}\oplus W^{(1,3)}\oplus W^{(2,2)}\oplus W^{(3,1)}\oplus W^{(4,0)}$, где

$$W^{(0,4)}=\langle x_2^4\rangle,\quad W^{(1,3)}=\langle 3x_1x_2^3+x_2x_1x_2^2,\ x_2x_1x_2^2+x_2^2x_1x_2,\ x_2^2x_1x_2+3x_2^3x_1\rangle,$$
$$W^{(2,2)}=\langle 2x_1^2x_2^2+(x_1x_2)^2,\ x_1x_2^2x_1,\ (x_1x_2)^2+(x_2x_1)^2,\ x_2x_1^2x_2,\ (x_2x_1)^2+2x_2^2x_1^2\rangle,$$
$$W^{(3,1)}=\langle 3x_1^3x_2+x_1^2x_2x_1,\ x_1^2x_2x_1+x_1x_2x_1^2,\ x_1x_2x_1^2+3x_2x_1^3\rangle,\quad W^{(4,0)}=\langle x_1^4\rangle.$$

Последовательность P определяется здесь отображениями $\pi_0=0$, $\pi_1:\mathcal{F}_1\to\mathcal{V}_1=\langle v_2^2\partial_1\ (-1,2);\ v_1v_2\partial_1,\ v_2^2\partial_2\ (0,1);\ v_1^2\partial_1,\ v_1v_2\partial_2\ (1,0);\ v_1^2\partial_2\ (2,-1)\rangle_{\mathbb{K}}$ (после элементов дан их состав) и задается формулами

$$\pi_1(x_2^2\xi_1)=v_2^2\partial_1,\ \ \pi_1(x_1x_2\xi_1)=v_1v_2\partial_1,\ \ \pi_1(x_2x_1\xi_1)=3v_1v_2\partial_1+2v_2^2\partial_2,\ \ \pi_1(x_2^2\xi_2)=v_2^2\partial_2,$$
$$\pi_1(x_1^2\xi_1)=v_1^2\partial_1,\ \ \pi_1(x_1x_2\xi_2)=2v_1^2\partial_1+3v_1v_2\partial_2,\ \ \pi_1(x_2x_1\xi_2)=v_1v_2\partial_2,\ \ \pi_1(x_1^2\xi_2)=v_1^2\partial_2.$$

Отображение $\pi_2:\mathcal{F}_2\to\mathcal{V}_2=\langle v_1^2,v_1v_2,v_2^2\rangle_{\mathbb{K}}$ определяется формулами

$$\pi_2(x_2^3\xi_1)=0,\ \ \pi_2(x_1x_2^2\xi_1)=v_2^2,\ \ \pi_2(x_2x_1x_2\xi_1)=-3v_2^2,\ \ \pi_2(x_2^2x_1\xi_1)=3v_2^2,\ \ \pi_2(x_2^3\xi_2)=v_2^2,$$
$$\pi_2(x_1^2x_2\xi_1)=v_1v_2,\ \ \pi_2(x_1x_2x_1\xi_1)=-2v_1v_2,\ \ \pi_2(x_1x_2^2\xi_2)=0,$$
$$\pi_2(x_2x_1^2\xi_1)=0,\ \ \pi_2(x_2x_1x_2\xi_2)=-2v_1v_2,\ \ \pi_2(x_2^2x_1\xi_2)=v_1v_2,$$
$$\pi_2(x_1^3\xi_1)=v_1^2,\ \ \pi_2(x_1^2x_2\xi_2)=3v_1^2,\ \ \pi_2(x_1x_2x_1\xi_2)=-3v_1^2,\ \ \pi_2(x_2x_1^2\xi_2)=v_1^2,\ \ \pi_2(x_1^3\xi_2)=0.$$

Наконец, $\pi:\mathcal{T}_4\to\mathcal{V}=\langle v_1^4,\ v_1^3v_2,\ v_1^2v_2^2,\ v_1v_2^3,\ v_2^4\rangle_{\mathbb{K}}$ и задается формулами

$$\pi(x_2^4)=0,\ \ \pi(x_1x_2^3)=v_1v_2^3,\ \ \pi(x_2x_1x_2^2)=-3v_1v_2^3,\ \ \pi(x_2^2x_1x_2)=3v_1v_2^3,\ \ \pi(x_2^3x_1)=-v_1v_2^3,$$
$$\pi(x_1^2x_2^2)=v_1^2v_2^2,\ \ \pi((x_1x_2)^2)=-2v_1^2v_2^2,\ \ \pi(x_1x_2^2x_1)=0,$$
$$\pi(x_2x_1^2x_2)=0,\ \ \pi((x_2x_1)^2)=2v_1^2v_2^2,\ \ \pi(x_2^2x_1^2)=-v_1^2v_2^2,$$
$$\pi(x_1^3x_2)=v_1^3v_2,\ \ \pi(x_1^2x_2x_1)=-3v_1^3v_2,\ \ \pi(x_1x_2x_1^2)=3v_1^3v_2,\ \ \pi(x_2x_1^3)=-v_1^3v_2,\ \ \pi(x_1^4)=0.$$

Переходя к построению картановского продолжения $L(2;3)$, отметим, что имеют место $R_0=F_0$, $R_1=F_1$, а также справедлива

Лемма 7.1. *Для $m\geqslant 2$ имеем $R^{(-1,m)}=0$ при любой характеристике p поля $\mathbb{K}$ и $R^{(0,m)}=0$ при $p\neq 2,5$ (в силу симметрии для $k\geqslant 2$ имеем $R^{(k,-1)}=0$ при любой p, а также $R^{(k,0)}=0$ при $p\neq 2,5$).*

Доказательство. Всякий элемент $f\in F^{(-1,m)}$ пропорционален $x_2^m\xi_1$. Однако, если $m\geqslant 2$, то $P_{m-1}(\lambda x_2^m\xi_1)=\lambda x_2^{m-2}\pi_1(x_2^2\xi_1)=\lambda x_2^{m-2}v_2^2\partial_1=0$ ($\lambda\in\mathbb{K}$) только при $\lambda=0$, т. е. $R^{(-1,m)}=0$. Далее, в силу доказанного для $m\geqslant 2$ имеем $R^{(0,m)}\subseteq x_2R^{(0,m-1)}$, откуда индукцией по m

получим $f = \lambda x_2^{m-1} g^{(0,1)}$ и $P_{m-1}(f) = \lambda x_2^{m-2} \pi_2(3x_2x_1x_2\xi_1 - x_2^2x_1\xi_1 + 2x_2^3\xi_2) = -10\lambda x_2^{m-2} v_2^2$, т. е. $R^{(0,m)} = 0$, если $p \neq 2, 5$. □

Лемма 7.2. *Имеют место равенства*

$$R^{(0,2)} = 0, \text{ если } p \neq 2,5, \text{ и } R^{(0,2)} = \langle x_2 g^{(0,1)} \rangle, \text{ если } p = 2,5;$$

$$R^{(1,1)} = \langle g^{(1,1)} = x_1 g^{(0,1)} - x_2 g^{(1,0)} \rangle, \text{ если } p \neq 5, \text{ и}$$

$$R^{(1,1)} = \langle g_1^{(1,1)} = x_1 g^{(0,1)},\ g_2^{(1,1)} = x_2 g^{(1,0)} \rangle, \text{ если } p = 5;$$

$$R^{(2,0)} = 0, \text{ если } p \neq 2,5, \text{ и } R^{(2,0)} = \langle x_1 g^{(1,0)} \rangle, \text{ если } p = 2,5.$$

Доказательство. В силу леммы 7.1 остается найти $R^{(1,1)}$. Пусть $f \in R^{(1,1)}$, тогда

$$f = Ax_1g^{(0,1)} + Bx_2g^{(1,0)} = A(3x_1^2x_2\xi_1 - x_1x_2x_1\xi_1 + 2x_1x_2^2\xi_2) + B(2x_2x_1^2\xi_1 - x_2x_1x_2\xi_2 + 3x_2^2x_1\xi_2)$$

и

$$P_1(f) = A(3\pi_2(x_1^2x_2\xi_1) - \pi_2(x_1x_2x_1\xi_1) + 2\pi_2(x_1x_2^2\xi_2)) + \\ + B(2\pi_2(x_2x_1^2\xi_1) - \pi_2(x_2x_1x_2\xi_2) + 3\pi_2(x_2^2x_1\xi_2)) = 5(A+B)v_1v_2.$$

Отсюда $P_1(f) = 0$, если $p = 5$, и $f \in R^{(1,1)}$ при любых $A, B \in \mathbb{K}$. Если же $p \neq 5$, то $f \in R^{(1,1)}$ только при $A + B = 0$. □

Лемма 7.3. *При $p > 5$ имеем $R_3 = R^{(1,2)} \oplus R^{(2,1)}$, где $R^{(1,2)} = \langle g^{(1,2)} = x_2 g^{(1,1)} \rangle$ и $R^{(2,1)} = \langle g^{(2,1)} = x_1 g^{(1,1)} \rangle$.*

Доказательство. Пусть $f \in R^{(1,2)}$. Тогда $f = x_2g^{(1,1)} = x_2(x_1(3x_1x_2\xi_1 - x_2x_1\xi_1 + 2x_2^2\xi_2) - x_2(2x_1^2\xi_1 - x_1x_2\xi_2 + 3x_2x_1\xi_2))$ (так как $R^{(0,2)} = 0$, а $R^{(1,1)}$ при $p \neq 2,5$ одномерно). Имеем $P_1(f) = 3\pi(x_2x_1^2x_2)\xi_1 - \pi((x_2x_1)^2)\xi_1 + 2\pi(x_2x_1x_2^2)\xi_2 - 2\pi(x_2^2x_1^2)\xi_1 + \pi(x_2^2x_1x_2)\xi_2 - 3\pi(x_2^3x_1)\xi_2 = -2v_1^2v_2^2\xi_1 + 2v_1^2v_2^2\xi_1 = 0$, т.е. f пропорционально $x_2g^{(1,1)}$. В силу симметрии имеем второе равенство. □

Предложение 7.1. *Картановское продолжение алгебры Ли $L(2,3)$ для $p > 5$ обрывается после компоненты степени 3 и изоморфно классической алгебре Ли G_2.*

Доказательство. Должны иметь $R_4 = R^{(1,3)} \oplus R^{(2,2)} \oplus R^{(3,1)}$. Если $f \in R^{(1,3)}$, то $f = x_2g^{(1,2)} = x_2(3x_2x_1^2x_2\xi_1 - (x_2x_1)^2\xi_1 + 2x_2x_1x_2^2\xi_2 - 2x_2^2x_1^2\xi_1 + x_2^2x_1x_2\xi_2 - 3x_2^3x_1\xi_2)$ и $P_1(g^{(1,3)}) = 3\pi(x_2^2x_1^2)x_2\xi_1 - \pi(x_2^2x_1x_2)x_1\xi_1 + 2\pi(x_2^2x_1x_2)x_2\xi_2 - 2\pi(x_2^3x_1)x_1\xi_1 + \pi(x_2^3x_1)x_2\xi_2 - 3\pi(x_2^4)x_1\xi_2 = -3v_1^2v_2^2 \neq 0$ при $p \neq 3$. Отсюда для $p \neq 2,3,5$ имеем $R^{(1,3)} = 0$. В силу симметрии и $R^{(3,1)} = 0$ для $p \neq 2,3,5$.

Если $f \in R^{(2,2)}$, то для некоторых $A, B \in \mathbb{K}$ имеем

$$f = Ax_1g^{(1,2)} + Bx_2g^{(2,1)} = A(3x_2x_1^2x_2\xi_1 - (x_2x_1)^2\xi_1 + 2x_2x_1x_2^2\xi_2 - 2x_2^2x_1^2\xi_1 + x_2^2x_1x_2\xi_2 - 3x_2^3x_1\xi_2) + \\ + Bx_2(3x_1^3x_2\xi_1 - x_1^2x_2x_1\xi_1 + 2x_1^2x_2^2\xi_2 - 2x_1x_2x_1^2\xi_1 + (x_1x_2)^2\xi_2 - 3x_1x_2^2x_1\xi_2)$$

и

$$P_1(f) = A(3\pi(x_1x_2x_1^2)x_2\xi_1 - \pi((x_1x_2)^2)x_1\xi_1 + 2\pi(x_1x_2)^2)x_2\xi_2 - \\ - 2\pi(x_1x_2^2x_1)x_1\xi_1 + \pi(x_1x_2^2x_1)x_2\xi_2 - 3\pi(x_1x_2^3)x_1\xi_2 + B(3\pi(x_2x_1^3)x_2\xi_1 - \\ - \pi(x_2x_1^2x_2)x_1\xi_1 + 2\pi(x_2x_1^2x_2)x_2\xi_2 - 2\pi((x_2x_1)^2)x_1\xi_1 + \pi((x_2x_1)^2)x_2\xi_2 - \\ - 3\pi(x_2x_1x_2^2)x_1\xi_2) = (2A - 4B)v_1^2v_2^2x_1\xi_1 + (-4A + 2B)v_1^2v_2^2x_2\xi_2.$$

Отсюда $P_1(f)=0$ равносильно системе $2A-4B=0$, $-4A+2B=0$. Так как определитель этой системы равен -12, то при $p\neq 2,3$ она имеет только нулевое решение, т.е. $R^{(2,2)}=0$. □

8. Случай $L(2;3)$ при $p=5$.

Предложение 8.1. *Картановское продолжение алгебры $L(2,3)$ задается компонентами $R_{3m}=\bigoplus\limits_{k=m-1}^{2m+1}R^{(k,3m-k)}$, $R_{3m+1}=\bigoplus\limits_{k=m}^{2m+1}R^{(k,3m-k+1)}$, $R_{3m+2}=\bigoplus\limits_{k=m}^{2m+2}R^{(k,3m-k+2)}$, где*

$$\begin{aligned}
R^{(m-1,2m+1)}&=\langle g_1^{(m-1,2m+1)}\rangle,\\
R^{(k,3m-k)}&=\langle g_1^{(k,3m-k)},\ g_2^{(k,3m-k)}\rangle,\quad k=m,\dots,2m,\\
R^{(2m+1,m-1)}&=\langle g_2^{(2m+1,m-1)}\rangle,\\
R^{(k,3m-k+1)}&=\langle g_1^{(k,3m-k+1)}\rangle,\quad k=m,\dots,2m+1,\\
R^{(m,2m+2)}&=\langle g_1^{(m,2m+2)}\rangle,\\
R^{(k,3m-k+2)}&=\langle g_1^{(k,3m-k+2)},\ g_2^{(k,3m-k+2)}\rangle,\quad k=m+1,\dots,2m+1,\\
R^{(2m+2,m)}&=\langle g_2^{(2m+2,m)}\rangle;
\end{aligned}\tag{8.1}$$

при этом

$$\begin{aligned}
g_1^{(k,3m-k)}&=x_1g_1^{(k-1,3m-k)}+x_2(-g_1^{(k,3m-k-1)}+2g_2^{(k,3m-k-1)}),\\
g_2^{(k,3m-k)}&=x_1(2g_1^{(k-1,3m-k)}-g_2^{(k-1,3m-k)})+x_2g_2^{(k,3m-k-1)},\\
g_1^{(k,3m-k+1)}&=x_1g_1^{(k-1,3m-k+1)}+x_2g_2^{(k,3m-k)},\\
g_1^{(k,3m-k+2)}&=x_2g_1^{(k,3m-k+1)},\\
g_2^{(k,3m-k+2)}&=-x_1g_1^{(k-1,3m-k+2)}.
\end{aligned}\tag{8.2}$$

Все остальные компоненты нулевые.

Доказательство. Проведем индукцию по степени. Компоненты малых степеней находятся непосредственно. Предположим, что для степени $<n$ все утверждения предложения 8.1 и равенства (8.1), (8.2) справедливы.

1) Пусть $n=3m$ и $g^{(k,3m-k)}\in R^{(k,3m-k)}$. Так как для степени $<n$ соотношения (8.1) предполагаются справедливыми, то для некоторых $A,B,C,D\in\mathbb{K}$ имеем

$$g^{(k,3m-k)}=x_1(Ag_1^{(k-1,3m-k)}+Bg_2^{(k-1,3m-k)})+x_2(Cg_1^{(k,3m-k-1)}+Dg_2^{(k,3m-k-1)}).$$

Преобразуем правую часть этого равенства, используя (8.2) повторно три раза

$$\begin{aligned}
g^{(k,3m-k)}={}&A((x_1x_2x_1^2g_1^{(k-3,3m-k-1)}+(x_1x_2)^2(-g_1^{(k-2,3m-k-2)}+2g_2^{(k-2,3m-k-2)}))+\\
&+(x_1x_2^2x_1(2g_1^{(k-2,3m-k-2)}-g_2^{(k-2,3m-k-2)})+x_1x_2^3g_2^{(k-1,3m-k-3)}))-\\
&-B((x_1^4g_1^{(k-4,3m-k)}+x_1^3x_2(-g_1^{(k-3,3m-k-1)}+2g_2^{(k-3,3m-k-1)}))+\\
&+(x_1^2x_2x_1(2g_1^{(k-3,3m-k-1)}-g_2^{(k-3,3m-k-1)})+x_1^2x_2^2g_2^{(k-2,3m-k-2)}))+\\
&+C((x_2^2x_1^2g_1^{(k-2,3m-k-2)}+x_2^2x_1x_2(-g_1^{(k-1,3m-k-3)}+2g_2^{(k-1,3m-k-3)}))+\\
&+(x_2^3x_1(2g_1^{(k-1,3m-k-3)}-g_2^{(k-1,3m-k-3)})+x_2^4g_2^{(k,3m-k-4)}))-
\end{aligned}$$

$$- D((x_2x_1^3g_1^{(k-3,3m-k-1)} + x_2x_1^2x_2(-g_1^{(k-2,3m-k-2)} + 2g_2^{(k-2,3m-k-2)}))+ \\ + ((x_2x_1)^2(2g_1^{(k-2,3m-k-2)} - g_2^{(k-2,3m-k-2)}) + x_2x_1x_2^2g_2^{(k-1,3m-k-3)})).$$

Полученная формула позволяет найти

$$P_1(g^{(k,3m-k)}) = (3A+7B+D)v_1^3v_2g_1^{(k-3,3m-k-1)} + (2A-C-4D)v_1^2v_2^2g_1^{(k-2,3m-k-2)} - \\ - 5Cv_1v_2^3g_1^{(k-1,3m-k-3)} - 5Bv_1^3v_2g_2^{(k-3,3m-k-1)} + (-4A-B+2D)v_1^2v_2^2g_2^{(k-2,3m-k-2)} + \\ + (A+7C+3D)v_1v_2^3g_2^{(k-1,3m-k-3)}.$$

Отсюда $P_1(g^{(k,3m-k)}) = 0$ равносильно системе $2A - C + 2D = 0$, $2A - B + 2C = 0$, имеющей два независимых решения $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 2$ и $A = 2$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 1$, которые подтверждают формулы (8.1) и (8.2) для $n = 3m$. При этом $g^{(k,3m-k)} = x_1(Ag_1^{(k-1,3m-k)} + Bg_2^{(k-1,3m-k)}) + x_2(Cg_1^{(k,3m-k-1)} + Cg_2^{(k,3m-k-1)}) = 0$ для $k = -1, 0, \dots, m-2;\ 2m+2, \dots, 3m+1$, так как все соответствующие элементы правой части по предположению индукции нулевые. Кроме того, при $k = m-1$ и $k = 2m+1$ соответственно имеем $g^{(m-1,2m+1)} = Cx_2g_1^{(m-1,2m)}$ и $g^{(2m+1,m-1)} = Bx_1g_2^{(2m,m-1)}$. Значит, подпространства $R^{(m-1,2m+1)} = \langle g_1^{(m-1,2m+1)} = -x_2g_1^{(m-1,2m)}\rangle$ и $R^{(2m+1,m-1)} = \langle g_2^{(2m+1,m-1)} = x_1g_2^{(2m,m-1)}\rangle$ одномерны. □

Доказательства случаев $n = 3m+1$ и $n = 3m+2$ используют аналогичную методику, соответствующие вычисления опускаем. Для данной алгебры R приведем структурные формулы, которые определяются общими формулами умножения для $\mathcal{R}$ ([2], (8)). Из двух симметричных формул выписываем только одну.

Под *симметрией*, как и раньше, понимаем автоморфизм ρ алгебры R, который продолжает соответствие $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$, $x_1 \leftrightarrow x_2$. Базисные элементы алгебры R выбраны так, что $\rho(g_1^{(k,3m-k)}) = (-1)^{m+1}g_2^{(k,3m-k)}$, $\rho(g_1^{(k,3m-k+1)}) = (-1)^{m+1}g_1^{(3m-k+1,k)}$, $\rho(g_1^{(k,3m-k+2)}) = (-1)^m g_2^{(3m-k+2,k)}$,

$$[g_1^{(k,3m-k)}, g_1^{(l,3n-l)}] = \left[\binom{k+l-m-n+1}{k-m} - \binom{k+l-m-n+1}{k-m-1}\right]\binom{2(m+n)-k-l}{2m-k}g_1^{(k+l,3(m+n)-k-l)},$$

$$[g_1^{(k,3m-k)}, g_2^{(l,3n-l)}] = \\ = \binom{k+l-m-n+1}{k-m+1}\binom{2(m+n)-k-l}{2m-k-1}g_1^{(k+l,3(m+n)-k-l)} - \binom{k+l-m-n}{k-m+1}\binom{2(m+n)-k-l+1}{2m-k}g_2^{(k+l,3(m+n)-k-l)},$$

$$[g_2^{(k,3m-k)}, g_1^{(l,3n-l+1)}] = \binom{k+l-m-n}{k-m}\left[2\binom{2m+2n-k-l+1}{2m-k} - \binom{2m+2n-k-l+1}{2m-k+1}\right]g_1^{(k+l,3(m+n)-k-l+1)},$$

$$[g_1^{(k,3m-k)}, g_1^{(l,3n-l+2)}] = -\binom{k+l-m-n+1}{k-m+1}\binom{2m+2n-k-l+1}{2m-k}g_1^{(k+l,3(m+n)-k-l+2)},$$

$$[g_1^{(k,3m-k)}, g_2^{(l,3n-l+2)}] = \binom{k+l-m-n}{k-m+1}\binom{2m+2n-k-l+1}{2m-k-1}g_1^{(k+l,3m+3n-k-l+2)} - \\ - \left[\binom{k+l-m-n}{k-m+1} + \binom{k+l-m-n-1}{k-m}\right]\binom{2m+2n-k-l+2}{2m-k}g_2^{(k+l,3m+3n-k-l+2)},$$

$$[g_1^{(k,3m-k+1)}, g_1^{(l,3n-l+1)}] = -2\binom{k+l-m-n}{k-m}\left[\binom{2m+2n-k-l+1}{2m-k} - \binom{2m+2n-k-l+1}{2m-k+1}\right]g_1^{(k+l,3m+3n-k-l+2)} + \\ +2\left[\binom{k+l-m-n-1}{k-m-1} - \binom{k+l-m-n-1}{k-m}\right]\binom{2m+2n-k-l+2}{2m-k+1}g_2^{(k+l,3m+3n-k-l+2)},$$

$$[g_1^{(k,3m-k+1)}, g_1^{(l,3n-l+2)}] = -\binom{k+l-m-n}{k-m}\binom{2m+2n-k-l+2}{2m-k+1}g_1^{(k+l,3m+3n-k-l+3)},$$

$$[g_1^{(k,3m-k+2)}, g_2^{(l,3n-l+2)}] = -\binom{k+l-m-n-1}{k-m}\binom{2m+2n-k-l+3}{2m-k+1}g_1^{(k+l,3m+3n-k-l+4)},$$

$[g_1^{(k,3m-k+2)}, g_1^{(l,3n-l+2)}] = 0.$

Формулы можно проверить и индуктивно, используя равенство $\xi[u,v] = [\xi u, v] + [u, \xi v]$ ($\xi \in R_1$, $u, v \in R^+$). Данная алгебра изоморфна особой алгебре Меликяна [3], [4].

9. Случай $L(2;3)$ при $p = 3$.

Предложение 9.1. *Если $L = L(2;3)$ и $p = 3$, то $R(L) = \bigoplus_{n=-3}^{\infty} R_n$, где $R_0 = \langle g_1^{(-1,1)} = x_2\xi_1$, $g_1^{(0,0)} = x_1\xi_1$, $g_2^{(0,0)} = x_2\xi_2$, $g_1^{(1,-1)} = x_1\xi_2\rangle$, и для $n \geqslant 1$ имеем*

$$R_{2k} = \langle g^{(k,k)}\rangle \ (k \geqslant 1), \quad R_{2k+1} = \langle g^{(k+1,k)},\ g^{(k,k+1)}\rangle \ (k \geqslant 0);$$

элементы $g^{(k,k)}$, $g^{(k+1,k)}$, $g^{(k,k+1)}$ определяются равенствами

$$g^{(k,k)} = -x_1 g^{(k-1,k)} + x_2 g^{(k,k-1)}, \quad g^{(k,k+1)} = x_2 g^{(k,k)}, \quad g^{(k+1,k)} = x_1 g^{(k,k)}.$$

В частности, $g^{(0,1)} = x_2(-x_1\xi_1 + 2x_2\xi_2)$, $g^{(1,0)} = x_1(2x_1\xi_1 - x_2\xi_2)$ и $R^{(i,2k-i)} = 0$ для $i = -1, \ldots, k-1; k+1, \ldots, 2k+1$; $R^{(i,2k+1-i)} = 0$ для $i = -1, \ldots, k-1; k+2, \ldots, 2k+2$.

При этом имеют место структурные формулы

$$[g^{(i,i)}, g^{(j,j)}] = \tfrac{(i+j+1)!}{(i+1)!(j+1)!}(j-i) g^{(i+j,i+j)};$$
$$[g^{i+1,i}, g^{j+1,j}] = 0, \quad [g^{i,i+1}, g^{j,j+1}] = 0, \quad [g^{i+1,i}, g^{j,j+1}] = -\tbinom{i+j+2}{i+1} g^{i+j+1,i+j+1};$$
$$[g^{(i,i)}, g^{(j+1,j)}] = \tbinom{i+j+2}{i+1} g^{(i+j+1,i+j)}, \quad [g^{(i,i)}, g^{(j,j+1)}] = \tbinom{i+j+2}{i+1} g^{(i+j,i+j+1)}.$$

10. Случай $L(2;3)$ при $p = 2$.

Предложение 10.1. *Если $L = L(2;3)$ и $p = 2$, то $R(L) = \bigoplus_{n=-3}^{\infty} R_n$, где*

$$\begin{aligned} R_{3k-1} &= \langle g^{(i,3k-i-1)},\ i = k-1, \ldots, 2k\rangle; \\ R_{3k} &= \langle g_1^{(i,3k-i)},\ i = k, \ldots, 2k+1;\ g_2^{(i,3k-i)},\ i = k-1, \ldots, 2k\rangle; \\ R_{3k+1} &= \langle g^{(i,3k-i+1)},\ i = k, \ldots, 2k+1\rangle, \quad k = 0,1,2,\ldots\ ; \quad j = 1, \ldots, i+2, \end{aligned} \tag{10.1}$$

а элементы $g^{(i,n-i)}$ определяются индуктивно формулами

$$\begin{aligned} g^{(i,3k-i-1)} &= x_1 g^{(i-1,3k-i-1)} + x_2 g^{(i,3k-i-2)},\ i = k-1, \ldots, 2k; \\ g_1^{(i,3k-i)} &= x_1 g^{(i-1,3k-i)}, \quad i = k, \ldots, 2k+1; \\ g_2^{(i,3k-i)} &= x_2 g^{(i,3k-i-1)}, \quad i = k-1, \ldots, 2k; \\ g^{(i,3k-i+1)} &= x_1 g_2^{(i-1,3k-i+1)} + x_2 g_1^{(i,3k-i)}, \quad i = k, \ldots, 2k+1. \end{aligned}$$

При этом предполагаем, что $R_n = \bigoplus_{i=-1}^{n+1} R^{(i,n-i)}$, где компоненты порождены соответствующими базисными элементами $g^{i,n-i}$, которые считаются равными нулю вне указанных в (10.1) пределов.

Непосредственная проверка показывает, что алгебра $L(2;4)$ имеет $F_1 = 0$, т.е. картановское продолжение обрывается после нулевой компоненты.

Литература

[1] Кантор И.Л. *Градуированные алгебры Ли* – Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. Московск. ун-т, 1970. – Вып. XV. – С. 227–266.

[2] Ермолаев Ю.Б. *Универсальное картановское продолжение* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 11. – С. 22–32.

[3] Kuznetsov M.I. *The Melikyan algebras as Lie algebras of the type* G_2 // Communications in Algebra. – 1991. – V. 19. – № 4. – P. 1281–1312.

[4] Меликян Г.М. *О простых алгебрах Ли характеристики* 5 // УМН. – 1980. – Т. 35. – № 1. – С. 203–204.

Ю.Б. Ермолаев

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Yu.B. Ermolaev

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia