**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования**

**КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ**

Направление: 01.03.01 — Математика

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

(Бакалаврская работа)

# Комбинаторные свойства вещественных матриц

**Работа завершена:**

«____»________________2015 г. ____________С.Р. Гильманшина

**Работа допущена к защите:**

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и мат. логики

«____»________________2015 г. _________________Ю.А. Альпин

Заведующий кафедрой алгебры и мат. логики
доктор физико-математических наук, профессор

«____»________________2015 г. _________________М. М. Арсланов

Казань — 2015 г.

**Оглавление**

## Введение

Знаковые портреты матриц - это такие матрицы, которые показывают взаимное расположение положительных, отрицательных и нулевых элементов в исходной матрице. Удобнее всего рассматривать портреты неотрицательных матриц, т.к. портрет знаковой матрицы полностью определяют портрет любой степени этой матрицы. Это свойство неотрицательных матриц хорошо известно и давно используется в теории неотрицательных матриц (см. [1],[3]). Знаковые портреты вещественных матриц этим свойством не обладают, но все же некоторую информацию о знаковых портретах степеней можно получить. Продолжая исследования [5], в работе подробно рассматривается вопрос о том, какую именно информацию можно получить.

В первых двух параграфах мы вводим понятия о полукольцах, определение антикольца и знакового портрета матрицы. Рассматриваем графы над полукольцами и их свойства.

В третьем параграфе мы возвращаемся к знаковым портретам вещественных матриц. Используя материал предыдущих параграфов, мы выясняем, в какой мере мы можем определить знаковый портрет матрицы $A^k$ по портрету матрицы $A$, дается частное условие того, что знаковый портрет $A$ полностью определяется знаковым портретом матрицы $A$. Рассматриваем критерии и время появления элемента неопределенности в позициях знакового портрета при возведении его в степень. Тут же рассматриваются некоторые примеры матриц и их графов.

В четвертом параграфе мы переходим к более частному случаю, а именно к портретам матриц состоящих только из положительных и отрицательных чисел. В данном случае мы довольно скоро можем судить о появлении или непоявлении неопределенности, при возведении их в степень.

## §1. Понятия о полукольцах и полукольцо знаков

Множество $G$ с заданной на нём бинарной операцией $*$ называется *полугруппой*, если на нем выполняется

$(a * b) * c = a * (b * c)$ для любых $a, b, c \in G$.

Полугруппа $(G, *)$ называется *коммутативной полугруппой*, если

$a * b = b * a$ для любых $a, b \in G$

Множество $P$, на котором введены операции $\oplus$ сложения и $\otimes$ умножения, называется *полукольцом*, если

1) $(P, \otimes)$ - полугруппа с нейтральным элементом 1.

2) $(P, \oplus)$ - коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0.

3) $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c, (b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a$, для любых $a, b, c \in P$

4) $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$, для любых $a \in P$

Полукольцо называется коммутативным, если умножение в нем коммутативно. Коммутативное кольцо называется полуполем, если ненулевые элементы относительно умножения образуют полугруппу. Ясно, что любое кольцо есть полукольцо, любое поле - полуполе.

Множество $M_n(P)$ матриц образует полукольцо, в котором нулевая и единичная матрицы 0 и $E$ служат нулем и единицей полукольца. Для таких матриц остаются справедливыми свойства, относящиеся к сложению и умножению на элементы полукольца. Причем сохраняются и доказательства этих свойств.

Полукольцо называется *идемпотентным*, если $a \oplus a = a$ для любого элемента полукольца. Важным примером полукольца является множество неотрицательных чисел с обычеым сложением и умножением.

Полукольцо которое обладает свойством:

$a \oplus b = 0 \Rightarrow a = b = 0$

называется *антикольцом.* Полукольцо неотрицательных чисел, очевидно, является антикольцом. Неотрицательные матрицы так же образуют антикольцо.

Знаковым портретом вещественной матрицы $A = a_{ij}$ называется матрица Sg($A$)=Sg($a_{ij}$), где

$$\mathrm{Sg}(a_{ij}) = \begin{array}{r} 0, a_{ij} = 0 \\ 1, a_{ij} > 0 \\ -1, a_{ij} < 0 \end{array}$$

Наибольшее применение получили портреты неотрицательных матриц, так как портреты неотрицательных матриц можно рассматривать как матрицы над полукольцом $\mathcal{B}_2$ с элементами 0 и 1.

Операции сложения

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

и умножения

| × | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

в этом полукольце хорошо известны. Матрицы над $\mathcal{B}_2$ называются булевыми. Булевы матрицы фиксированного порядка $n$ образуют полукольцо, в частности моноид по умножению. Имеет место очень существенное обстоятельство:

$$\mathrm{Sg}(AB)=\mathrm{Sg}(A) \times \mathrm{Sg}(B) \tag{1}$$

то есть отображение $A \to$Sg($A$) является гомоморфизмом мультипликативного моноида неотрицательных $n \times n$-матриц в мультипликативный моноид булевых $n \times n$-матриц. Из (1) для любой неотрицательной матрицы следует равенство

$$\mathrm{Sg}(A^k) = (\mathrm{Sg}(A))^k \tag{2}$$

Это означает что знаковый портрет неотрицательной матрицы полностью определяет знаковый портрет любой степени этой матрицы. Для вещественной матрицы это, вообще говоря, не так, но некоторая связь между $\mathrm{Sg}(A^k)$ и $(\mathrm{Sg}(A))^k$ все же имеется. Чтобы исследовать эту связь алгебраически, введем элемент $\theta$, обозначающий неопределенность, и рассмотрим расширение полукольца $\mathcal{B}_2$ - множество $\mathrm{S} = \{0, 1, -1, \theta\}$, на котором определим операции

сложения

| $+$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $\theta$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $\theta$ | $\theta$ |
| $-1$ | $-1$ | $\theta$ | $-1$ | $\theta$ |
| $\theta$ | $\theta$ | $\theta$ | $\theta$ | $\theta$ |

и умножения

| $\times$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $\theta$ |
| $-1$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $\theta$ |
| $\theta$ | $0$ | $\theta$ | $\theta$ | $\theta$ |

Далее мы будем использовать для сложения и умножения в полукольце обычные знаки "$+$" и "$\cdot$"(знак умножения часто опускается).

Говорят, что полукольцо не имеет делителей нуля, если $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ или $b = 0$. В нашей работе рассматриваются исключительно матрицы над полукольцами без делителей нуля.

Непосредственно проверяется

**Предложение 1.** *Система $S$ есть коммутативное идемпотентное полукольцо с единицей, без делителей нуля. Оно так же обладает свойством: $a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$. Значит система $S$ - антикольцо.*

Множество $M_n(S)$ матриц над $S$ образует моноид относительно обычного матричного умножения, содержащий булевы матрицы в качестве подмоноида. Элементы S будем называть *знаками*, а сами матрицы - *знаковыми* матрицами.

## §2. Графы матриц над полукольцом

***Ориентированные графы***. Ориентированным графом (или просто графом) называется пара $(V, E)$, где $V$ - непустое множество вершин $E \subseteq V \times V$ - множество *дуг*. Таким образом, дуга - это упорядоченная пара вершин. Обычно будем считать, что вершины пронумерованны натуральными числами, то есть множеством вершин служит множество $N = \{1, ..., n\}$.

Дуги можно записывать различно: $ij$ или $i \to j$. Вершина $i$ называется *началом*, а вершина $j$ - *концом* дуги $ij$. Говорят что дуга $ij$ *Выходит* из $i$ и *входит* в $j$ (или ведет из вершины $i$ в вершину $j$). Запись $i \to j$ иногда заменяет выражение "существует дуга, ведущая из $i$ в $j$ ".

*Путем* длины $k$ в орграфе называется любая последовательность вершин

$$i_1 i_2 ... i_{k+1} \tag{3}$$

такая, что $i_m i_{m+1}$ - дуга, $m = 1, ..., k$. Здесь $i_1$ - *начало*, $i_{k+1}$ - *конец* пути. Путь, у которого конец совпадает с началом, называется *замкнутым* путем или *контуром*. *Длина* пути равна количеству его дуг. Длина незамкнутого пути равна числу вершин минус единица, длина контура равна числу вершин.

Введем операцию произведения путей. Произведение путей $p = i_1 ... i_k$ и $q = j_1 ... j_m$ определено, если последняя буква $p$ совпадает с первой буквой $q$. В этом случае

$$pq = x_1 ... x_k y_2 ... y_m = x_1 ... x_{k-1} y_1 ... y_m.$$

Произведение путей ассоциативно в том смысле, что если произведение $(pq)r$ определено, то произведение $p(qr)$ тоже определено и $(pq)r = p(qr)$. Из ассоциативности следует, что скобки в произведении любого числа путей можно опустить. Заметим, что *для пути $pqr$ путь $pr$ существует в точности тогда, когда $q$ - контур.*

Путь называется *простым*, если все его вершины различны, кроме, может быть, первой и последней.

**Лемма 1.** *В графе с $n$ вершинами*

*1) длина простого $(i, j)$ пути при $i \neq j$ не больше, чем $n - 1$;*

*2) длина простого контура не больше чем $n$;*

*3) если существует $(i, j)$-путь, то существует и простой $(i, j)$-путь.*

Доказательство. Длина $(i, j)$-пути при $i \neq j$ равна числу вершин пути минус единица, а длина контура равна числу вершин в контуре. Отсюда и из определения простого пути следуют пункты 1) и 2). Чтобы доказать 3), рассмотрим произвольно взятый $(i, j)$-путь $r_1 r_2$, где $q$ - контур (множитель $r_1$ или $r_2$ могут отсутствовать). Удалив контур $q$, получим более короткий $(i, j)$-путь $r_1 r_2$. Если и он не простой, то продолжим удаление контуров. Ясно, что на некотором шаге получится простой $(i, j)$-путь. $\square$

Говорят, что из вершины $i$ *достижима* вершина $j$, если существует $(i, j)$-путь. Граф называется *сильно связным* или *неразложимым*, если из любой вершины достижимы все вершины, то есть любые две вершины взаимодостижимы.

Пусть $A$ - матрица над полукольцом. Напомним полезное понятие графа матрицы. Графом матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n$ называется орграф со множеством вершин $N = 1...n$, в котором

$$i \to j \Longleftrightarrow a_{ij} \neq 0$$

***Графы матриц над полукольцом***. Графом матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n$ называется орграф со множеством вершин $N = \{1...n\}$, в котором

$$i \to j \Longleftrightarrow a_{ij} \neq 0$$

Если каждой дуге $ij$ графа матрицы приписать элемент $a_{ij}$, то получим наглядное изображение матрицы в виде *нагруженного* графа.

Матрица $A$ называется *неразложимой*, если её граф неразложим(сильно связен). В противном случае говорят, что матрица $A$ разложима.

*Весом* пути $i_1 i_2 ... i_k i_{k+1}$ в графе матрицы $A$ называется произведением дуг весов пути, то есть элемент $a_{i_1 i_2} ... a_{i_k i_{k+1}}$. Ясно, что

$$a_{il_1}a_{l_1l_2}...a_{l_{k-1}j} \neq 0$$

тогда и только тогда, когда в графе есть путь

$$il_1l_2...l_{k-1}j. \tag{4}$$

Согласно правилу умножения матриц $(i,j)$-элемент матрицы $A^k$ определяется формулой

$$a_{ij}^{(k)} = \Sigma a_{il_1}a_{l_1l_2}...a_{l_{k-1}j}, \tag{5}$$

где суммирование ведётся по всевозможным последовательностям индексов $l_1, .., l_{k-1}$.

Используя понятие графа матрицы и веса пути, можно сказать, что

$$a_{ij}^{(k)} = \text{сумма весов } (ij)\text{-путей длины } k \text{ в графе матрицы } A. \tag{6}$$

Если $A = (a_{ij})$ - матрица над полукольцом, то

$$a_{il_1}a_{l_1l_2}...a_{l_{k-1}j} \neq 0 \Longleftrightarrow \text{в графе } A \text{ есть путь } l_1l_2..l_{k-1}.$$

Далее будем рассматривать матрицы над антикольцом.

Отсюда и из формулы (5) следует основная лемма

**Лемма 2.** *Пусть $A = (a_{ij})$ - матрица над антикольцом. Тогда*

$$a_{ij}^{(k)} \neq 0 \Longleftrightarrow \textit{в графе } A \textit{ существует } (ij)\textit{-путь длины } k.$$

Проверить неразложимость матрицы над антикольцом можно с помощью следующей теоремы:

**Теорема 1.** *Матрица $A$ неразложима тогда и только тогда, когда*

$$\text{матрица } (A + A^2 + ... + A^n) \text{ не содержит нулей.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2 и леммы 1 следует, что вершина $j$ достижима из вершины $i$ тогда и только тогда, когда $a_{ij}^{(k)} \neq 0$ при некотором $k, 1 \geq k \geq n$. То есть, тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} + a_{ij}^{(2)} + ... + a_{ij}^{(n)} \neq 0. \tag{7}$$

Для неразложимости $A$ необходимо и достаточно, чтобы неравенство (7) выполнялось для любых $i$ и $j$, что и выражается условием теоремы. □

## §3. Степени матриц над антикольцом $S = \{0, 1, -1, \theta\}$

.

В этом параграфе мы вернемся к матрицам над антикольцом $S = \{0, 1, -1, \theta\}$. Другими словами мы рассмотрим знаковые портреты вещественных матриц и попытаемся определить, в какой мере можно судить о матрице по её знаковому портрету.

Вес пути в графе матрицы $A \in M_n(S)$ равен 1 или -1. В первом случае путь будем называть положительным, во втором случае - отрицательным. Равенство (6) для нашего случая можно сформулировать так:

**Предложение 2.** *Элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы $A^k$ равен сумме знаков путей длины $k$ в графе матрицы $A$, ведущих из вершины $i$ в вершину $j$. В частности $a_{ij}^{(k)} = 0$ в том и только в том случае, когда таких путей нет.*

Более подробную ниформацию дает

**Теорема 2.** *Пусть $A \in M_n(S)$. Тогда*

*1) $a_{ij}^k$=1, если все пути в графе матрицы $A$ из $i$ в $j$ длины $k$ положительны*

*2) $a_{ij}^k$=-1, если все пути в графе матрицы $A$ из $i$ в $j$ длины $k$ отрицательны*

*3) $a_{ij}^k$=0, если в графе матрицы $A$ не существует $(i, j)$-путей длины $k$.*

*4) $a_{ij}^k$=$\theta$, если в графе матрицы $A$ существуют положительные и отрицательные $(i, j)$-пути длины $k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Справедливость теоремы вытекает из равенств (5) и (6), а так же из определения операций сложения и умножения в антикольце $S = \{0, 1, -1, \theta\}$. $\square$

**Предложение 3.** *Пусть $R = (r_{ij})$ - вещественная матрица порядка $n$. Если (i,j)-элемент матрицы $(\mathrm{Sg}(R))^k$ определен ($\neq \theta$), то он равен $(i, j)$-элементу матрицы $\mathrm{Sg}(R^k)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из теоремы 2 видно, что

1) $a_{ij}^k$=1, если все пути в графе матрицы $A$ из $i$ в $j$ длины $k$ положительны $\Rightarrow$ веса всех $(i, j)$-путей длины $k$ в графе $R$ - положительные числа $\Rightarrow$

$r_{ij}^{(k)} > 0 \Rightarrow (i, j)$-элемент матрицы $\mathrm{Sg}(R^k)$ равен 1.

2) $a_{ij}^k$=-1, если все пути в графе матрицы $A$ из $i$ в $j$ длины $k$ отрицательны $\Rightarrow$ веса всех $(i, j)$-путей длины $k$ в графе $R$ - отрицательные числа $\Rightarrow$

$r_{ij}^{(k)} < 0 \Rightarrow (i, j)$-элемент матрицы $\mathrm{Sg}(R^k)$ равен -1.

3) $a_{ij}^k$=0, если в графе матрицы $A$ не существует $(i, j)$-путей длины $k \Rightarrow$ в графе $A$ нет $(i, j)$-путей длины $k \Rightarrow$ в графе $R$ тоже $r_{ij}^{(k)} = 0 \Rightarrow \mathrm{Sg}(R^k)$ равен 0.

Как следует из предложения 3,матрица $(\mathrm{Sg}(A))^k$ в том и только в том случае не содержит никакой информации о знаковом портрете $A^k$, когда все элементы $(\mathrm{Sg}(A))^k$ равны $\theta$. Если для вещественной матрицы $A$ существует показатель $k$, для которого $(\mathrm{Sg}(A))^k = \theta$, то наименьший из таких показателей обозначим через $\theta(A)$. Если такого $k$ не существует, то положим $\theta(A) = \infty$.

В вещественной матрице могут быть известны не все элементы. Тогда в её знаковом портрете этим элементам сопоставим символ $\theta$. Имея ввиду это замечание, можно считать, что любая знаковая матрица $A \in M_n(S)$ является знаковым портретом вещественной матрицы.

Дальше мы будем рассматривать только матрицы из $M_n(S)$, то есть, знаковые матрицы над $S$ порядка $n$. Это будет подразумеваться. Ниже в леммах 3 и 4 предполагается, что матрицы $A$ и $B$ не имеют нулевых строк. Заметим, что неразложимая матрица не содержит так же и нулевых столбцов.

Назовём $i$-ю строку матрицы слабой, если она содержит $\theta$. В противном случае назовём её сильной.

**Лемма 3.** *Если $i$-я строка матрицы $A$ слабая, то $i$-я строка матрицы $AB$ тоже слабая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, при умножении $i$-й строки матрицы $A$ на столбцы матрицы $B$ в $i$-ой строке матрице $AB$ , будет элемент состоящий из сумм, содержащих $\theta$, а так как $\theta + r = \theta$, для любого $r$, то $i$-я строка матрицы $AB$ будет слабой.

**Лемма 4.** *Если $a_{ij} \neq 0$, и $j$-я строка матрицы $B$ слабая, то $i$-я строка матрицы $AB$ слабая .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле при умножении матриц $A$ и $B$ элемент $a_{ij}$ матрицы $A$ умножится на $\theta$ в $j$-й строке матрицы $B$ и в $i$-ой строке появится элемент $\theta$ и $i$-я строка матрицы $AB$ будет слабой.

**Предложение 4.** *Пусть $A$ - неразложимая матрица. Если матрица $A^t$ содержит слабую строку, то в матрице $A^{t+n-1}$ все строки слабые.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $S_k$ множество номеров сильных строк матрицы $A^k$. Из леммы 3 следует, что для любого показателя $k$

$$S_k \supseteq S_{k+1}. \tag{8}$$

Предположим, что для некоторого $k$

$$S_k = S_{k+1}. \tag{9}$$

Пусть $i$ - сильная строка матрицы $A^k$ (следовательно и матрицы $A$). Согласно лемме 4, чтобы $i$-я строка в $A^k$ была сильной необходимо, чтобы $a_{ij} = 0$ во всех случаях, когда $j$ - номер слабой строки. Это значит, что в графе $A$ нельзя перейти из множества вершин $S_k$ во множество $\bar{S}_k$. Но это противоречит сильной связности графа $A$. Следовательно, вложения (8) должны быть строгими, а равенство (9) возможно лишь если $S_k$ пусто, то есть, когда все строки $A^k$ - слабые. Цепочка строгих вложений $S_t \supset S_{t+1}...$ не может быть длинее, чем $n-1$, откуда и следует наше утверждение.

Удобно иметь следующую формулировку предложения 4:

**Предложение 5.** *Пусть $A$ - неразложимая матрица. Если матрица $A^t$ содержит элемент $\theta$, то в матрице $A^{t+n-1}$ каждая строка содержит $\theta$.*

Матрица $A$ над антикольцом называется *примитивной*, если существует показатель $k$, при котором матрица $A^k$ не содержит нулей. Граф называется *примитивным*, если из любой вершины можно в любую другую перейти путём некоторой длины $k$. Очевидно, что матрица примитивна только тогда, когда ее граф примитивен.

**Теорема 3.** *Если некоторая степень примитивной матрицы $A$ содержит элемент $\theta$, то существует степень $A$, все элементы которой равны $\theta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 5 существует показатель $k$, такой, что в каждой строке $A^k$ есть элемент $\theta$. Поскольку $A$ примитивна, то при некотором $l$ в матрице $A^l$ нет нулей. Нетрудно вычислить, что в $A^{k+l}$ все элементы равны $\theta$. $\square$

**Предложение 6.** *Если некоторая степень $A^k$ неразложимой матрицы $A$ в каждой строке содержит $\theta$, то тем же свойством обладает матрица $A^l$ при $l > k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Возведем матрицу в степень $A^{k+1}$. Из неразложимости матрицы $A$ и из правила умножения матриц следует, что элемент $\theta$, содержащийся в каждой строке матрицы $A^k$, домножится на ненулевой элемент хотя бы одного столбца матрицы $A$. Следовательно $A^{k+1}$ будет содержать элемент $\theta$ во всех своих строках. Продолжим данное рассуждение по индукции, тогда получим, что $A^l$ содержит $\theta$ во всех строках для любых $l > k$. $\square$

**Предложение 7.** *Если в матрице $A^k$ все элементы равны $\theta$, тогда то же верно для матрицы $A^l$ при $l > k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы проверить это свойство возведем матрицу $A$ в степень $k+1$. Так как в матрице $A$ нет нулевых столбцов, то при умножении $i$-й строки матрицы $A^k$ на столбцы матрицы $A$ в $i$-й строке матрицы $A^{k+1}$ на каждой позиции будет элемент $\theta$, а строки матрицы $A^k$ одинаковы, значит это будет верно для всех строк матрицы $A^{k+1}$. Получается, что матрица $A^{k+1}$ вся состоит из $\theta$, по индукции это будет выполняться для любых $l > k$.

**Предложение 8.** *Если все элементы некоторой степени $A^k$ неразложимой матрицы $A$ равны $\theta$ или $0$, тогда то же верно для $A^l$, при $l > k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возведём матрицу $A$ в степень $k+1$. Все ненулевые элементы матрицы $A^k$ равны $\theta$, тогда при их умножении на элементы матрицы $A$ мы получим только лишь 0 или $\theta$. Значит все элементы матрицы $A^{k+1}$ будут равны 0 или $\theta$, что по индукции доказывается для матрицы $A^l, l > k$.

Матрица называется *импримитивной*, если она неразложима, но не примитивна.

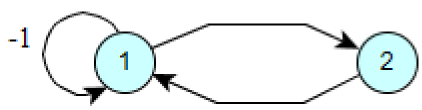
Рассмотрим некоторые примеры матриц и их графов. Обозначим через $s(A)$ степень, при возведении в которую в матрице $A$ впервые появляется элемент $\theta$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -A^2$$

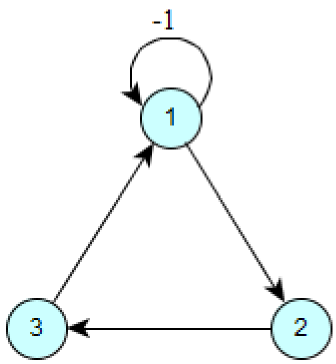
$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A^2$$

Индукцией по $k$ имеем $A^k = (-1)^k A^2 \Rightarrow$ элемент $\theta$ не появится ни в какой степени матрицы $A^k$. Следовательно, $s(A) = \infty$.



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; A^3 = \begin{pmatrix} \theta & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$s(A) = 3$

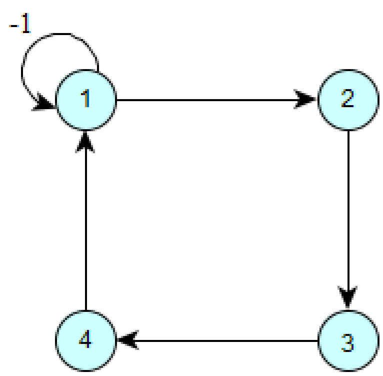



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \theta & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Возведение матрицы $A$ в степени 2-6 не приводятся, т.к. по лемме 3, если бы элемент $\theta$ появился в матрице в степени $< 7$, то он перешел бы в матрицы большей степени. Отсюда имеем $s(A) = 8$.




Известно([2],[3],[4]), что каждая неотрицательная неразложимая импримитивная матрица одноименными перестановками строк и столбцов приводятся к блочному виду, называемому формой Фробениуса

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & A_{d-1,d} \\ A_{d1} & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

где нулевые диагональные блоки квадратные. Кроме того степень $d$ матрицы $A$ является блочно-диагональной матрицей, причем каждый ее диагональный блок - примитивная матрица. Указанные свойства дословно переносятся на знаковые матрицы без изменения доказательства. Из строения импримитивной матрицы $A \in M_n(S)$ видно, что любая её степень содержит нули, следовательно матрица $A$ никогда не заполнится элементами $\theta$. Но может случиться так, что некоторая степень матрицы содержит лишь элементы 0 и $\theta$.

**Теорема 4.** *Пусть $A$ - импримитивная матрица. Если некоторая степень матрицы $A$ содержит элемент $\theta$, то существует степень $A$, все элементы которой равны $\theta$ или 0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим матрицу $A$ в форме Фробениуса:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & A_{d-1,d} \\ A_{d1} & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Возведем матрицу $A$ в степень $d$:

$$A^d = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & G_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & G_d \end{pmatrix}$$

Рассмотрим ненулевые блоки матрицы $A^d$. Известно, что они являются примитивными матрицами.

Пусть матрица $A^t$ содержит элемент $\theta$. По предложению 5 в матрице $A^{t+n-1}$ каждая строка содержит $\theta$ в каждой строке. В частности, блочно-диагональная матрица

$$A^{dk} = \begin{pmatrix} G_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & G_2^k & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & G_d^k \end{pmatrix}$$

при достаточно больших $k$ содержит $\theta$ в каждой строке. Тогда возведение этой матрицы $A^d$ в некоторую степень: $A^{dk} = diag(G_1^k, ..., G_d^k)$, примитивные ненулевые блоки тоже будут возводиться в степень и в некоторой степени $k_0$ эти блоки по теореме 10 будут состоять только из $\theta$. По предложению 6 это будет верно для любой степени $k > k_0$. $\square$

Из теорем 3 и 4 можно вывести следующий общий результат:

**Теорема 5.** *Пусть некоторая степень неразложимой матрицы $A$ содержит элемент $\theta$. Тогда существует такой показатель $k_0$, что при всех $k \geq k_0$ элементы матрицы $A^k$ равны $\theta$ или 0. А именно,*

*1) если $A$ примитивна, то все элементы $A^k$ равны $\theta$,*

*2) если индекс импримитивности $d > 1$, то все элементы ненулевых блоков матрицы $A^k$ равны $\theta$.*

Рассмотрим частный случай на примере матрицы вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -1 & -1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Будем возводить эту матрицу в степень до тех пор, пока в какой-то её позиции впервые не появится $\theta$.

Вычислим параметр $s(A)$ для нескольких матриц различных порядков $n$.

$n = 2, s = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; {A_2}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix}$$

$n = 3, s = 5$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; {A_3}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & \theta & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 4, s = 10$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; {A_4}^{10} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \theta & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$n = 5, s = 17$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; {A_5}^{17} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \theta & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

На основе этих вычислений возникает следующая гипотеза: для любой неразложимой матрицы $A \in M_n(S)$

$$s(A) \leq n^2 - 2n + 2.$$

Доказать эту гитпотезу пока не удалось.

Число $n^2 - 2n + 2$ встречается в теореме, приведенной ниже.

Если матрица $A$ над полукольцом примитивна, то наименьший показатель $k$, при котором матрица $A^k$ не содержит нулей называется *экспонентом матрицы* $A$. Для экспонента известна следующая оценка:

**Теорема 6.** *Если матрица* $A \in M_n(S)$ *примитивна, то матрица* $A^{n^2-2n+2}$ *не содержит нулей. Показатель* $n^2 - 2n + 2$ *нельзя уменьшить. Матрица*

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

*в степени* $n^2 - 2n + 1$ *еще содержит нули.*

## §4 Знаковые матрицы с условием $\mathbf{Sg}(A^k) = (\mathbf{Sg}(A))^k$

В этом параграфе мы рассматриваем матрицы, для которых выполняется условие $\mathrm{Sg}(A^k) = (\mathrm{Sg}(A))^k$, то есть такие матрицы, для которых элемент неопределенности $\theta$ не появляется ни в какой степени.

Ориентированный граф, дугам которого приписаны знаки $+$ или $-$ , называется *знаковым* графом. Знак пути равен произведению знаков дуг этого пути. Соответственно, пути делятся на положительне и отрицательные. Граф называется *сбалансированным,* если все его простые контуры положительны.

Приведем необходимое и достаточное условие сбалансированности орграфа. Оно представляет собой частный случай теоремы 3 [6] об орграфах над группами. Мы изложим адаптированное под наш случай доказательство.

**Теорема 7.** *Для любого сильно связного знакового графа следующие условия равносильны:*

*1) все простые контуры положительны,*

*2) все контуры положительны,*

*3) для любых вершин $i$ и $j$ все $(i, j)$-пути имеют одинаковый знак,*

*4) существует разбиение множества вершин на две доли, такое, что любая положительная дуга соединяет вершины из одной доли, а любая отрицательная дуга соединяет вершины из разных долей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть существуют отрицательные контуры, и $\gamma$ - самый короткий из них. он не может быть простым, следовательно, содержит более короткий контур. Этот контур положителен. Удалив его из $\gamma$, получим более короткий - снова отрицательный - контур. Но это противоречит выбору $\gamma$.

2) $\Rightarrow$ 3). Допустим, что есть два $(i, j)$-пути противоположных знаков. Поскольку граф связный, то существует $(j, i)$-путь. Тогда, очевидно, есть и два контура противоположных знаков: противоречие с условием 2).

3) $\Rightarrow$ 4) Зачислим в множество $V_1$ некоторую вершину $i_0$ и все вершины, в которые из $i_o$ ведут положительные пути. заметим, что это определение

множества $V_1$ корректно именно в силу свойства 3). Все остальные вершины (в них из $i_0$ ведут отрицательные пути) зачислим в множество $V_2$. Полученное разбиение множества вершин удовлетворяет условию 4).

4) $\Rightarrow$ 1) При прохождении замкнутого пути совершается ровно столько переходов из $V_1$ в $V_2$, сколько в обратном направлении. Следовательно, количество отрицательных дуг в контуре чётное количество. $\square$

Всякой матрице  над $S$, не содержащей элемента $\theta$, отвечает знаковый граф. Мы используем теорему 7 для решения следующего вопроса: в каком случае элемент $\theta$ не появится ни в какой степени $A^k$. Следующая теорема дает достаточное условие для этого.

**Теорема 8.** *Пусть матрица A не содержит $\theta$. Тогда, если граф матрицы A сбалансирован, $A^k$ не содержит $\theta$ для любого $k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим элементы матрицы $A^k$. Они будут иметь вид таких сумм

$$(a_{ij})^{(k)} = \sum_{l_1 \ldots l_{k-1}} a_{il_1} a_{l_1 l_2} \ldots a_{l_{k-1} j} \tag{10}$$

и обозначать знак пути из вершины $i$ в вершину $j$ в графе этой матрицы. То, что $A^k$ не содержит $\theta$ значит, что все возможные суммы вида (10) длины $k$ имеют один знак для любых $i, j$. Из пункта 3) теоремы 7 известно, что в сбалансированном графе все $(i, j)$-пути имеют одинаковый знак, для любых вершин $i, j$, это значит, что матрица сбалансированного графа не будет содержать $\theta$ в любой степени $k$.Таким образом, сбалансированность графа матрицы является достаточным условием того, чтобы в ней ни в какой степени не появился элемент $\theta$. $\square$

Отметим, что сбалансированность графа матрицы $A$ не является необходимым условием для того, чтобы $\theta(A) = \infty$. В параграфе 5 есть пример матрицы, граф которой не является сбалансированным, однако элемент $\theta$ не появляется ни в одной позиции этой матрицы ни в какой ее степени.

**Теорема 9.** *Пусть матрица A не содержит $\theta$. Тогда, если граф матрицы $-A$ сбалансирован, $A^k$ не содержит $\theta$ для любого $k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим подробнее граф матрицы $A$. Все конутры четной длины в таком графе имеют положительный знак и содержат четное количество положительных и отрицательных дуг. Все контуры нечетной длины имеют отрицательный знак и содержат четное количество положительных и нечетное количество отрицательных дуг. Тогда, при умножении матрицы $A$ на -1 все контуры в графе матрицы станут положительными. Знак контуров четной длины не изменится, а знак контуров нечетной длины станет положительным, так как количество отрицательных дуг при перемене знака будет четным. Таким образом граф матрицы $-A$ будет сбалансированным. Имеем равенство $(-A)^n = (-1)^n A^n$, тогда если матрица $(-A)^k$ не содержит $\theta$, то и $A^k$ не содержит $\theta$ для любого $k$. □

**Теорема 10.** *Пусть в знаковом графе любая вершина достижима из любой другой путем длины $\leq l$. Если для любых вершин $i$ и $j$ все (i,j)-пути длины $\leq l+1$ имеют одинаковый знак, то граф сбалансирован.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим любой $(i,j)$-путь

$$p = i \to i_1 \to ... \to i_k$$

длины $k \geq l+2$. Разложим этот путь в произведение

$$p = p_1 p_2, \text{ где } p_1 = i \to i_1 \to ... \to i_{l+1},\ p_2 = i_{l+1} \to i_{l+2} \to ... \to i_k.$$

По предположению теоремы существует путь $q$ из $i$ в $i_{l+1}$ длины $m \leq l$. Заменим путь $p_1$ длины $l+1$ путем $q$ длины $m \leq l$. Тогда вместо $(i,j)$-пути $p = p_1 p_2$ длины $k \geq l+2$ получим $(i,j)$-путь $p' = qp_2$ длины $k' = m + (k-l-1) = k-1+(m-l) < k$. Знаки $p'$ и $p$ равны, но путь $p'$ короче. Итак, любому $(i,j)$-пути длины $k \geq l+2$ можно сопоставить $(i,j)$-путь более короткой длины $k' < k$. Тсли и $k' \geq l+2$, то повторим рассуждение и получим $(i,j)$-путь длины $k \ll k'$ того же знака. Продолжая таким образом, на некотором шаге получим $(i,j)$-путь длины $\leq l+1$, имеющий тот же знак, что и все пути длины $l+1$.□

**Следствие** *Предположим, что в полном знаковом графе матрицы $A$ для любых $i$ и $j$ все $(i,j)$-пути длины $\leq 2$ имеют один знак, то есть для любых вершин $i,j,m$ выполняется равенство $a_{im}a_{mj} = a_{ij}$. Тогда граф матрицы $A$ сбалансирован.*

**Предложение 9.** *Если матрицы $A$ и $A^2$ не содержат элементов 0 и $\theta$, то при любом $k$ матрица $A^k$ не содержит 0 и $\theta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из условия предложения имеем, что в (полном) графе матрицы $A$ для любых $i,j$ любые два $(ij)$-пути длины 2 имеют один и тот же знак. Пусть $i,j$ - любые вершины. Тогда путь $i \to i \to j$ и $i \to j \to j$ имеют один знак. Следовательно

Все диагональные элементы $A$, а значит все петли в графе матрицы $A$ имеют один знак. Действительно

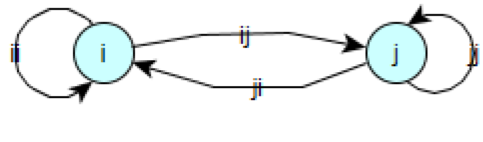
$$a_{ii}a_{ij} = a_{ij}a_{jj} \Rightarrow a_{ii} = a_{jj} \tag{11}$$

Далее рассмотрим два случая:

Случай1 $a_{11} = ... = a_{nn} = 1$

В этом случае $a_{ik}a_{kj} = a_{ii}a_{ij} = a_{ij}$, то есть условие следствия выполнено.

По следствию граф $A$ сбалансирован. По теореме о сбалансированном знаковом графе для любых $i,j$ любые 2 $(ij)$-пути имеют одинаковый знак, в частности любые $(ij)$-пути длины $k$. Отсюда следует, что при любом $k$ матрица $A^k$ содержит лишь элементы 1 и -1.




Случай2 $a_{11} = ... = a_{nn} = -1$

Рассмотрим матрицу $-A = (-1)A$. Для неё, как и для $A$ выполняются условия предложения 9 и имеет место рассмотренный выше случай1. Следовательно граф матрицы $-A$ сбалансирован. По теореме 9 матрица $(-A)^k$ не содержит элемента $\theta$ при любом $k$. То же, конечно, верно и для $A^k = (-1)^k(-A)^k$ $\square$

**Предложение 10.** *Пусть в матрица $A$ не содержит 0 и $\theta$. Тогда $A^k$ не содержит $\theta$ тогда только тогда, когда $A^2 = A$ или $A^2 = -A$.*

Доказательство вытекает из доказательства предложения 9. Все диаональные элементы матрицы $A$ имеют один знак (11). Далее пойдем по другому пути. Из условия предложения 10 имеем, что

$$a_{il}a_{lj} = a_{im}a_{mj}, \text{ для любых } i, l, m, j \tag{12}$$

**Случай1**:

$$a_{11} = ... = a_{nn} = 1$$

При $l = j$ из (12) следует, что

$$a_{ij}a_{jj} = a_{ij} = a_{im}a_{mj}, \text{ для любых } i, m, j$$

То есть $A^2 = A$

**Случай2**:

$$a_{11} = ... = a_{nn} = -1$$

Рассмотрим матрицу $-A$. Для неё выполняется условие предложения и имеет место случай1. $(-A)^2 = -A$ из этого следует, что и $A^2 = -A$ $\square$ Таким образом, если условия предложения 10 выполнены и никакая степень $A^k$ не содержит $\theta$, то либо $A^2 = A$, либо $A^2 = -A$. Обратное утверждение очевидно: если для матрицы, не содержащей $\theta$ выполнено одно из последних равенств, то элемент $\theta$ не может появиться ни в какой степени $A^k$.

## Литература


1. Хорн Р., Джонсон Ч., *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.

2. Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц* М.Наука, 1967.

3. Сачков В.Н. Тараканов В.Е., *Комбинаторика неотрицательных матриц* М: ТВП, 2000.

4. Альпин Ю.А. Ильин С.Н., *Дискретная математика:Графы и автоматы.* Казань: КГУ, 2007.

5. Альпин Ю.А. Ильин С.Н., *Степени знаковых портретов вещественных матриц.* Записки научных семинаров ПОМИ, Том 284, 2002.

6. Альпин Ю.А. *Теорема Харари о знаковых графах и обратимость цепей Маркова* Записки научных семинаров ПОМИ, Том 419, 2013, с. 5-15.