Известия вузов. Математика
2015, №8, с. 33–50

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Н. КИЯСОВ

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ КЛАССОВ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРА

Аннотация. Рассмотрена структура множества кусочно-мероморфных решений однородной задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора и их связь с решениями системы двух задач дробно-линейного сопряжения. Показано, что при наличии двух кусочно-мероморфных решений системы задач дробно-линейного сопряжения может быть построена каноническая система решений задачи линейного сопряжения и выделены классы задач, разрешимых в замкнутой форме.

Ключевые слова: матрица-функция, задача линейного сопряжения, задача дробно-линейного сопряжения.

УДК: 517.544

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- ($0 \in D^+$, $\infty \in D^-$),

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) \\ g_{31}(t) & g_{32}(t) & g_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = \det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{0.1}$$

— H-непрерывная на Γ матрица-функция третьего порядка. Однородная задача линейного сопряжения для трехмерного вектора состоит в отыскании кусочно-голоморфной функции $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z), w^3(z)\big)$ с H-непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t) \tag{0.2}$$

или в скалярной форме — условиями

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}(t)w^{1-}(t) + g_{12}(t)w^{2-}(t) + g_{13}(t)w^{3-}(t), \\ w^{2+}(t) &= g_{21}(t)w^{1-}(t) + g_{22}(t)w^{2-}(t) + g_{23}(t)w^{3-}(t), \\ w^{3+}(t) &= g_{31}(t)w^{1-}(t) + g_{32}(t)w^{2-}(t) + g_{33}(t)w^{3-}(t). \end{aligned} \tag{0.3}$$

Качественная теория задачи (0.2) в классах гёльдеровских функций, причем любой размерности, изложена в монографии [1], а в более широких классах матриц-функций — в монографии [2]. Однако имеется сравнительно немного примеров матриц-функций, для которых решение задачи может быть записано в замкнутой форме — запись решения задачи в интегралах типа Коши и решения определенного числа линейных алгебраических систем. Одним из таких примеров служит решение задачи линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций в работе [3]. В монографии [2] также предложен конструктивный алгоритм решения этой задачи. В работе автора [4] рассмотрена возможность приведения

Поступила 02.02.2014

задачи (0.2) к задаче с треугольной матрицей-функцией. В данной работе приводится ряд условий на элементы матрицы-функции (0.1), при выполнении которых решение задачи (0.3) может быть записано в замкнутой форме.

1. Связь решений задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора с решениями системы двух задач дробно-линейного сопряжения

Определение 1. Пусть $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z), w^3(z)\big)$ — кусочно-мероморфное решение задачи (0.3). Будем называть его решением с тройкой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, если на Γ

$$w^{1+}(t)/w^{1-}(t) = \lambda_1(t), \quad w^{2+}(t)/w^{2-}(t) = \lambda_2(t), \quad w^{3+}(t)/w^{3-}(t) = \lambda_3(t) \tag{1.1}$$

(полагаем, что компонента тройки λ_k равна нулю, неограничена или является неопределенной, что будем обозначать $0, \infty, 0/0$, если соответственно $w^{k+}(t) \equiv 0$, $w^{k-}(t) \equiv 0$, $w^{k\pm}(t) \equiv 0$; $k = 1, 2, 3,\ t \in \Gamma$).

Легко видеть, что множество всех кусочно-мероморфных решений задачи (0.3) представляет собой трехмерное векторное пространство V над полем рациональных функций, базисом которого является любая каноническая система решений

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_1(z) = \big(v_1^1(z), v_1^2(z), v_1^3(z)\big)\,, \quad \mathbf{v}_2(z) = \big(v_2^1(z), v_2^2(z), v_2^3(z)\big)\,, \\ \mathbf{v}_3(z) = \big(v_3^1(z), v_3^2(z), v_3^3(z)\big)\,,\end{gathered} \tag{1.2}$$

$\mathbf{v}_i(z)$ имеет на бесконечности порядок $(-\varkappa_i)$, $i = 1, 2, 3$, $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \varkappa_3$, ($\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = \varkappa = \operatorname{ind}\det G(t)$ — суммарный индекс матрицы-функции (0.1)). Это векторное пространство может быть представлено в виде бесконечной суммы непересекающихся подпространств V_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, образованных решениями задачи с одной и той же тройкой (1.1) (V_0 содержит лишь нулевое решение с тройкой (0/0,0/0,0/0), которое будем считать принадлежащим всем V_k). В качестве представителя подпространства будем брать решение задачи $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z), w^3(z)\big)$ без конечных полюсов, имеющее наинизший возможный порядок на бесконечности. Такое решение с точностью до мультипликативной постоянной получается домножением на соответствующий полином любого кусочно-мероморфного решения задачи, принадлежащего данному подпространству.

Пусть $w^{1\pm}(z) \not\equiv 0$. Рассмотрим отношения

$$\Phi(z) = w^2(z)/w^1(z), \quad \Psi(z) = w^3(z)/w^1(z). \tag{1.3}$$

Из краевого условия (0.3) следует, что пары функций $(\Phi^{\pm}(t), \Psi^{\pm}(t))$ являются предельными значениями на Γ кусочно-мероморфного решения $(\Phi(z), \Psi(z))$ системы двух задач дробно-линейного сопряжения

$$\Phi^+ = \frac{g_{21} + g_{22}\Phi^- + g_{23}\Psi^-}{g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-}, \quad \Psi^+ = \frac{g_{31} + g_{32}\Phi^- + g_{33}\Psi^-}{g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-}. \tag{1.4}$$

Обратно, если пара кусочно-мероморфных функций $(\Phi(z), \Psi(z))$ с компонентами, отличными в соответствующих областях от тождественного нуля, является решением системы задач (1.4), то переписав эти равенства в виде

$$\begin{gathered}g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^- = \frac{\Phi^-}{\Phi^+}\left(g_{22} + g_{21}\frac{1}{\Phi^-} + g_{23}\frac{\Psi^-}{\Phi^-}\right), \\ g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^- = \frac{\Psi^-}{\Psi^+}\left(g_{33} + g_{31}\frac{1}{\Psi^-} + g_{32}\frac{\Phi^-}{\Psi^-}\right),\end{gathered}$$

получим, что вектор-функция $\mathbf{w}(z)$, у которой на Γ предельные значения компонент определяются условиями

$$g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^- = w^{1+}/w^{1-}, \quad w^{2\pm} = \Phi^{\pm}w^{1\pm}, \quad w^{3\pm} = \Psi^{\pm}w^{1\pm}, \tag{1.5}$$

будет решением задачи линейного сопряжения (0.3).

Пусть отношения (1.3) представимы в виде

$$\Phi^+(z) = \Phi_0^+(z)/p^+(z), \;\; \Psi^+(z) = \Psi_0^+(z)/q^+(z); \;\; \Phi^-(z) = \Phi_0^-(z)/p^-(z), \;\; \Psi^-(z) = \Psi_0^-(z)/q^-(z),$$

где $p^{\pm}(z)$, $q^{\pm}(z)$ — полиномы с нулями в области D^+ и D^- соответственно, а $\Phi_0^{\pm}(z)$, $\Psi_0^{\pm}(z)$ — функции, аналитические в соответствующих областях конечной плоскости, не имеющие с этими полиномами общих нулей. Предположим дополнительно, что компонента $\lambda_1(t)$ тройки решения $\mathbf{w}(z)$ не обращается в нуль и бесконечность на Γ. Тогда, полагая $\lambda_1(t) = \lambda_1^+(t)/\lambda_1^-(t)$, в качестве представителя соответствующего подпространства согласно (1.5) возьмем решение

$$\begin{gathered} w^{1+}(z) = \lambda_1^+(z)l^+(z)l^-(z), \quad w^{1-}(z) = \lambda_1^-(z)l^+(z)l^-(z), \\ w^{2\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z)w^{1\pm}(z), \quad w^{3\pm}(z) = \Psi^{\pm}(z)w^{1\pm}(z). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь $\lambda_1^{\pm}(z)$ — аналитические продолжения в соответствующие области факторизационных множителей $\lambda_1^{\pm}(t)$, а $l^{\pm}(z)$ — наименьшие общие кратные полиномов $p^+(z)$, $q^+(z)$ и $p^-(z)$, $q^-(z)$ соответственно.

Если для решения $\mathbf{w}(z)$ компоненты $w^{1\pm}(z) \equiv 0$, то выбирая компоненту этого решения, отличную от тождественного нуля, придем к соответствующей системе задач дробно-линейного сопряжения, аналогичных (1.4), по кусочно-мероморфному решению которой представитель соответствующего подпространства строится аналогично.

Задачу (1.4) назовем задачей дробно-линейного сопряжения, соответствующей матрице-функции (0.1). Это определение не вполне корректно, так как задаче (1.4) соответствует класс матриц-функций вида $h(t)G(t)$, где $h(t)$ — любая H-непрерывная на Γ функция, и вводится, чтобы избежать записи краевых условий вида (1.4).

Определение 2. Будем называть кусочно-мероморфное решение $(\Phi(z), \Psi(z))$ задачи (1.4) решением с тройкой (1.1), если на Γ

$$\begin{gathered} g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) + g_{13}\Psi^-(t) = \lambda_1(t), \\ g_{22}(t) + g_{21}(t)\frac{1}{\Phi^-(t)} + g_{23}(t)\frac{\Psi^-(t)}{\Phi^-(t)} = \lambda_2(t), \\ g_{33}(t) + g_{31}(t)\frac{1}{\Psi^-(t)} + g_{32}(t)\frac{\Phi^-(t)}{\Psi^-(t)} = \lambda_3(t). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Если $\mathbf{w}(z)$ — решение задачи (0.3) с тройкой (1.1), то отношения (1.3) определяют решения задачи (1.4) с тройкой (1.7). Обратно, если $(\Phi(z), \Psi(z))$ — решение задачи (1.4) с тройкой (1.7), то равенства (1.5) определяют решение задачи (0.3) с тройкой (1.1). Исключая из (1.7) $\Phi^-(t)$ и $\Psi^-(t)$, придем к соотношению, связывающему компоненты тройки (1.1):

$$G_{11}\lambda_1 + G_{22}\lambda_2 + G_{33}\lambda_3 - g_{33}\lambda_1\lambda_2 - g_{22}\lambda_1\lambda_3 - g_{11}\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \Delta \quad (\Delta = \det G). \tag{1.8}$$

Здесь $G_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3,$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы-функции (0.3). Обратно, если тройка (1.1) с компонентами, связанными соотношением (1.8), определяет тройку какого-либо кусочно-мероморфного решения $(\Phi(z), \Psi(z))$ задачи

(1.4), то предельные значения этого решения согласно (1.7), (1.5) могут быть записаны по любой из формул

$$\begin{gathered}\Phi^- = \frac{g_{23}\lambda_1 + G_{32}}{g_{13}\lambda_2 + G_{31}} = \frac{\lambda_1\lambda_3 - g_{33}\lambda_1 - g_{11}\lambda_3 + G_{22}}{g_{12}\lambda_3 + G_{21}} = \frac{g_{21}\lambda_3 + G_{12}}{\lambda_2\lambda_3 - g_{33}\lambda_2 - g_{22}\lambda_3 + G_{11}},\\ \Phi^+ = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Phi^-;\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}\Psi^- = \frac{\lambda_1\lambda_2 - g_{22}\lambda_1 - g_{11}\lambda_2 + G_{33}}{g_{13}\lambda_2 + G_{31}} = \frac{g_{32}\lambda_1 + G_{23}}{g_{12}\lambda_3 + G_{21}} = \frac{g_{31}\lambda_2 + G_{13}}{\lambda_2\lambda_3 - g_{33}\lambda_2 - g_{22}\lambda_3 + G_{11}},\\ \Psi^+ = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\Psi^-.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Определение 3. Две тройки $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ и $(\widetilde{\lambda}_1(t), \widetilde{\lambda}_2(t), \widetilde{\lambda}_3(t))$, ни одна из компонент которых не является нулевой, неограниченной или неопределенной, назовем подобными, если их соответствующие компоненты попарно пропорциональны.

Пусть $(\Phi(z), \Psi(z))$ — кусочно-мероморфное решение задачи (1.4) с тройкой (1.7). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что оно является также решением задачи дробно-линейного сопряжения, соответствующей матрицам-функциям

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{13}\frac{\Psi^-}{\Phi^-} & g_{12}\frac{\Phi^-}{\Psi^-} \\ g_{21} & g_{23}\frac{\Psi^-}{\Phi^-} & g_{22}\frac{\Phi^-}{\Psi^-} \\ g_{31} & g_{33}\frac{\Psi^-}{\Phi^-} & g_{32}\frac{\Phi^-}{\Psi^-} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{31}\frac{\Phi^+}{\Psi^+} & g_{32}\frac{\Phi^+}{\Psi^+} & g_{33}\frac{\Phi^+}{\Psi^+} \\ g_{21}\frac{\Psi^+}{\Phi^+} & g_{22}\frac{\Psi^+}{\Phi^+} & g_{23}\frac{\Psi^+}{\Phi^+} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

с той же тройкой (1.7). Переписав краевые условия (1.4) в виде

$$\Phi^- = \frac{G_{12} + G_{22}\Phi^+ + G_{32}\Psi^+}{G_{11} + G_{21}\Phi^+ + G_{31}\Psi^+}, \quad \Psi^- = \frac{G_{13} + G_{23}\Phi^+ + G_{33}\Psi^+}{G_{11} + G_{21}\Phi^+ + G_{31}\Psi^+},$$

замечаем, что указанное решение будет также решением задачи дробно-линейного сопряжения, соответствующей матрице-функции

$$G_3 = \begin{pmatrix} G_{11}\frac{\Phi^-\Psi^-}{\Phi^+\Psi^+} & G_{21}\frac{\Psi^-}{\Psi^+} & G_{31}\frac{\Phi^-}{\Phi^+} \\ G_{12}\frac{\Psi^-}{\Psi^+} & G_{22}\frac{\Phi^+\Psi^-}{\Phi^-\Psi^+} & G_{32} \\ G_{13}\frac{\Phi^-}{\Phi^+} & G_{23} & G_{33}\frac{\Phi^-\Psi^-}{\Phi^+\Psi^+} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

с подобной тройкой

$$\begin{gathered}\widetilde{\lambda}_1 = \frac{\Phi^-\Psi^-}{\Phi^+\Psi^+}\left(G_{11} + G_{21}\Phi^+ + G_{31}\Psi^+\right), \quad \widetilde{\lambda}_2 = \frac{\Psi^-}{\Psi^+\Phi^-}\left(G_{12} + G_{22}\Phi^+ + G_{32}\Psi^+\right),\\ \widetilde{\lambda}_3 = \frac{\Phi^-}{\Phi^+\Psi^-}\left(G_{13} + G_{23}\Phi^+ + G_{33}\Psi^+\right) \quad \left(\frac{\widetilde{\lambda}_2}{\widetilde{\lambda}_1} = \frac{\Phi^+}{\Phi^-} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{\widetilde{\lambda}_3}{\widetilde{\lambda}_1} = \frac{\Psi^+}{\Psi^-} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right).\end{gathered}$$

2. Построение канонической системы решений задачи (0.3) по двум решениям задачи (1.4)

Пусть $(\Phi_j(z), \Psi_j(z))$, $j = 1, 2,$ — два кусочно-мероморфных решения системы задач дробно-линейного сопряжения (1.4) с различными тройками (1.7). Покажем, что при некоторых предположениях относительно этих функций каноническая система решений задачи (0.3) может быть построена эффективно.

Введем новые неизвестные кусочно-мероморфные функции с линией скачков Γ:

$$\Phi(z) = \phi(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi(z) = \psi(z) + \Psi_1(z). \tag{2.1}$$

Подстановка в краевые условия (1.4) приводит на Γ к равенствам

$$\begin{aligned}(g_{12}\Phi_1^+ - g_{22})\phi^- + (g_{13}\Phi_1^+ - g_{23})\psi^- + \lambda_{11}\phi^+ + g_{12}\phi^+\phi^- + g_{13}\phi^+\psi^- = 0,\\ (g_{12}\Psi_1^+ - g_{32})\phi^- + (g_{13}\Psi_1^+ - g_{33})\psi^- + \lambda_{11}\psi^+ + g_{12}\psi^+\phi^- + g_{13}\psi^+\psi^- = 0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Вычитая из первого равенства (2.2), домноженного на $\psi^+(t)$, второе, домноженное на $\phi^+(t)$, придем к равенству

$$(g_{12}\Phi_1^+ - g_{22})\phi^-\psi^+ - (g_{12}\Psi_1^+ - g_{32})\phi^-\phi^+ + (g_{13}\Phi_1^+ - g_{23})\psi^-\psi^+ - (g_{13}\Psi_1^+ - g_{33})\psi^-\phi^+ = 0.$$

Поделив полученное равенство на $\phi^+(t)\phi^-(t)$ и вводя новую неизвестную кусочно-мероморфную функцию

$$W(z) = \frac{\psi(z)}{\phi(z)} = \frac{\Psi(z) - \Psi_1(z)}{\Phi(z) - \Phi_1(z)}, \tag{2.3}$$

для определения последней придем на Γ к задаче дробно-линейного сопряжения

$$(g_{12}\Phi_1^+ - g_{22})W^+ - (g_{13}\Psi_1^+ - g_{33})W^- + (g_{13}\Phi_1^+ - g_{23})W^+W^- = (g_{12}\Psi_1^+ - g_{32}), \tag{2.4}$$

частное кусочно-мероморфное решение которой согласно (2.3) имеет вид

$$W_1(z) = \frac{\Psi_2(z) - \Psi_1(z)}{\Phi_2(z) - \Phi_1(z)}. \tag{2.5}$$

Введем обозначения

$$\lambda_{11}(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi_1^-(t) + g_{13}\Psi_1^-(t), \quad \lambda_{12}(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi_2^-(t) + g_{13}\Psi_2^-(t). \tag{2.6}$$

Для кусочно-мероморфной функции

$$\omega(z) = W(z) - W_1(z) \tag{2.7}$$

получим однородную задачу дробно-линейного сопряжения

$$\frac{\lambda_{12}(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)}{\Phi_2^- - \Phi_1^-}\omega^+ - \frac{\Delta(\Phi_2^- - \Phi_1^-)}{\lambda_{11}\lambda_{12}(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)}\omega^- - (g_{13}\Phi_1^+ - g_{23})\omega^+\omega^- = 0, \quad \Delta = \det G.$$

Последнее краевое условие перепишем для функции

$$\Omega(z) = 1/\omega(z) \tag{2.8}$$

в виде скалярной задачи линейного сопряжения

$$\Omega^+ = \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}^2(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)^2}{(\Phi_2^- - \Phi_1^-)^2}\Omega^- - \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}(g_{13}\Phi_1^+ - g_{23})(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)}{\Delta(\Phi_2^- - \Phi_1^-)}. \tag{2.9}$$

Предположим дополнительно, что разности $\Phi_2^\pm(t) - \Phi_1^\pm(t)$, а также функции (2.6) не обращаются в нуль и бесконечность на контуре. Тогда кусочно-мероморфное решение задачи (2.9) (его предельные значения на Γ) запишем в виде

$$\begin{gathered}\Omega^+ = \frac{\lambda_{11}^+\lambda_{12}^{2+}(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)^2}{\Delta^+}\left(r - P\left[K\right]\right), \quad \Omega^- = \frac{\lambda_{11}^-\lambda_{12}^{2-}(\Phi_2^- - \Phi_1^-)^2}{\Delta^-}\left(r + Q\left[K\right]\right),\\ K = \frac{(g_{13}\Phi_1^+ - g_{23})\Delta^-}{\lambda_{12}^+\lambda_{11}^-\lambda_{12}^-(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)(\Phi_2^- - \Phi_1^-)}.\end{gathered} \tag{2.10}$$

В этой формуле отношения $\Delta = \Delta^+/\Delta^-$, $\lambda_{1i} = \lambda_{1i}^+/\lambda_{1i}^-$, $i = 1, 2$, — факторизации на Γ указанных функций, $P = (I + S)/2$, $Q = (I - S)/2$, I — единичный и S — сингулярный операторы, r — рациональная функция.

Пусть $\Omega_1(z)$ — некоторое решение задачи (2.9). Тогда кусочно-мероморфная функция

$$W_2(z) = W_1(z) + \frac{1}{\Omega_1(z)} = \frac{\psi(z)}{\phi(z)} \tag{2.11}$$

согласно (2.7), (2.8) будет решением задачи (2.4).

Поделив первое равенство (2.2) на $\phi^+(t)\phi^-(t)$, для определения функции

$$\phi_1(z) = 1/\phi(z) \tag{2.12}$$

придем на Γ к скалярной задаче линейного сопряжения

$$[g_{12}\Phi_1^+ - g_{22} + (g_{13}\Phi_1^+ - g_{23})W_2^-]\phi_1^+ + \lambda_{11}\phi_1^- + g_{12} + g_{13}W_2^- = 0. \tag{2.13}$$

Согласно (2.11), (1.4) получаем

$$g_{12}\Phi_1^+ - g_{22} + (g_{13}\Phi_1^+ - g_{23})W_2^- = \frac{1}{\lambda_{11}}\left[G_{31}\Psi_1^- - G_{33} - (G_{31}\Phi_1^- - G_{32})W_1^-\right] + \frac{g_{13}\Phi_1^+ - g_{23}}{\Omega_1^-},$$

$$\Phi_2^+ - \Phi_1^+ = -\frac{\Phi_2^- - \Phi_1^-}{\lambda_{11}\lambda_{12}}\left[G_{31}\Psi_1^- - G_{33} - (G_{31}\Phi_1^- - G_{32})W_1^-\right].$$

Так как $\Omega_1(z)$ — решение задачи (2.9), то граничное условие (2.13) перепишем в виде

$$\phi_1^+ = \frac{\lambda_{11}^2\lambda_{12}\Omega_1^-(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)}{\Omega_1^+\Delta(\Phi_2^- - \Phi_1^-)}\phi_1^- + \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}\Omega_1^-(g_{12} + g_{13}W_2^-)(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)}{\Omega_1^+\Delta(\Phi_2^- - \Phi_1^-)}. \tag{2.14}$$

Решение задачи (2.14) в классе кусочно-мероморфных функций на Γ запишем по формулам

$$\phi_1^+ = \frac{\lambda_{11}^{2+}\lambda_{12}^+(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)}{\Delta^+\Omega_1^+}\left(R + P\left[K_1\right]\right), \quad \phi_1^- = \frac{\lambda_{11}^{2-}\lambda_{12}^-(\Phi_2^- - \Phi_1^-)}{\Delta^-\Omega_1^-}\left(R - Q\left[K_1\right]\right),$$
$$K_1 = \frac{(g_{12} + g_{13}W_2^-)\Delta^-\Omega_1^-}{\lambda_{11}^+\lambda_{11}^-\lambda_{12}^-(\Phi_2^- - \Phi_1^-)} \tag{2.15}$$

(R — рациональная функция). По любому решению $\phi_1(z)$, определенному формулами (2.15), из (2.11), (2.12) найдем

$$\psi(z) = \phi(z)W_2(z). \tag{2.16}$$

Учитывая (2.10), (2.12), (2.15), (2.16), решение системы задач дробно-линейного сопряжения (1.4) получим по формуле (2.1).

Предположим, что разности $\Phi_2^\pm(z) - \Phi_1^\pm(z)$ не имеют конечных нулей. В силу ограниченности операторов P и Q в формулах (2.10), (2.15) возьмем в качестве r и R постоянные, подобранные так, чтобы кусочно-мероморфные функции $\Omega_1(z)$ и $\phi_1(z)$ не имели конечных нулей. Соответствующее кусочно-мероморфное решение (2.1) задачи (1.4) обозначим $(\Phi_3(z), \Psi_3(z))$. Тогда из (1.7), (2.14) найдем

$$\lambda_{13} = \frac{\phi^-\Omega_1^+\Delta(\Phi_2^- - \Phi_1^-)}{\lambda_{11}\lambda_{12}\phi^+\Omega_1^-(\Phi_2^+ - \Phi_1^+)}. \tag{2.17}$$

Функция (2.11) согласно (2.3) выразится через построенное решение $(\Phi_3(z), \Psi_3(z))$ по формуле

$$W_2(z) = \frac{\Psi_3(z) - \Psi_1(z)}{\Phi_3(z) - \Phi_1(z)}. \tag{2.18}$$

Если заданные решения $(\Phi_j(z), \Psi_j(z))$, $j = 1, 2$, системы задач дробно-линейного сопряжения (1.4) не имеют конечных полюсов, то выражение (2.17) не обращается в нуль и бесконечность на Γ, и решения задачи линейного сопряжения (0.3), используя представления (1.6), запишем в виде

$$w_j^{1\pm}(z) = \lambda_{1j}^{\pm}(z), \quad w_j^{2\pm}(z) = \Phi_j^{\pm}(z) w_j^{1\pm}(z), \quad w_j^{3\pm}(z) = \Psi_j^{\pm}(z) w_j^{1\pm}(z), \tag{2.19}$$

$\lambda_{1j}(t) = \lambda_{1j}^{+}(t)/\lambda_{1j}^{-}(t)$, $j = 1, 2, 3$. Покажем, что решения (2.19) образуют *нормальную систему решений* ([1], с. 40) задачи (0.3). Действительно, вычисляя определитель матрицы $X(z)$, составленной из этих решений, согласно (2.5), (2.18), (2.11) получим

$$\det X(z) = \Pi_{j=1}^{3} \lambda_{1j}(z)(\Phi_2(z) - \Phi_1(z))(\Phi_3(z) - \Phi_1(z))(W_2(z) - W_1(z)) =$$
$$= \Pi_{j=1}^{3} \lambda_{1j}(z)(\Phi_2(z) - \Phi_1(z))/\phi_1(z)\Omega_1(z).$$

Так как этот определитель в силу выбора решения (2.10), (2.15) не обращается в нуль в конечной части плоскости, то полученная система решений будет нормальной и при помощи известного алгебраического алгоритма может быть приведена к канонической системе (1.2). Пусть теперь решения $(\Phi_j(z), \Psi_j(z))$, $j = 1, 2$, представимы в виде

$$\Phi_j^{+}(z) = \Phi_{j0}^{+}(z)/p_j^{+}(z),\ \Psi_j^{+}(z) = \Psi_{j0}^{+}(z)/q_j^{+}(z);$$
$$\Phi_j^{-}(z) = \Phi_{j0}^{-}(z)/p_j^{-}(z),\ \Psi_j^{-}(z) = \Psi_{j0}^{-}(z)/q_j^{-}(z), \quad j = 1, 2,$$

в котором соответствующие обозначения определены так же, как при получении формулы (1.6). Тогда решения задачи линейного сопряжения (0.3) запишем по формулам

$$w_j^{1\pm}(z) = \lambda_{1j}^{\pm}(z) l_j^{+}(z) l_j^{-}(z), \quad w_j^{2\pm}(z) = \Phi_j^{\pm}(z) w_j^{1\pm}(z), \quad w_j^{3\pm}(z) = \Psi_j^{\pm}(z) w_j^{1\pm}(z), \tag{2.20}$$

$j = 1, 2, 3$, в которых $l_j^{+}(z)$, $l_j^{-}(z)$ — наименьшие общие кратные полиномов $p_j^{+}(z)$, $q_j^{+}(z)$ и $p_j^{-}(z)$, $q_j^{-}(z)$ соответственно, $j = 1, 2$, а $l_3^{+}(z)$, $l_3^{-}(z)$ — наименьшие общие кратные полиномов, нулями которых являются конечные полюсы кусочно-мероморфных функций $\Phi_3(z)$ и $\Psi_3(z)$. Определитель матрицы $X(z)$ вычисляется аналогично и равен

$$\det X(z) = \Pi_{j=1}^{3} \lambda_{1j}(z) l_j^{+}(z) l_j^{-}(z)(\Phi_2(z) - \Phi_1(z))/\phi_1(z)\Omega_1(z).$$

Из формул (2.15) в рассматриваемом случае следует ограниченность в соответствующих областях конечной плоскости выражения

$$(\Phi_2(z) - \Phi_1(z))/\phi_1(z)\Omega_1(z)$$

и отсутствие у него нулей. Значит, при наличии полюсов у заданных решений задачи (1.4), а также в случае нулей разностей $\Phi_2^{\pm}(z) - \Phi_1^{\pm}(z)$, этот определитель будет обращаться в нуль и для построения канонической системы решений (1.2) следует применить результаты работы [5]. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $(\Phi_j(z), \Psi_j(z))$, $j = 1, 2$, *— два решения системы задач дробно-линейного сопряжения* (1.4) *с различными тройками* (1.7), *соответствующей неособенной на простом гладком замкнутом контуре H-непрерывной матрице-функции* (0.1), *для которых разности* $\Phi_2^{\pm}(t) - \Phi_1^{\pm}(t)$, *а также функции* (2.6) *не обращаются в нуль и бесконечность на контуре. Тогда функции* (2.19), (2.20), *определенные формулами* (2.1), (2.6), (2.12), (2.15)–(2.17), *образуют систему трех решений задачи линейного сопряжения* (0.3), *при помощи которой ее каноническая система решений может быть построена эффективно.*

Замечание 1. Рассмотрим матрицу-функцию, которая получается из матрицы-функции (0.1) перестановкой второй и третьей строки, а также второго и третьего столбца при помощи домножения ее слева и справа на перестановочную матрицу. Тогда, меняя функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ местами, придем к соответствующей задаче вида (1.4), для которой в условиях доказанного предложения роль разности $\Phi_2^{\pm}(t) - \Phi_1^{\pm}(t)$ будет играть разность $\Psi_2^{\pm}(t) - \Psi_1^{\pm}(t)$ компонент $\Psi_j(z)$, $j = 1, 2$, решения исходной задачи (1.4).

Замечание 2. Случай обращения выражений $\Phi_2^{\pm}(t) - \Phi_1^{\pm}(t)$, $\lambda_{11}(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi_1^-(t) + g_{13}\Psi_1^-(t)$, $\lambda_{12}(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi_2^-(t) + g_{13}\Psi_2^-(t)$ в конечном числе точек контура в нуль или бесконечность определенного характера может быть исследован с привлечением работы [6], а также теории краевой задачи Римана в исключительных случаях ([7], с. 130).

3. Некоторые классы задач линейного сопряжения для трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме

Рассмотрим случаи разрешимости задачи (0.3) в замкнутой форме, вытекающие из определений 1–3, аналогично тому, как это сделано в работе [8] для двумерной задачи линейного сопряжения.

Обозначим через M^+ и M^- классы H-непрерывных на Γ функций, мероморфно продолжимых в области D^+ и D^- соответственно.

1. Предположим, что у задачи линейного сопряжения (0.3) найдется решение $\mathbf{w}(z)$ с тройкой (1.1), у которой одна из компонент — рациональная функция. Не ограничивая общности (учитывая возможность домножения матрицы-функции (0.1) на перестановочные матрицы и переобозначения компонент искомого решения), будем считать, что $\lambda_1(t) = r(t)$ — рациональная функция. Пусть $r(t)$ не обращается в нуль и бесконечность на Γ. Выражая λ_2 из последнего равенства (1.9) и подставляя в первое, для компоненты $\Phi(z)$ искомого решения $(\Phi(z), \Psi(z))$ системы задач дробно-линейного сопряжения (1.4) придем на Γ к скалярной задаче линейного сопряжения

$$\Phi^+ = -\frac{G_{31}}{rg_{13}}\Phi^- + \frac{rg_{23} + G_{32}}{rg_{13}},$$

кусочно-мероморфное решение которой при условии $g_{13}(t) \neq 0$ $G_{31}(t) \neq 0$ на Γ запишем в виде

$$\Phi^+ = \frac{G_{31}^+}{rg_{13}^+}\left(P\left[\frac{rg_{23} + G_{32}}{g_{13}^- G_{31}^+}\right] + R\right), \quad \Phi^- = \frac{g_{13}^-}{G_{31}^-}\left(Q\left[\frac{rg_{23} + G_{32}}{g_{13}^- G_{31}^+}\right] - R\right). \tag{3.1}$$

В формулах (3.1) $g_{13}^{\pm}(t)$, $G_{31}^{\pm}(t)$ — факторизационные множители на Γ элемента $g_{13}(t)$ и алгебраического дополнения $G_{31}(t)$ матрицы-функции (0.1): $g_{13}(t) = g_{13}^+(t)g_{13}^-(t)$, $G_{31}(t) = G_{31}^+(t)G_{31}^-(t)$, $R(t)$ — рациональная функция. Записывая для матрицы-функции G_1, определенной в (1.11), с элементами g_{ij}^1 и их алгебраическими дополнениями G_{ij}^1 $(i, j = 1, 2, 3)$, также первое равенство (1.9) с учетом последнего, в котором $g_{23}^1 = g_{23}\Phi^-/\Psi^-$, $g_{13}^1 = g_{12}\Phi^-/\Psi^-$, $G_{32}^1 = -G_{33}\Phi^-/\Psi^-$, $G_{31}^1 = -G_{31}$, получим $\Psi^- = (rg_{12}\Phi^+ - rg_{22} + G_{33})/G_{31}$. Подставляя сюда выражение для Φ^+ из (3.1), в котором оператор P выражен через Q, после несложных преобразований придем к требованию принадлежности классу M^- представления

$$\Psi^- = \frac{r - g_{11}}{g_{13}} - \frac{g_{12}g_{13}^-}{g_{13}G_{31}^-}\left(Q\left[\frac{rg_{23} + G_{32}}{g_{13}^- G_{31}^+}\right] - R\right). \tag{3.2}$$

Это условие будет выполнено, если потребовать такой принадлежности отношений

$$\frac{r(t) - g_{11}(t)}{g_{13}(t)}, \quad \frac{g_{12}(t)}{g_{13}(t)}. \tag{3.3}$$

Тот же результат проще можно получить, если воспользоваться первым равенством (1.7). Записывая первое равенство (1.9) для матрицы-функции G_2 из (1.11) с элементами g^2_{ij} и алгебраическими дополнениями G^2_{ij} соответственно $(i,j=1,2,3)$ и выражая λ_2 через λ_1, получим $\Psi^+=(G_{21}\Phi^-+rg_{33}-G_{22})/rg_{13}$ $(g^2_{23}=g_{33}\Phi^+/\Psi^+,\ g^2_{13}=g_{13},\ G^2_{32}=-G_{22}\Phi^+/\Psi^+,$ $G^2_{31}=-G_{21}\Phi^+/\Psi^+)$. Подставляя выражение для Φ^- из (3.1), в котором оператор Q выражен через P, придем к требованию принадлежности классу M^+ представления

$$\Psi^+=\frac{\Delta-rG_{11}}{rG_{31}}-\frac{G_{21}G^+_{31}}{rG_{31}g^+_{13}}\left(P\left[\frac{rg_{23}+G_{32}}{g^-_{13}G^+_{31}}\right]+R\right)\quad(\Delta=\det G). \tag{3.4}$$

Последнее условие, очевидно, будет выполнено, если потребовать такой принадлежности для отношений

$$\frac{\Delta(t)-r(t)G_{11}(t)}{G_{31}(t)},\quad \frac{G_{21}(t)}{G_{31}(t)}. \tag{3.5}$$

Непосредственной подстановкой в краевые условия (1.4) можно показать, что при условии принадлежности отношений (3.3), (3.5) классам M_+ и M_- соответственно, формулы (3.1), (3.2), (3.4) определяют кусочно-мероморфное решение этой задачи.

Выразим теперь λ_3 из последнего равенства (1.10) и подставим в первое из этих равенств. Тогда для компоненты $\Psi(z)$ решения задачи (1.4) придем к задаче линейного сопряжения

$$\Psi^+=-\frac{G_{21}}{rg_{12}}\Psi^-+\frac{rg_{32}+G_{23}}{rg_{12}},$$

решение которой при условии $g_{12}(t)\neq 0$, $G_{21}(t)\neq 0$ возьмем в виде

$$\Psi^+=\frac{G^+_{21}}{rg^+_{12}}\left(P\left[\frac{rg_{32}+G_{23}}{g^-_{12}G^+_{21}}\right]+R\right),\quad \Psi^-=\frac{g^-_{12}}{G^-_{21}}\left(Q\left[\frac{rg_{32}+G_{23}}{g^-_{12}G^+_{21}}\right]-R\right) \tag{3.6}$$

$(g_{12}(t)=g^+_{12}(t)g^-_{12}(t),\ G_{21}(t)=G^+_{21}(t)G^-_{21}(t))$. Записывая первое из равенств (1.10), в котором также λ_3 выражено через λ_1 из последнего, для матриц-функций G_1 и G_2, придем после аналогичных вычислений к требованию принадлежности представления

$$\Phi^-=\frac{r-g_{11}}{g_{12}}-\frac{g_{13}g^-_{12}}{g_{12}G^-_{21}}\left(Q\left[\frac{rg_{32}+G_{23}}{g^-_{12}G^+_{21}}\right]-R\right) \tag{3.7}$$

классу M^-, а представления

$$\Phi^+=\frac{\Delta-rG_{11}}{rG_{21}}-\frac{G_{31}G^+_{21}}{rG_{21}g^+_{12}}\left(P\left[\frac{rg_{32}+G_{23}}{g^-_{12}G^+_{21}}\right]+R\right) \tag{3.8}$$

— классу M^+. Эти условия будут выполнены, если они выполняются для отношений

$$\frac{r(t)-g_{11}(t)}{g_{12}(t)},\quad \frac{g_{13}(t)}{g_{12}(t)}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\Delta(t)-r(t)G_{11}(t)}{G_{21}(t)},\quad \frac{G_{31}(t)}{G_{21}(t)} \tag{3.10}$$

соответственно. Отметим, что представление (3.7) также проще можно получить, если воспользоваться первым равенством (1.7). Тогда формулы (3.6)–(3.8) определят решение задачи (1.4), вообще говоря, отличное от (3.1), (3.2), (3.4). Легко видеть, что условия (3.9), (3.10) получаются из условий (3.3), (3.5), если у матрицы-функции (0.1) переставить вторую и третью строки и второй и третий столбцы.

Другое решение задачи (1.4) с той же первой компонентой тройки (1.7) может быть получено из (3.1), а также из (3.6), если в этих формулах вместо $R(z)$ взять другую рациональную функцию. Вторая и третья компоненты тройки по этому решению определяются из последних равенств (1.9), (1.10).

Заметим, что матрица-функция (0.1) в рассматриваемом случае должна имееть вид $\widetilde{G}(t) = \|\widetilde{g}_{ij}(t)\|$, где

$$\begin{gathered}\widetilde{g}_{11}(t) = r(t) - \phi^-(t)g_{13}(t), \quad \widetilde{g}_{12}(t) = \psi^-(t)g_{13}(t), \quad \widetilde{g}_{13}(t) = g_{13}(t),\\ \widetilde{g}_{21}(t) = g_{21}(t), \quad \widetilde{g}_{22}(t) = g_{22}(t), \quad \widetilde{g}_{23}(t) = g_{23}(t),\\ \widetilde{g}_{31}(t) = \phi^+(t) - \psi^+(t)g_{21}(t) - \psi^+(t)\phi^-(t)g_{23}(t) - \phi^-(t)g_{33}(t),\\ \widetilde{g}_{32}(t) = \psi^-(t)g_{33}(t) - \psi^+(t)\psi^-(t)g_{23}(t) - \psi^+(t)g_{22}(t), \quad \widetilde{g}_{33}(t) = g_{33}(t),\end{gathered}$$

а $\phi^+(t)$, $\psi^+(t)$, $\phi^-(t)$, $\psi^-(t)$ — контурные значения отношений (3.10), (3.9) соответственно.

2. Пусть у задачи линейного сопряжения (0.3) найдется решение $\mathbf{w}(z)$ с тройкой (1.1), у которой компонента $\lambda_1(t) = \lambda_1^+(t)$ — функция класса M^+ и не обращающаяся в нуль и бесконечность на контуре. В этом случае равенства (1.7) в силу последних равенств (1.9) и (1.10) принимают вид

$$\begin{aligned}\lambda_1^+ &= g_{11} + g_{12}\Phi^- + g_{13}\Psi^-,\\ \Phi^+\lambda_1^+ &= g_{22}\Phi^- + g_{23}\Psi^- + g_{21},\\ \Psi^+\lambda_1^+ &= g_{32}\Phi^- + g_{33}\Psi^- + g_{31}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Пусть $G_{11}(t) \neq 0$ на Γ. Будем рассматривать два последних равенства (3.11) как задачу линейного сопряжения

$$\mathbf{\Omega}^+ = F\mathbf{\Omega}^- + \mathbf{f} \tag{3.12}$$

($\mathbf{\Omega}^+ = \left(\Phi^+\lambda_1^+, \Psi^+\lambda_1^+\right)$, $\mathbf{\Omega}^- = (\Phi^-, \Psi^-)$) с матрицей-функцией

$$F(t) = \begin{pmatrix} g_{22}(t) & g_{23}(t)\\ g_{32}(t) & g_{33}(t)\end{pmatrix}, \quad \det F(t) = G_{11}(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{3.13}$$

и вектор-функцией $\mathbf{f}(t) = (g_{21}(t), g_{31}(t))$.

Предположим дополнительно, что элемент $g_{32}(t) \neq 0$ на Γ и отношение

$$\frac{g_{22}(t)}{g_{32}(t)} = \alpha^+(t) \tag{3.14}$$

— функция класса M^+. Умножая (3.12) с матрицей-функцией (3.13) слева на матрицу-функцию

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha^+(t)\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

придем для вектор-функций $\mathbf{\Omega}_1^+ = \left((\Phi^+ - \alpha^+\Psi^+)\lambda_1^+, \Psi^+\lambda_1^+\right)$, $\mathbf{\Omega}_1^- = \mathbf{\Omega}^-$ к задаче линейного сопряжения

$$\mathbf{\Omega}_1^+ = F_1\mathbf{\Omega}_1^- + \mathbf{f}_1 \tag{3.16}$$

с треугольной матрицей-функцией

$$\begin{pmatrix} 0 & -G_{11}(t)/g_{32}(t)\\ g_{32}(t) & g_{33}(t)\end{pmatrix}$$

и вектор-функцией $\mathbf{f}_1(t) = (G_{13}(t)/g_{32}(t), g_{31}(t))$.

Предельные значения на Γ решения последней задачи линейного сопряжения в классе кусочно-мероморфных функций имеют вид

$$\mathbf{\Omega}_1^+ = \left(\frac{G_{11}^+}{g_{32}^+}\left(P\left[K\right]+r\right), g_{32}^+\left(P\left[K_1\right]+R\right)\right), \quad \mathbf{\Omega}_1^- = \left(\frac{1}{g_{32}^-}\left(-Q\left[K_1\right]+R\right), \frac{g_{32}^-}{G_{11}^-}\left(Q\left[K\right]-r\right)\right),$$
$$K = \frac{G_{13}}{G_{11}^+ g_{32}^-}, \quad K_1 = \frac{g_{33}g_{32}^-\left(Q\left[K\right]+r\right)}{g_{32}^+ G_{11}^-} + \frac{g_{31}}{g_{32}^+}$$

(r, R — рациональные функции, $g_{32}^{\pm}(t)$, $G_{11}^{\pm}(t)$ — факторизационные множители на Γ элемента $g_{32}(t)$ и алгебраического дополнения $G_{11}(t)$ матрицы-функции (0.1)). Подставляя значения компонент $\mathbf{\Omega}_1^-$ в первое равенство (3.11) и выражая оператор P через Q, придем к условию принадлежности классу M^+ выражения

$$\lambda_1^+ = \frac{\Delta}{G_{11}} - \frac{G_{21}G_{11}^+}{G_{11}g_{32}^+}\left(P\left[K\right]+r\right) + \frac{g_{12}g_{32}^+}{g_{32}}\left(P\left[K_1\right]+R\right).$$

Это условие при выполнении условия (3.14) будет выполнено, если такой принадлежности потребовать для отношений

$$\Delta(t)/G_{11}(t), \quad G_{21}(t)/G_{11}(t), \quad g_{12}(t)/g_{32}(t). \tag{3.17}$$

Если элемент $g_{22}(t) \neq 0$ на Γ и отношение

$$\frac{g_{23}(t)}{g_{22}(t)} = \alpha^-(t) \tag{3.18}$$

— функция класса M^- то, полагая в (3.16)

$$\mathbf{\Omega}_1^+(t) = \mathbf{\Omega}^+(t), \quad \mathbf{\Omega}_1^-(t) = \left(\Phi^-(t) + \alpha^-(t)\Psi^-(t), \Psi^-(t)\right), \quad \mathbf{f}_1(t) = \mathbf{f}(t),$$
$$F_1(t) = F(t)\begin{pmatrix} 1 & -\alpha^-(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{22}(t) & 0 \\ g_{32}(t) & G_{11}(t)/g_{22}(t) \end{pmatrix},$$

найдем

$$\mathbf{\Omega}_1^+ = \left(g_{22}^+\left(P\left[K\right]+r\right), \frac{G_{11}^+}{g_{22}^+}\left(P\left[K_1\right]+R\right)\right), \quad \mathbf{\Omega}_1^- = \left(\frac{1}{g_{22}^-}\left(-Q\left[K\right]+r\right), \frac{g_{22}^-}{G_{11}^-}\left(-Q\left[K_1\right]+R\right)\right),$$
$$K = \frac{g_{21}}{g_{22}^+}, \quad K_1 = \frac{g_{32}g_{22}^+\left(-Q\left[K\right]+r\right)}{G_{11}^+ g_{22}^-} + \frac{g_{31}g_{22}^+}{G_{11}^+}.$$

Подставляя выраженные отсюда значения компонент $\Phi^-(t)$ и $\Psi^-(t)$ в первое равенство (3.11), придем наряду с условием (3.18) к условию принадлежности классу M^+ выражения

$$\lambda_1^+ = \frac{\Delta}{G_{11}} - \frac{G_{21}}{G_{11}}\left(P\left[K\right]+r\right) - \frac{G_{31}G_{11}^+}{G_{11}g_{22}^+}\left(P\left[K_1\right]+R\right),$$

которое будет выполнено при такой принадлежности отношений

$$\Delta(t)/G_{11}(t), \quad G_{21}(t)/G_{11}(t), \quad G_{31}(t)/G_{11}(t). \tag{3.19}$$

Придавая рациональным функциям $r(z)$ и $R(z)$ различные значения, по компонентам вектор-функций $\mathbf{\Omega}_1(z)$ и $\mathbf{\Omega}(z)$ определим два решения задачи (1.4) с различными тройками (1.7). Условию отсутствия у $\lambda_1^+(t)$ нулей и особенностей на контуре можно удовлетворить также за счет подбора этих рациональных функций.

3. Пусть у задачи линейного сопряжения (0.3) найдется решение $\mathbf{w}(z)$ с тройкой (1.1), у которой компонента $\lambda_1(t) = \lambda_1^-(t)$ — функция класса M^- и не обращающаяся в нуль и бесконечность на контуре. В этом случае равенства (3.11) перепишем в виде

$$\begin{aligned} 1 &= g_{11}\frac{1}{\lambda_1^-} + g_{12}\frac{\Phi^-}{\lambda_1^-} + g_{13}\frac{\Psi^-}{\lambda_1^-},\\ \Phi^+ &= g_{21}\frac{1}{\lambda_1^-} + g_{22}\frac{\Phi^-}{\lambda_1^-} + g_{23}\frac{\Psi^-}{\lambda_1^-},\\ \Psi^+ &= g_{31}\frac{1}{\lambda_1^-} + g_{32}\frac{\Phi^-}{\lambda_1^-} + g_{33}\frac{\Psi^-}{\lambda_1^-}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Если элемент $g_{11}(t) \neq 0$ на Γ, то выражая $1/\lambda_1^-$ из первого равенства, придем к задаче (3.12), для которой

$$\begin{gathered} \mathbf{\Omega}^+ = \left(\Phi^+, \Psi^+\right), \quad \mathbf{\Omega}^- = \left(\Phi^-/\lambda_1^-, \Psi^-/\lambda_1^-\right),\\ F(t) = \begin{pmatrix} G_{33}(t)/g_{11}(t) & -G_{32}(t)/g_{11}(t)\\ -G_{23}(t)/g_{11}(t) & G_{22}(t)g_{11}(t)\end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{3.21}$$

$\det F = \Delta(t)/g_{11}(t) \neq 0$, $\mathbf{f}(t) = (g_{21}(t)/g_{11}(t), g_{31}(t)/g_{11}(t))$.

Пусть $G_{23}(t) \neq 0$ на Γ и отношение

$$\frac{G_{33}(t)}{G_{23}(t)} = \alpha^+(t) \tag{3.22}$$

— функция класса M^+. Умножая (3.12) с матрицей-функцией (3.21) слева на матрицу-функцию

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^+(t)\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

придем для вектор-функций $\mathbf{\Omega}_1^+ = (\Phi^+ + \alpha^+\Psi^+, \Psi^+)$, $\mathbf{\Omega}_1^- = \mathbf{\Omega}^-$ к задаче линейного сопряжения (3.16) с матрицей-функцией

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta(t)/G_{23}(t)\\ -G_{23}(t)/g_{11}(t) & G_{22}(t)/g_{11}(t)\end{pmatrix}$$

и вектор-функцией $\mathbf{f}_1(t) = (-G_{13}(t)/G_{23}(t), g_{31}(t)/g_{11}(t))$. Решение полученной задачи в классе кусочно-мероморфных функций на Γ запишем по формулам

$$\mathbf{\Omega}_1^+ = \left(\frac{\Delta^+}{G_{23}^+}\left(-P\left[K\right] + r\right), \frac{G_{23}^+}{g_{11}^+}\left(P\left[K_1\right] + R\right)\right), \quad \mathbf{\Omega}_1^- = \left(\Delta^- G_{23}^-\left(Q\left[K\right] + r\right), \frac{g_{11}^-}{G_{23}^-}\left(Q\left[K_1\right] - R\right)\right),$$

$$K = \frac{G_{13}}{\Delta^+ G_{23}^-}, \quad K_1 = \frac{g_{11}^+}{G_{23}^+}\left(\Delta^- G_{23}^-\left(Q\left[K\right]+r\right) + \frac{g_{31}}{g_{11}}\right)$$

($r(t)$, $R(t)$ — рациональные функции, $g_{11}(t) = g_{11}^+(t)g_{11}^-(t)$, $G_{23}(t) = G_{23}^+(t)G_{23}^-(t)$, $\Delta(t) = \Delta^+(t)/\Delta^-(t)$). Подставляя значения компонент $\mathbf{\Omega}^-$ в первое равенство (3.20), придем к требованию принадлежности классу M^- выражения

$$\frac{1}{\lambda_1^-} = \frac{1}{g_{11}} - \frac{g_{12}g_{11}^-}{g_{11}G_{23}^-}\left(Q\left[K_1\right] - R\right) - \frac{g_{13}}{g_{11}}\Delta^- G_{23}^-\left(Q\left[K\right] + r\right).$$

Это условие будет выполнено, если наряду с условием (3.22) потребовать такой принадлежности для функций

$$g_{11}(t), \quad g_{12}(t), \quad g_{13}(t). \tag{3.24}$$

Компоненты решений задачи (1.4) определятся через компоненты вектор-функции $\mathbf{\Omega}(z)$.

Если $G_{33}(t) \neq 0$ на Γ и отношение

$$\frac{G_{32}(t)}{G_{33}(t)} = \alpha^-(t) \tag{3.25}$$

— функция класса M^-, то, полагая в (3.16)

$$\mathbf{\Omega}_1^+(t) = \mathbf{\Omega}^+(t), \quad \mathbf{\Omega}_1^-(t) = \left(\left(\Phi^-(t) - \alpha^-(t)\Psi^-(t)\right)/\lambda_1^-, \Psi^-(t)/\lambda_1^-\right), \quad \mathbf{f}_1(t) = \mathbf{f}(t),$$

$$F_1(t) = F(t)\begin{pmatrix}1 & \alpha^-(t)\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}G_{33}(t)/g_{11}(t) & 0\\ -G_{23}(t)/g_{11}(t) & \Delta(t)/G_{33}(t)\end{pmatrix},$$

находим

$$\mathbf{\Omega}_1^+ = \left(\frac{G_{33}^+}{g_{11}^+}\left(P\left[K\right] + r\right), \frac{\Delta^+}{G_{33}^+}\left(P\left[K_1\right] + R\right)\right), \quad \mathbf{\Omega}_1^- = \left(\frac{g_{11}^-}{G_{33}^-}\left(-Q\left[K\right] + r\right), \Delta^- G_{33}^-\left(-Q\left[K_1\right] + R\right)\right),$$

$$K = \frac{g_{21}}{G_{33}^+ g_{11}^-}, \quad K_1 = \frac{G_{23}G_{33}^+}{g_{11}^+\Delta^+ G_{33}^-}\left(Q\left[K\right] - r\right) + \frac{g_{31}G_{33}^+}{g_{11}\Delta^+}.$$

Подставляя выраженные отсюда значения компонент $\Phi^-(t)/\lambda_1^-$ и $\Psi^-(t)/\lambda_1^-$ в первое равенство (3.20), придем, наряду с условием (3.25), к условию принадлежности классу M^- выражения $1/\lambda_1^-(t)$, которое выполняется при такой принадлежности функций (3.24). Выбор рациональных функций $r(z)$ и $R(z)$ осуществляется так же, как в п. 2.

В заключение рассмотрим случай существования решения системы задач дробно-линейного сопряжения (1.4), являющегося также решением некоторой системы задач дробно-линейного сопряжения с подобной тройкой, одна из компонент которой является рациональной функцией либо функцией класса M^+ или M^- без нулей и особенностей на контуре. Достаточно ограничиться лишь случаем, когда такой компонентой будет $\widetilde{\lambda}_1(t)$. Действительно, если предположить существование решения $(\Phi(z), \Psi(z))$ задачи (1.4) и задачи дробно-линейного сопряжения, соответствующей матрице-функциии $G_4(t) = \Psi^+(t)G_3(t)/\Psi^-(t)$, где матрица-функция $G_3(t)$ определена в (1.12), причем $\widetilde{\lambda}_1(t) = r(t)$ — рациональная функция, то из равенств, аналогичных (1.7), получим, что это решение будет также решением задач дробно-линейного сопряжения, соответствующих матрицам-функциям $G_3(t)$ и $G_5(t) = \Phi^-(t)G_4(t)/\Phi^+(t)$ с подобными тройками, третья и соответственно вторая компоненты которых равны $r(t)$.

4. Пусть у решения $(\Phi(z), \Psi(z))$ задачи (1.4), являющегося также решением задачи дробно-линейного сопряжения, соответствующей матрице-функции $G_4(t)$, первая компонента подобной тройки является рациональной функцией без нулей и полюсов на контуре ($\widetilde{\lambda}_1(t) = r(t)$). Записывая для этой матрицы-функции с элементами g_{ij}^4 и их алгебраическими дополнениями G_{ij}^4 $(i, j = 1, 2, 3)$ первое равенство (1.9) ($g_{23}^4 = G_{32}\Psi^+/\Psi^-$, $g_{13}^4 = G_{31}\Phi^-\Psi^+/\Phi^+\Psi^-$, $G_{32}^4 = \Delta g_{23}\Phi^-\Psi^+/\Phi^+\Psi^-$, $G_{31}^4 = \Delta g_{13}\Psi^+/\Psi^-$) и выражая $\widetilde{\lambda}_2(t)$ из последнего равенства (1.9), придем к скалярной задаче линейного сопряжения

$$\Phi_1^+ = -\frac{rG_{32}}{\Delta g_{23}}\Phi_1^- + \frac{rG_{31} + \Delta g_{13}}{\Delta g_{23}}, \quad \Phi_1 = \frac{1}{\Phi}. \tag{3.26}$$

Решение задачи (3.26) в классе кусочно-мероморфных функций запишем по формуле

$$\Phi_1^+ = \frac{G_{32}^+}{\Delta^+ g_{23}^+}\left(P\left[\frac{(rG_{31} + \Delta g_{13})\Delta^-}{G_{32}^+ g_{23}^-}\right] + R\right), \quad \Phi_1^- = \frac{g_{23}^-}{r\Delta^- G_{32}^-}\left(Q\left[\frac{(rG_{31} + \Delta g_{13})\Delta^-}{G_{32}^+ g_{23}^-}\right] - R\right) \tag{3.27}$$

($g_{23}(t) = g_{23}^+(t)g_{23}^-(t)$, $G_{32}(t) = G_{32}^+(t)G_{32}^-(t)$, $\Delta(t) = \Delta^+(t)/\Delta^-(t)$, $R(t)$ — рациональная функция). Тогда из второго и третьего равенств (1.7), записанных для матрицы-функции G_4, найдем

$$\Psi^+ = \frac{r - G_{22}}{G_{32}}\Phi^+ - \frac{G_{12}}{G_{32}} \quad \left(\Phi^+ = \frac{1}{\Phi_1^+}\right), \quad \Psi^- = \frac{\Delta - rg_{22}}{rg_{23}}\Phi^- - \frac{g_{21}}{g_{23}} \quad \left(\Phi^- = \frac{1}{\Phi_1^-}\right). \qquad (3.28)$$

Значит, условием существования такого решения задачи (0.3) является принадлежность классу M^+ и M^- представлений (3.28) соответственно, что выполняется при условии такой принадлежности для отношений

$$\frac{r(t) - G_{22}(t)}{G_{32}(t)}, \quad \frac{G_{12}(t)}{G_{32}(t)}, \qquad (3.29)$$

и

$$\frac{\Delta(t) - r(t)g_{22}(t)}{g_{23}(t)}, \quad \frac{g_{21}(t)}{g_{23}(t)}. \qquad (3.30)$$

Заменяя в (3.27) $R(z)$ на различные рациональные функции $R_1(z)$ и $R_2(z)$, получим два решения задачи (1.4) с одинаковой рациональной первой компонентой тройки (1.7).

5. Пусть для задачи дробно-линейного сопряжения, соответствующей матрице-функции G_4, компонента подобной тройки $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_1^+$ — функция класса M^+ и не обращающаяся в нуль и бесконечность на контуре. Тогда равенства (1.7) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi^-} &= G_{11}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+} + G_{21}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^+} + G_{31}\frac{\Psi^+}{\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+}, \\ 1 &= G_{12}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+} + G_{22}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^+} + G_{32}\frac{\Psi^+}{\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+}, \\ \frac{\Psi^-}{\Phi^-} &= G_{13}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+} + G_{23}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^+} + G_{33}\frac{\Psi^+}{\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+}. \end{aligned} \qquad (3.31)$$

Пусть $G_{22}(t) \neq 0$ на Γ. Подставляя значение $1/\widetilde{\lambda}_1^+$, определенное из второго равенства (3.31), в остальные, придем к задаче (3.12), для которой $\mathbf{\Omega}^+ = \left(1/\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+, \Psi^+/\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+\right)$, $\mathbf{\Omega}^- = (1/\Phi^-, \Psi^-/\Phi^-)$,

$$F(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t)/\Delta(t) & g_{13}(t)/\Delta(t) \\ g_{31}(t)\Delta(t) & g_{33}(t)/\Delta(t) \end{pmatrix}, \quad \det F(t) = G_{22}(t)/\Delta^2(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \qquad (3.32)$$

а вектор-функция $\mathbf{f}(t) = (g_{12}(t)/\Delta(t), g_{32}(t)/\Delta(t))$.

Предполагая дополнительно, что элемент $g_{31}(t) \neq 0$ на Γ и отношение

$$\frac{g_{11}(t)}{g_{31}(t)} = \alpha^+(t) \qquad (3.33)$$

— функция класса M^+, после умножения (3.12) с матрицей-функцией (3.32) слева на матрицу-функцию (3.15), (3.33) придем к задаче линейного сопряжения (3.16) с матрицей-функцией

$$\begin{pmatrix} 0 & -G_{22}(t)/\Delta(t)g_{31}(t) \\ g_{31}(t)/\Delta(t) & g_{33}(t)/\Delta(t) \end{pmatrix}$$

и вектор-функциями

$$\mathbf{\Omega}_1^+ = \left((1 - \alpha^+\Psi^+)/\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+, \Psi^+/\widetilde{\lambda}_1^+\Phi^+\right), \quad \mathbf{\Omega}_1^- = \mathbf{\Omega}^-,$$
$$\mathbf{f}_1(t) = (G_{23}(t)/\Delta(t)g_{31}(t), g_{32}(t)/\Delta(t)).$$

Решение полученной задачи линейного сопряжения в классе кусочно-мероморфных функций (его предельные значения на Γ) запишем по формулам

$$\mathbf{\Omega}_1^+=\left(\frac{G_{22}^+}{g_{31}^+\Delta^+}\left(P\left[K\right]+r\right),\frac{g_{31}^+}{\Delta^+}\left(P\left[K_1\right]+R\right)\right),\quad \mathbf{\Omega}_1^-=\left(\frac{1}{g_{31}^-\Delta^-}\left(-Q\left[K_1\right]+R\right),\frac{g_{31}^-}{G_{22}^-\Delta^-}\left(Q\left[K\right]-r\right)\right),$$
$$K=\frac{G_{23}\Delta^-}{G_{22}^+g_{31}^-},\quad K_1=\frac{g_{33}g_{31}^-\left(Q\left[K\right]-r\right)}{g_{31}^+G_{22}^-}+\frac{g_{32}\Delta^-}{g_{31}^+}$$

(r, R — рациональные функции, $g_{31}(t)=g_{31}^+(t)g_{31}^-(t)$, $G_{22}(t)=G_{22}^+(t)G_{22}^-(t)$, $\Delta(t)=\Delta^+(t)/\Delta^-(t)$). Определяя компоненты вектор-функции $\mathbf{\Omega}^+(z)$ и требуя принадлежности классу M^+ найденного из второго равенства в (3.31) выражения для $1/\widetilde{\lambda}_1^+(t)$, придем к условию принадлежности классу M^+ отношения (3.33) и функций

$$G_{12}(t),\quad G_{22}(t),\quad G_{32}(t). \tag{3.34}$$

Если элемент $g_{11}(t)\neq 0$ на Γ и отношение

$$\frac{g_{13}(t)}{g_{11}(t)}=\alpha^-(t) \tag{3.35}$$

— функция класса M^-, то, полагая в (3.16) с матрицей-функцией (3.32)

$$\mathbf{\Omega}_1^+(t)=\mathbf{\Omega}^+(t),\quad \mathbf{\Omega}_1^-(t)=\left((1+\alpha^-(t)\Psi^-(t))/\Phi^-(t),\Psi^-(t)/\Phi^-(t)\right),\quad \mathbf{f}_1(t)=\mathbf{f}(t),$$
$$F_1(t)=F(t)\begin{pmatrix}1 & -\alpha^-(t)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11}(t)/\Delta(t) & 0\\ g_{31}(t)/\Delta(t) & G_{22}(t)/g_{11}(t)\Delta(t)\end{pmatrix},$$

найдем

$$\mathbf{\Omega}_1^+=\left(\frac{g_{11}^+}{\Delta^+}\left(P\left[K\right]+r\right),\frac{G_{22}^+}{g_{11}^+\Delta^+}\left(P\left[K_1\right]+R\right)\right),$$
$$\mathbf{\Omega}_1^-=\left(\frac{1}{g_{11}^-\Delta^-}\left(-Q\left[K\right]+r\right),\frac{g_{11}^-}{G_{22}^-\Delta^-}\left(-Q\left[K_1\right]+R\right)\right),$$
$$K=\frac{g_{12}\Delta^-}{g_{11}^+},\quad K_1=\frac{g_{31}g_{11}^+\left(-Q\left[K\right]+r\right)}{G_{22}^+g_{11}^-}+\frac{g_{32}g_{11}^+\Delta^-}{G_{22}^+}.$$

Подставляя значения компонент $\mathbf{\Omega}^+(z)$ в выражение для $1/\widetilde{\lambda}_1^+(t)$, придем к условию принадлежности классу M^- отношения (3.35) и условию принадлежности классу M_+ функций (3.34). Условию отсутствия у $\widetilde{\lambda}_1^+(t)$ нулей и особенностей на контуре можно удовлетворить также за счет подбора рациональных функций $r(z)$ и $R(z)$.

6. Пусть, наконец, для задачи дробно-линейного сопряжения, соответствующей матрице-функции G_4, компонента подобной тройки $\widetilde{\lambda}_1=\widetilde{\lambda}_1^-$ — функция класса M^- и не обращающаяся в нуль и бесконечность на контуре. Тогда равенства (3.31) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\lambda}_1^-}{\Phi^-}&=G_{11}\frac{1}{\Phi^+}+G_{21}+G_{31}\frac{\Psi^+}{\Phi^+},\\ \widetilde{\lambda}_1^-&=G_{12}\frac{1}{\Phi^+}+G_{22}+G_{32}\frac{\Psi^+}{\Phi^+},\\ \frac{\widetilde{\lambda}_1^-\Psi^-}{\Phi^-}&=G_{13}\frac{1}{\Phi^+}+G_{23}+G_{33}\frac{\Psi^+}{\Phi^+}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Если $g_{22}(t) \neq 0$ на Γ, то, полагая $\mathbf{\Omega}^+ = (1/\Phi^+, \Psi^+/\Phi^+)$, $\mathbf{\Omega}^- = \left(\widetilde{\lambda}_1^-/\Phi^-, \widetilde{\lambda}_1^-\Psi^-/\Phi^-\right)$ и исключая из этих равенств $\widetilde{\lambda}_1^-$, придем к задаче (3.12) с матрицей-функцией

$$F(t) = \begin{pmatrix} G_{33}(t)/g_{22}(t)\Delta(t) & -G_{31}(t)/g_{22}(t)\Delta(t) \\ -G_{13}(t)/g_{22}(t)\Delta(t) & G_{11}(t)/g_{22}(t)\Delta(t) \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

и вектор-функцией $\mathbf{f(t)} = (g_{12}(t)/g_{22}(t), g_{32}(t)/g_{22}(t))$ $(\det F(t) = 1/g_{22}(t)\Delta(t) \neq 0)$.

Пусть $G_{13}(t) \neq 0$ на Γ и отношение

$$\frac{G_{33}(t)}{G_{13}(t)} = \alpha^+(t) \tag{3.38}$$

— функция класса M^+. Умножая (3.12) с матрицей-функцией (3.37) слева на матрицу-функцию (3.23), (3.38), придем для вектор-функций $\mathbf{\Omega}_1^+ = ((1+\alpha^+\Psi^+)/\Phi^+, \Psi^+/\Phi^+)$, $\mathbf{\Omega}_1^- = \mathbf{\Omega}^-$ к задаче линейного сопряжения (3.16) с матрицей функцией

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/G_{13}(t) \\ -G_{13}(t)/g_{22}(t)\Delta(t) & G_{11}(t)/g_{22}(t)\Delta(t) \end{pmatrix}$$

и вектор-функцией $\mathbf{f}_1(t) = (-G_{23}(t)/G_{13}(t), g_{32}(t)/g_{22}(t))$. Решение полученной задачи в классе кусочно-мероморфных функций на Γ запишем по формулам

$$\mathbf{\Omega}_1^+ = \left(\frac{1}{G_{13}^+}\left(-P\left[K\right]+r\right), \frac{G_{13}^+}{g_{22}^+\Delta^+}\left(P\left[K_1\right]+R\right)\right), \quad \mathbf{\Omega}_1^- = \left(\frac{g_{22}^-}{G_{13}^-\Delta^-}\left(Q\left[K_1\right]+R\right), G_{13}^-\left(Q\left[K\right]+r\right)\right),$$

$$K = \frac{G_{23}}{G_{13}^-}, \quad K_1 = \frac{g_{22}^+\Delta^+}{G_{13}^+}\left(\frac{G_{11}G_{13}^-}{g_{22}\Delta}\left(Q\left[K\right]+r\right) + \frac{g_{32}}{g_{22}}\right),$$

в которых $r(t)$, $R(t)$ — рациональные функции, $g(t) = g_{22}^+(t)g_{22}^-(t)$, $G_{13}(t) = G_{13}^+(t)G_{13}^-(t)$. Подставляя значения компонент $\mathbf{\Omega}^+(t)$ во второе равенство (3.36) и выражая оператор P через Q, придем наряду с условием (3.38) к требованию принадлежности классу M^- отношений

$$\Delta(t)/g_{22}(t), \quad g_{21}(t)/g_{22}(t), \quad g_{23}(t)/g_{22}(t). \tag{3.39}$$

Если $G_{33}(t) \neq 0$ на Γ и отношение

$$\frac{G_{31}(t)}{G_{33}(t)} = \alpha^-(t) \tag{3.40}$$

— функция класса M^-, то, полагая в (3.16)

$$\mathbf{\Omega}_1^+(t) = \mathbf{\Omega}^+(t), \quad \mathbf{\Omega}_1^-(t) = \left(\left(1-\alpha^-(t)\Psi^-(t)\right)\widetilde{\lambda}_1^-/\Phi^-(t), \widetilde{\lambda}_1^-\Psi^-/\Phi^-\right), \quad \mathbf{f}_1(t) = \mathbf{f}(t),$$

$$F_1(t) = F(t)\begin{pmatrix} 1 & \alpha^-(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{33}(t)/g_{22}(t)\Delta(t) & 0 \\ -G_{13}(t)/g_{11}(t)\Delta(t) & 1/G_{33}(t) \end{pmatrix},$$

находим

$$\mathbf{\Omega}_1^+ = \left(\frac{G_{33}^+}{g_{22}^+\Delta^+}\left(P\left[K\right]+r\right), \frac{1}{G_{33}^+}\left(P\left[K_1\right]+R\right)\right),$$

$$\mathbf{\Omega}_1^- = \left(\frac{g_{22}^-}{G_{33}^-\Delta^-}\left(-Q\left[K\right]+r\right), G_{33}^-\left(-Q\left[K_1\right]+R\right)\right),$$

$$K = \frac{g_{12}\Delta^+}{G_{33}^+g_{22}^-}, \quad K_1 = \frac{G_{13}G_{33}^+}{g_{22}^+\Delta^+G_{33}^-}\left(Q\left[K\right]-r\right) + \frac{g_{32}G_{33}^+}{g_{22}},$$

где $G_{33}(t) = G_{33}^{+}(t)G_{33}^{-}(t)$, $r(t)$, $R(t)$ — рациональные функции. Подставляя выраженные отсюда значения компонент $\mathbf{\Omega}^{+}(t)$ также во второе равенство (3.36) и выражая оператор P через Q, придем при выполнении условия (3.40) к требованию принадлежности классу M^{-} отношений

$$\Delta(t)/g_{22}(t), \quad g_{21}(t)/g_{22}(t), \quad G_{32}(t)/G_{33}(t). \tag{3.41}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть неособенная на простом гладком замкнутом контуре* Γ *матрица-функция* (0.1) H*-непрерывна и для ее элементов* $g_{ij}(t)$ *и их алгебраических дополнений* $G_{ij}(t)$, $i,j = 1,2,3$ *выполняется одно из следующих условий*:

1) $g_{13}(t) \neq 0$, $G_{31}(t) \neq 0$ *и функции* (3.5), (3.3) *из* M^{+} *и* M^{-} *соответственно*;
2) $g_{32}(t) \neq 0$, $G_{11}(t) \neq 0$ *и функции* (3.14), (3.17) *из* M^{+};
3) $g_{22}(t) \neq 0$, $G_{11}(t) \neq 0$ *и функции* (3.19), (3.18) *из* M^{+} *и* M^{-} *соответственно*;
4) $g_{11}(t) \neq 0$, $G_{23}(t) \neq 0$ *и функции* (3.22), (3.24) *из* M^{+} *и* M^{-} *соответственно*;
5) $g_{11}(t) \neq 0$, $G_{33}(t) \neq 0$ *и функции* (3.24), (3.25) *из* M^{-};
6) $g_{23}(t) \neq 0$, $G_{32}(t) \neq 0$ *и функции* (3.29), (3.30) *из* M^{+} *и* M^{-} *соответственно*;
7) $g_{31}(t) \neq 0$, $G_{22}(t) \neq 0$ *и функции* (3.33), (3.34) *из* M^{+};
8) $g_{11}(t) \neq 0$, $G_{22}(t) \neq 0$ *и функции* (3.34), (3.35) *из* M^{+} *и* M^{-} *соответственно*;
9) $g_{22}(t) \neq 0$, $G_{13}(t) \neq 0$ *и функции* (3.38), (3.39) *из* M^{+} *и* M^{-} *соответственно*;
10) $g_{22}(t)(t) \neq 0$, $G_{33} \neq 0$ *и функции* (3.40), (3.41) *из* M^{-}.

Тогда решение задачи линейного сопряжения (0.3) *может быть записано в замкнутой форме.*

Замечание 3. Условия (3.14), (3.18), (3.22), (3.25), (3.33), (3.35), (3.38), (3.40) обеспечивают возможность сведения соответствующей задачи линейного сопряжения для двумерного вектора к задаче с треугольной матрицей-функцией. Поэтому, их можно заменить на любые другие условия, позволяющие записать решение двумерной задачи линейного сопряжения в замкнутой форме, например, рассмотренные в работах [8], [9].

Замечание 4. Случай обращения компоненты λ_1 и $\widetilde{\lambda}_1$ тройки (1.7), а также соответствующих элементов матрицы-функции (0.1) и их алгебраических дополнений в конечном числе точек контура в нуль или бесконечность определенного характера может быть исследован с привлечением теории краевой задачи Римана в исключительных случаях ([7], с. 130).

Домножая матрицу-функцию (0.1) слева и (или) справа на перестановочные матрицы (это сведется к перестановке и переобозначению компонент искомого решения), а также рассматривая матрицу-функцию $G'^{-1}(t)$ (обратную к транспонированной), придем к другим подобным условиям, обеспечивающим разрешимость задачи (0.3) в замкнутой форме.

Литература

[1] Векуа Н.П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи* (Наука, М., 1970).

[2] Литвинчук Г.С., Спитковский И.М. *Факторизация матриц-функций*, ч. I, II, ВИНИТИ, № 2410-84.

[3] Адуков В.М. *Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций*, Алгебра и анализ **4** (1), 54–74 (1992).

[4] Киясов С.Н. *Эффективная факторизация в некоторых классах матриц-функций третьего порядка*, Учен. зап. Казанск. гос. ун-та **150** (1), 65–70 (2008).

[5] Гахов Ф.Д. *Краевая задача Римана для системы n пар функций*, УМН **7** (4), 3–54 (1952)

[6] Гахов Ф.Д. *Особые случаи краевой задачи Римана для системы n пар функций*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **16** (2), 147–156 (1952).

[7] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).

[8] Киясов С.Н. *Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимые в замкнутой форме*, Изв. вузов. Матем., № 1, 3–20 (2013).

[9] Киясов С.Н. *Некоторые случаи эффективной факторизации матриц-функций второго порядка*, Изв. вузов. Матем., № 6, 36–43 (2012).

С.Н. Киясов

доцент, кафедра дифференциальных уравнений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Sergey.Kijasov@kpfu.ru

S.N. Kiyasov

A method of separation of classes of linear conjugation problems for three-dimensional vector

Abstract. We consider the structure of a set of piecewise-meromorphic solutions to linear conjugation problem for three-dimensional vector and its connection with solutions to a system of two problems of fractional-linear conjugation. It is shown that if there exist two piecewise-meromorphic solutions to a system of two fractional-linear conjugation problems, then a canonical system of solutions to linear conjugation problem can be constructed and a class of problems that are resolvable in closed forms can be selected.

Keywords: matrix-function, linear conjugation problem, fractional-linear conjugation problem.

S.N. Kiyasov

Associate Professor, Chair of Differential Equations,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Sergey.Kijasov@kpfu.ru